

周期受击陀螺系统波函数的分形

周洁 杨双波[†]

(南京师范大学物理科学与技术学院, 大规模复杂系统数值模拟江苏省重点实验室, 南京 210023)

(2014年6月13日收到; 2014年7月17日收到修改稿)

研究了周期受击陀螺系统波函数的分形. 发现在打击强度系数较弱时 (即 ≤ 1 时), 相空间是规则的, 分形维接近于 1; 随着打击强度系数的增大, 相空间开始变得混沌, 分形维也随之增大; 当打击强度系数达到 6 时, 相空间完全混沌, 分形维将达到最大值, 此时若继续增大打击强度系数, 分形维保持基本不变.

关键词: 陀螺, 波函数, 分形维, 相空间

PACS: 05.45.Mt, 05.45.Df

DOI: 10.7498/aps.63.220507

1 引言

量子混沌研究的是经典混沌系统量子化后其波函数及相关力学量的特征, 即经典混沌的量子表现. 目前主要从以下几个方面研究了量子混沌的表现特征: 1) 能谱统计特征^[1-6]; 2) 非定态波函数的动力学演化特征^[7-10]; 3) 定态波函数的形态特征^[11-14]. 分形^[15,16]作为近年来快速发展的一种研究非线性的新方法, 正在被广泛运用到各个研究领域之中. 例如 Harper 模型的 Hofstadter 的蝴蝶谱一直是临界谱统计的范例, 代表准确处在金属-绝缘体相变点系统的多分形谱^[17,18]. 基于 Anderson 紧束缚模型^[19], 业已发现对一个处于金属-绝缘体相变点或 Anderson 相变点的系统^[20], 它的本征态显示出清晰的分形特征. 最近发现一类驱动 SU(2) 系统的 Floquet 谱显示多分形特性的蝴蝶图案^[21,22], 其 Floquet 本征态也显示分形行为^[23]. 在其他系统如一种量子 Baker 映射^[24]中也发现了多分形行为的本征态; 在外电场中里德堡 Li 原子的电离动力学的研究中发现了分型结构^[25]; 在粗糙电介质表面上电磁散射中表现出分型特征^[26]; 在 Riken 介观器件粒子输运特性分析中发现了分形自相似行为^[27]等. 量子混沌系统的波函数在相空间的分布非常复杂, 一直以来对它的性质了解得很少, 对波函数的分形结构还没有得到足够的重视和研

究. 作为量子混沌系统的第四种表现, 波函数的分型结构、对它的描绘以及对其分形维的分析和计算将为我们研究量子混沌系统状态及发展提供新的思路和方法. 近年来已有人对周期受击自旋系统的分形进行了一些研究^[28], 然而周期受击陀螺系统^[9]作为规则运动和混沌运动共存的混合系统一直受到人们的关注和重视. 本文将以此系统为例研究量子混沌系统波函数的分形特征.

最近, 我们在对周期受击陀螺系统的研究中发现, 打击强度系数 λ 较小时系统可积, 经典运动为规则运动, 相空间充满了环, 与此相对应的量子混沌系统的波函数是规则的, 分形维近似为 1; 随着打击强度系数 λ 的增大, 经典相空间出现了分岔, 混沌区域开始逐渐出现并扩大, 此时量子混沌系统波函数的结构变得越来越复杂, 分形维也随之逐渐增大; 而当打击强度系数 λ 到达 6.0 并继续增大时, 混沌运动充满整个相空间, 量子混沌系统的波函数的分形维也将达到其最大值, 并在 λ 继续增大时基本保持不变.

2 系统经典动力学

周期受击陀螺的哈密顿量可表示为

$$H = \alpha j_x + \lambda \frac{j_z^2}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (1)$$

[†] 通讯作者. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn

这里 α, λ 为常数; j_x, j_z 分别为角动量的 x 及 z 分量, j 为总角动量. 一步时间演化算符为

$$F = e^{-i\lambda j_z^2/2j} e^{-i\alpha j_x}, j^2 = j(j+1) \\ j = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots \quad (2)$$

设 $\tau = n$ 时刻的角动量为 \mathbf{j}_n , 那么 $\tau = n+1$ 时刻的角动量为

$$\mathbf{j}_{n+1} = F^+ \mathbf{j}_n F \\ = e^{i\alpha j_x} e^{i\lambda j_z^2/2j} \mathbf{j}_n e^{-i\lambda j_z^2/2j} e^{-i\alpha j_x}. \quad (3)$$

