

论动态信息理论

邢修三

On dynamic information theory

Xing Xiu-San

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **63**, 230201 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.230201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.230201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/volumn/home.shtml>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[带势估计的概率假设密度滤波的物理空间意义](#)

翟岱亮, 雷虎民, 李海宁, 张旭, 李炯

2014, 63(22): 220204. 全文: [PDF \(244KB\)](#)

[带有分数阶阻尼的压电能量采集系统相干共振](#)

李海涛, 秦卫阳, 周志勇, 蓝春波

2014, 63(22): 220504. 全文: [PDF \(636KB\)](#)

[色关联的乘性和加性色噪声激励下分段非线性模型的随机共振](#)

靳艳飞, 李贝

2014, 63(21): 210501. 全文: [PDF \(290KB\)](#)

[温库边界对布朗热机性能的影响](#)

肖宇玲, 何济洲, 程海涛

2014, 63(20): 200501. 全文: [PDF \(331KB\)](#)

[分形基底上受限固固模型动力学性质的数值模拟研究](#)

杨毅, 唐刚, 宋丽建, 寻之朋, 夏辉, 郝大鹏

2014, 63(15): 150501. 全文: [PDF \(417KB\)](#)

综述

论动态信息理论

邢修三[†]

(北京理工大学物理系, 北京 100081)

(2014年6月5日收到; 2014年7月28日收到修改稿)

本文综述了作者的研究成果. 近十年, 作者将现有静态统计信息理论拓展至动态过程, 建立了以表述动态信息演化规律的动态信息演化方程为核心的动态统计信息理论. 基于服从随机性规律的动力学系统(如随机动力学系统和非平衡态统计物理系统)与遵守确定性规律的动力学系统(如电动力学系统)的态变量概率密度演化方程都可看成是其信息符号演化方程, 推导出了动态信息(熵)演化方程. 它们表明: 对于服从随机性规律的动力学系统, 动态信息密度随时间的变化率是由其在系统内部的态变量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和耗损三者引起的, 而动态信息熵密度随时间的变化率则是由其系统内部的态变量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和产生三者引起的. 对于遵守确定性规律的动力学系统, 动态信息(熵)演化方程与前者相比, 除动态信息(熵)密度在系统内部的态变量空间仅有漂移外, 其余皆相同. 信息和熵已与系统的状态和变化规律结合在一起, 信息扩散和信息耗损同时存在. 当空间噪声可略去时, 将会出现信息波. 若仅研究系统内部的信息变化, 动态信息演化方程就约化为与表述上述动力学系统变化规律的动力学方程相对应的信息方程, 它既可看成是表述动力学系统动态信息的演化规律, 亦可看成是动力学系统的变化规律都可由信息方程表述. 进而给出了漂移和扩散信息流公式、信息耗散率公式和信息熵产生率公式及动力学系统退化和进化的统一信息表述公式. 得到了反映信息在传递过程中耗散特性的动态互信息公式和动态信道容量公式, 它们在信道长度和信号传递速度之比趋于零的极限情况下变为现有的静态互信息公式和静态信道容量公式. 所有这些新的理论公式和结果都是从动态信息演化方程统一推导出的.

关键词: 动态信息演化方程, 信息波, 信息流, 动态信道容量

PACS: 02.50.Ey, 05.40.-a, 89.70.-a, 89.70.Cf

DOI: 10.7498/aps.63.230201

1 引言

信息, 与物质和能量同为构成世界和人类赖以生存的三大基本要素, 其重要性已由当前席卷世界的信息革命充分体现. 不仅如此, 在生命科学和思维科学中, 信息作为基本概念, 还将起着核心作用. 然而, 由于人类认识和研究先后的不同, 今天, 以物质和能量为主题的物理学基本理论, 大部分已较成熟; 而以信息为主题的信息基本理论, 除 Shannon 等提出的统计信息理论^[1-5]外, 多数还处于定性的探索阶段. 统计信息理论概念明确、数学表述和运算严格且有广泛应用. 但是, 它是静态的或平衡态

的, 与时空过程无关. 物理学和数学的发展历史表明, 静态理论之后通常总会出现相应的动态理论, 如从经典静力学到经典动力学, 从静电学到电动力学, 从平衡态统计物理到非平衡态统计物理, 从概率论到随机过程理论等; 而且动态理论中总会出现其作为核心内容的某种动力学方程或演化方程, 并将相应的静态理论看成是它的一个特殊部分. 实际上, 信息过程如信息传递过程, 它本身就是随时空变化的动态过程. 有鉴于这些情况, 近十年, 作者^[6-10]以服从随机性规律的动力学系统(如随机动力学系统与经典和量子非平衡态统计物理系统)及遵守确定性规律的动力学系统(如电动力学系统)为基础, 将现有静态统计信息理论拓展至动

[†] 通讯作者. E-mail: xingxiusan@gmail.com

态过程,建立了以表述动态信息演化规律的动态信息演化方程和动态熵演化方程为核心的动态统计信息理论. 它要解答的主要问题为: 动态信息和动态信息熵如何随时间、空间和其他态变量有规律地变化? 是否遵守什么演化方程? 若是, 这种方程是什么形式? 随着各种动力学系统性质的不同, 宏观的、微观的、随机性的和确定性的等, 各个动态信息演化方程和动态熵演化方程的数学类型有何同异? 导出它们的思路和方法适用于更广泛的学科领域吗? 信息和熵有何联系? 信息和熵如何能与系统结合在一起? 物理领域, 存在着声波、电磁波和水波等, 信息领域, 亦存在信息波吗? 物理学规律, 通常由物理方程表述, 它们是否亦可由信息方程表述? 换言之, 表述物理学系统和动力学系统演化规律的动力学方程, 可否转换成其对应的信息方程? 若能, 这些信息方程有何共性? 与动态信息演化方程又有什么联系? 信息流的定性概念已有广泛应用, 如何给出定量的数学表达式? 信息耗损和信息熵产生又如何定量地表述? 与哪些变量有关? 它们都与演化方程有何联系? 动力学系统退化和进化可否统一由信息定量表述? 如何表述? 动态信息传递过程中的互信息公式和信道容量公式是否有所修改? 如何修改? 两者与现有静态互信息公式和静态信道容量公式有何不同? 这些就是动态统计信息理论的主要内容. 它的核心是探求出动态信息(熵)演化方程, 再由它统一推导和解答上述各问题. 现有静态统计信息理论则可看成是动态统计信息理论的一个与时空过程无关的特殊部分.

2 动态信息(熵)演化方程

信息, 是客观事