在 $j \rightarrow \infty$ 的极限下, 得到系统的经典运动方程为 [29]

$$X_{n+1} = \tilde{X} \cos \lambda \tilde{Z} - \tilde{Y} \sin \lambda \tilde{Z}, \quad (4)$$

$$Y_{n+1} = \tilde{X} \sin \lambda \tilde{Z} + \tilde{Y} \cos \lambda \tilde{Z}, \quad (5)$$

$$Z_{n+1} = \tilde{Z}, \quad (6)$$

其中

$$\tilde{X} = X_n, \quad (7)$$

$$\tilde{Y} = Y_n \cos \alpha - Z_n \sin \alpha, \quad (8)$$

$$\tilde{Z} = Y_n \sin \alpha + Z_n \cos \alpha, \quad (9)$$

X, Y, Z 分别为 $\mathbf{r} = \mathbf{j}/j$ 的三个分量, 取半径为 1 的球面坐标 (θ, ϕ) , 则有

$$X = \sin \theta \cos \phi,$$

$$Y = \sin \theta \sin \phi,$$

$$Z = \cos \theta.$$

图 1 显示出单位球面上几种不同打击强度系数 λ 下经典相空间的运动, $\alpha = 2.0$. 当 $0 \leq \lambda \leq 1$ 时, 经典运动主要为围绕固定点 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ 和 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$ 的规则运动, 相空间充满了环, 如图 1(a), (b) 所示; 当 $1 < \lambda \leq 2$ 时, 固定点 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$ 经历了干草叉分岔 (pitch fork bifurcation), 固定点由稳定变为不稳定, 同时两个新的稳定固定点出现, 伴随着混沌, 如图 1(c) 所示; 当 $2 < \lambda \leq 3$ 时, 围绕固定点 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ 的稳定区域及新产生的规则区域在逐渐减小, 伴随着混沌及规则岛链, 如图 1(d) 所示; 当 $3 < \lambda \leq 4$ 时, 固定点 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ 经历了干草叉分岔, 变为不稳定, 同时产生了两个稳定固定点及稳定区域, 当 $\lambda = 4$ 时, 稳定区域已变得很小; 当 $\lambda \geq 6$ 时, 混沌充满相空间, 如图 1(f) 所示. 综上, 周期受击陀螺系统随打击强度系数 λ 的变化经历了从可积的 $\lambda \leq 1$ 到完全混沌的 $\lambda \geq 6$ 的非线性动力学过程, $1 < \lambda < 6$ 为过渡区域, 相空间中规则与混沌运动共存.

3 系统的量子动力学

在 j^2, j_z 的共同本征态 $|jm\rangle$ 下, 算符 F 的矩阵元

$$\langle jm|F|jm'\rangle \\ = \sum_{m_x=-j}^j e^{-i(\lambda m^2/2j + \alpha m_x)} \langle jm|jm_x\rangle \\ \times \langle jm_x|jm'\rangle, \quad (10)$$

其中 $|jm_x\rangle$ 为 j^2, j_x 的共同本征态, 即 $j_x|jm_x\rangle = m_x|jm_x\rangle$. 在 j^2, j_z 共同本征表象下求 j_x 的矩阵元得

$$\langle jm|j_x|jm'\rangle = \frac{1}{2} \langle jm|j_+ + j_-|jm'\rangle \\ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(j-m')(j+m'+1)} \delta_{m,m'+1} \right. \\ \left. + \sqrt{(j+m')(j-m'+1)} \delta_{m,m'-1} \right). \quad (11)$$

通过矩阵对角化可求得本征值 m_x 和本征态 $|jm_x\rangle$, 代入 F 的矩阵元公式中, 通过矩阵对角化可以求得 F 的本征值和本征向量. 设置参数 $\alpha = 2.0$, 并选取相干态 $|\theta, \phi\rangle$, θ, ϕ 的取值可以决定相干态在相空间的位置. 下面计算 $p_\mu(\theta, \phi) = |\langle \mu|\theta, \phi\rangle|^2$, 即 F 的本征态 $|\mu\rangle$ 在相干态上投影的概率密度函数

$$p_\mu(\theta, \phi) = C_\mu \cdot C_\mu^*, \quad (12)$$

这里

$$C_\mu = \langle \mu|\theta, \phi\rangle = \sum_{m=-j}^j \langle \mu|jm\rangle \langle jm|\theta, \phi\rangle, \quad (13)$$

$$\langle jm|\theta, \phi\rangle = (1 + \gamma\gamma^*)^{-j} \gamma^{j-m} \sqrt{\binom{2j}{j-m}}, \quad (14)$$

$$\gamma = e^{i\phi} \tan(\theta/2), \quad (15)$$

其中 $\langle \mu|jm\rangle$ 是 F 的本征态在以角动量本征态为基矢的展开系数. 图 2(a)–(d) 分别给出了当 $j = 35, \alpha = 2.0, \mu = 25, \lambda = 0.2, 1.0, 3.0, 6.0$ 时, $p_\mu(\theta, \phi)$ 的相空间的分布情况. 图 2(a) 和 (d) 分别对应经典的 Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 环, 和全局混沌时相空间的概率密度分布情况, 而图 2(b) 和 2(c) 则对应 KAM 环和混沌运动共存时相空间的概率密度分布情况.

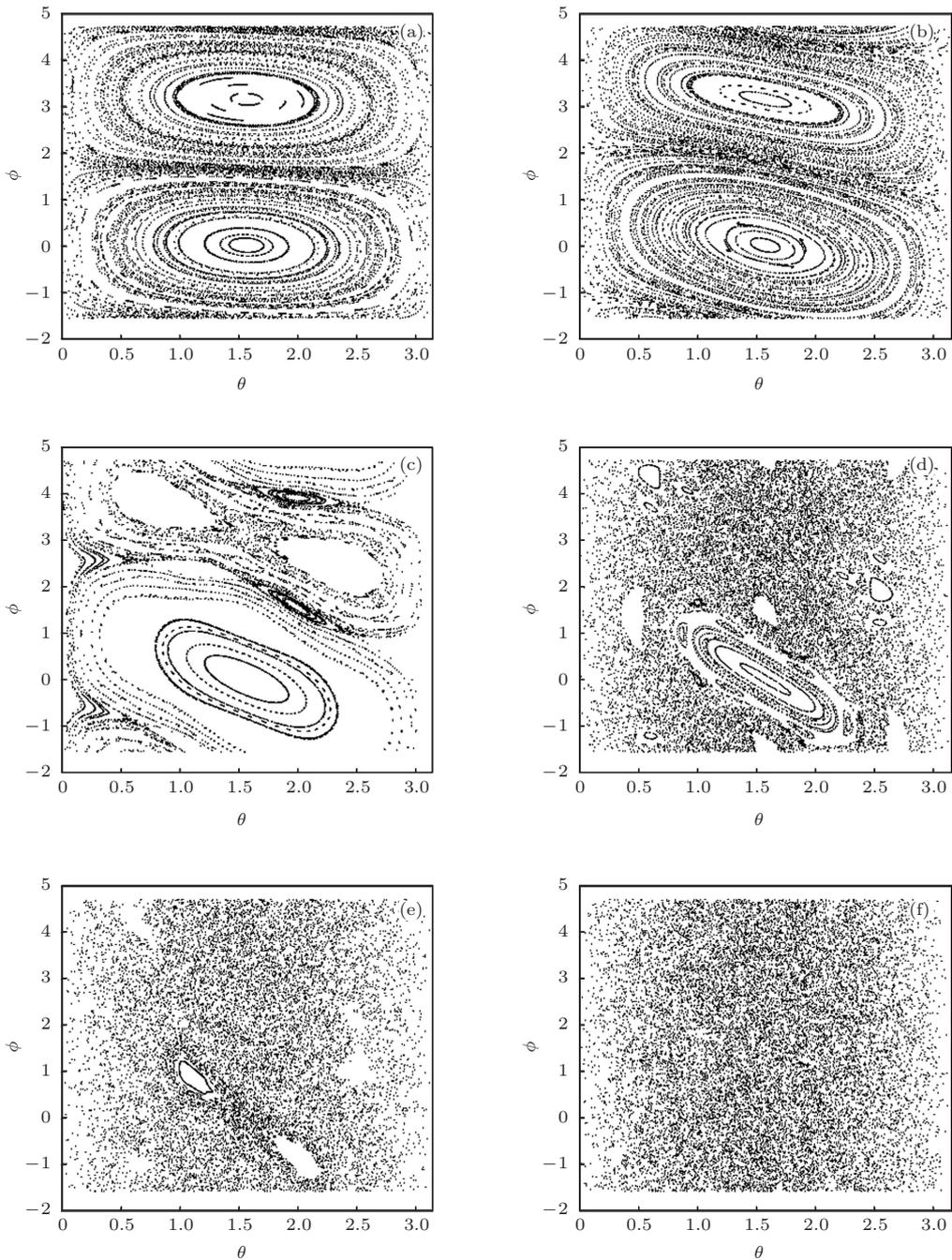


图1 几种不同打击强度系数下经典相空间的结构 ($\alpha = 2.0$) (a) $\lambda = 0.2$; (b) $\lambda = 1.0$; (c) $\lambda = 2.0$; (d) $\lambda = 3.0$; (e) $\lambda = 4.0$; (f) $\lambda = 6.0$

图3所示为图2(d)的等高线图. 图3有六条等高线, 从图中可以看到它的卷须和涡状结构, 它与分形的几何研究对象很相似. 因此我们猜测此系统的波函数将表现出分形性质.

为了验证我们的想法, 我们进一步计算了图3的分形维. 为了量化图3的分形性质, 首先将其转化为二维二进制相位图, 图4给出了 p_μ 的二维二进制相位图. 做图的具体步骤如下: 首先把相空间分成 $\varepsilon \times \varepsilon$ 的网格, 其中最小网格的边长 ε_0 要求小网格的面积能容一个量子态, 即

$\varepsilon_0^2 = O(1/(2j + 1))$ 或 $\varepsilon_0 = O(1/\sqrt{2j + 1})$, 这里 $2j + 1$ 为角动量为 j 的希尔伯特空间的维数, O 表示同量级. 对 $j = 30, \dots, 70$ 的范围, 取 $\varepsilon_0 = \pi/32$. 然后计算在每个网格上的平均概率密度

$$\int_{(\theta, \phi \in A(\varepsilon))} p_\mu(\theta, \phi) d\Omega / \int_{(\theta, \phi \in A(\varepsilon))} d\Omega \equiv (p_\mu)_\varepsilon, \quad (16)$$

其中 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 为面元 $A(\varepsilon)$ 所张的立体角. 当 $(p_\mu)_\varepsilon \geq 0.02$ 时, 规定此网格 $A(\varepsilon) = +1$, 在图中

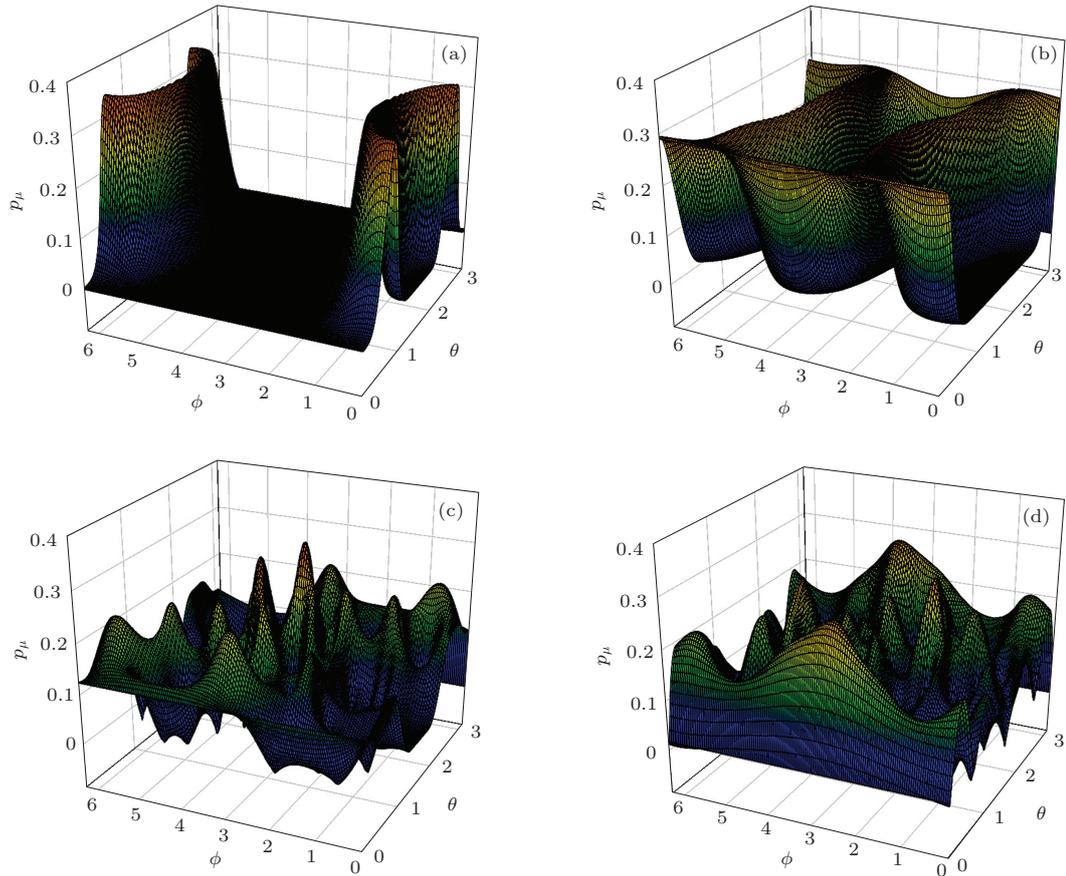


图2 系统参数 $j = 35$, $\alpha = 2.0$ 及不同打击强度系数系统的本征态 $\mu = 25$ 的概率密度分布 (a) $\lambda = 0.02$; (b) $\lambda = 1.0$; (c) $\lambda = 3.0$; (d) $\lambda = 6.0$

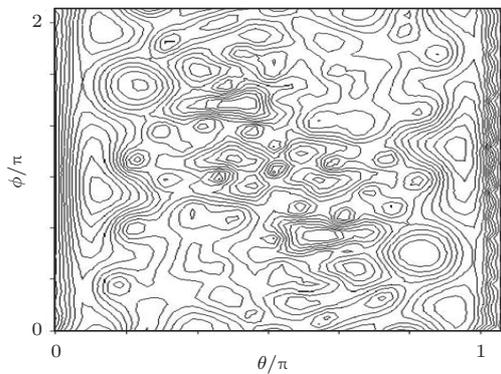


图3 图2(d)的6条等高线图

用黑色正方形表示; 而当 $(p_\mu)_\varepsilon < 0.02$ 时, 规定 $A(\varepsilon) = -1$, 在图中用白色表示. 通过图4可得到没有两两相重合的边长数 L_1 , 进一步改变 ε 的大小, 使之变为 $2\varepsilon_0, 4\varepsilon_0, 8\varepsilon_0$ 则可同样得到不同尺度下的边长数 L_2, L_3, L_4 . ε 与 L 的关系如图5所示.

接下来将统计在不同尺度下的的边长数 L , 即没有两两相重合的边长个数, 并给出他们的对数关系, 如图5所示. 图中分别给出了图2(a)和图2(d)的边长数和尺度的对数关系.

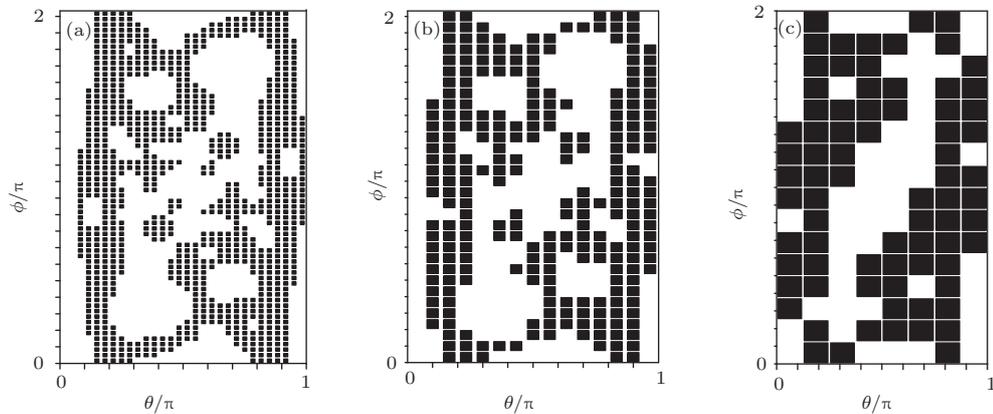


图4 依赖于标度的二进制图案 $(p_\mu)_\varepsilon$ (a) $\varepsilon = \pi/32$; (b) $\varepsilon = \pi/16$; (c) $\varepsilon = \pi/8$

最后通过分形维 D_f 的计算公式:

$$D_f = -d \ln L / d \ln \varepsilon \quad (17)$$

算出此系统的分形维. 用这样的方法分别算出 λ 不同取值时 D_f 的取值情况, 如图 6 所示. 在图 6(a) 中选取 $j = 35$, 并给出了 m 从 -35 — 35 的所有本征态的分形维; 在图 6(b) 中对上述本征态的分形维的值求平均, 得到了不同打击强度系数下系统的平均分形维.

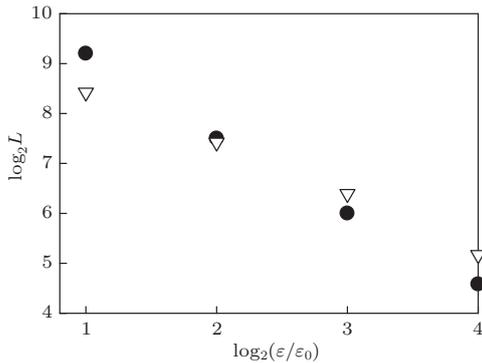


图 5 对数标度下没有两两重合的边长个数 L 的 ε 依赖. 三角形属于图 2(a), 实心圆属于图 2(d)

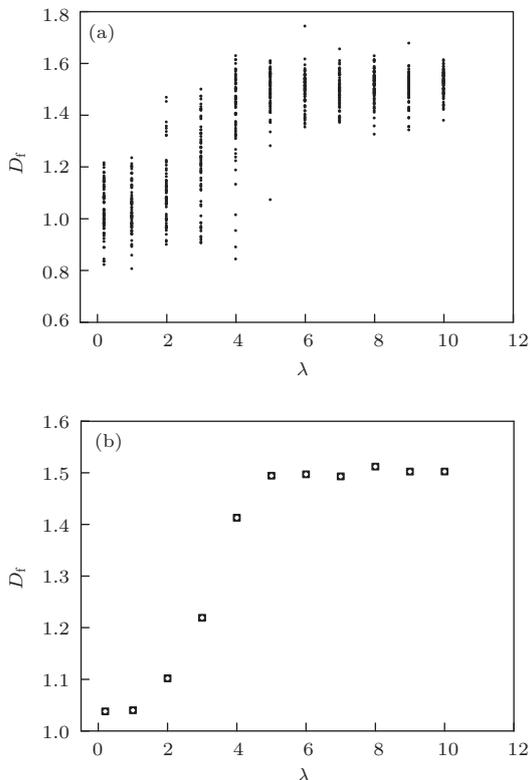


图 6 不同打击强度系数 λ 系统的分形维及平均分形维 (a) 系统各本征态的分形维分布; (b) 系统的平均分形维

从图 6 中可以看到 $\lambda \leq 1$ 系统为可积系统, 波函数在相空间规则分布, 分形维基本不变, 近似为

1; 在打击强度系数 λ 增大的过程中, 由于相空间混沌区域逐渐扩大, 分形维也随之增大, 当 $\lambda \geq 6$ 时, 相空间已充满混沌, 分形维将达到它的最大值 1.5, 并在加大打击强度时基本保持不变.

4 饱和分形维与总角动量的关系

当打击强度系数 $\lambda \geq 6$ 时, 给定角动量的分形维达到一个最大值 (如 $D_f = 1.5, j = 35$), 并在继续增大 λ 时保持不变, 称为给定角动量的饱和分形维. 对角动量 $j = 35, 40, 45, 50, 55, 60$ 等, 我们计算了它们的饱和分形维, 其结果示于图 7. 可以看出, 随角动量或空间维度的增加, 饱和分形维也在增加, 但以递减的速率变化. 我们期待在经典极限 ($j \rightarrow \infty$) 下, 饱和分形维将达到一稳定值, 不随 j 的值变化.

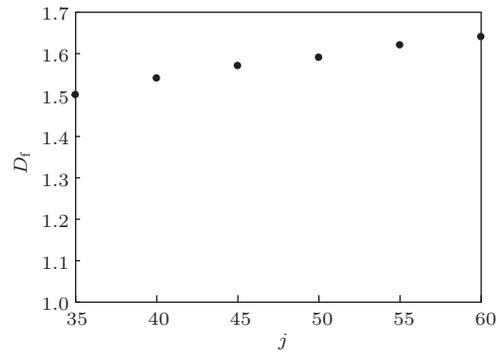


图 7 饱和分形维与总角动量的关系

5 结 论

本文研究了周期受击陀螺系统波函数的分形结构, 揭示了混沌系统波函数的空间分布与分形的深刻联系, 通过波函数的二维二进制相位图, 得到它的边长数的分形维 D_f , 从 D_f 的分布规律中我们了解到随着打击强度系数 λ 变化, 分形维 D_f 经历了在弱打击强度系数 $\lambda \leq 1$ 下的 $D_f \approx 1.0$ 到强打击强度系数 $\lambda \geq 6$ 下的 $D_f \approx 1.5$ 的过渡, 这与系统从 KAM 环到全局混沌过渡的非线性动力学过程完全相同, 这是经典与量子对应的又一种方式.

参考文献

- [1] Gutzwiller M C 1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer) pp254–281
- [2] Hönig A, Wintgen D 1989 *Phys. Rev. A* **39** 5642

- [3] Yang S B, Liu D K 2013 *J. Nanjing Normal Univ.* (Natural Science Edition) **36** 1 (in Chinese) [杨双波, 刘达可 2013 南京师范大学报 (自然科学版) **36** 1]
- [4] Bohigas O, Haq R U, Pandey A 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 1645
- [5] Huang L, Lai Y C, Celso G 2011 *Chaos* **21** 013102
- [6] Seligman T H, Verbaarschot J M, Zirnbauer M R 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 215
- [7] Davis M J, Heller E J 1981 *J. Chem. Phys.* **75** 3916
- [8] Lin W A, Ballentine L E 1992 *Phys. Rev. A* **45** 3637
- [9] Liu D K, Yang S B 2014 *J. Nanjing Normal Univ.* (Natural Science Edition) **37** 2 (in Chinese) [刘达可, 杨双波 2014 南京师范大学报 (自然科学版) **37** 2]
- [10] Tomsovic S, Heller E J 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 664
- [11] Stratt R M, Handy N C, Miller W H 1979 *J. Chem. Phys.* **71** 3311
- [12] McDonald S W 1983 *Ph. D. Dissertation* (Berkeley: University of California)
- [13] Heller E J 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515
- [14] Qin C C, Yang S B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 140507 (in Chinese) [秦陈陈, 杨双波 2014 物理学报 **63** 140507]
- [15] Mandelbrot B B 1983 *the Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)
- [16] Zhang J Z 1997 *Fractal* (Beijing: Qinghua University Press)
- [17] Harper P G 1955 *Proc. Phys. Soc. London Sect. A* **68** 874
- [18] Hofstadter D R 1976 *Phys. Rev. B* **14** 2239
- [19] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [20] Evers F, Mirlin A D 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1355
- [21] Wang J, Gong J B 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 244102
- [22] Wang J, Gong J B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 026204
- [23] Bandyopadhyay J N, Wang J, Gong J B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 066212
- [24] Martin J, Giraud O, Georgeot B 2008 *Phys. Rev. E* **77** 035201
- [25] Deng S H, Gao S, Li Y P, Xu X Y, Lin S L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040511
- [26] Ren X C, Guo L X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2956
- [27] Yang Q N, Zhang Y H, Cai X J, Jiang G H, Xu X Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 080505 (in Chinese) [杨秦男, 张延惠, 蔡祥吉, 蒋国辉, 徐学友 2013 物理学报 **62** 080505]
- [28] Nakamura K, Okazaki Y, Bishop A R 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 5
- [29] Haak F, Kus M, Scharf R 1987 *Z.Phys. B: Condens. Matter* **65** 381

Wave function fractal dimensions for the periodically kicked free top

Zhou Jie Yang Shuang-Bo[†]

(*Jiangsu Provincial Key Laboratory for Numerical Simulation of Large Scale Complex Systems, School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China*)

(Received 13 June 2014; revised manuscript received 17 July 2014)

Abstract

In this paper we study the fractal dimensions of wave function for the periodically kicked free top. We find that when kicking strength coefficient is less than or equal to 1 (≤ 1), the motion in classical phase space is regular, the fractal dimension is about 1, and as kicking strength increases, the motion in classical phase space becomes chaotic and the fractal dimension also increases. And we also find that when kicking strength is greater than or equal to 6 (≥ 6), the phase space becomes completely chaotic, the fractal dimension reaches its maximum value 1.5 and will keep this value.

Keywords: top, wave function, fractal dimension, phase space

PACS: 05.45.Mt, 05.45.Df

DOI: [10.7498/aps.63.220507](https://doi.org/10.7498/aps.63.220507)

[†] Corresponding author. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn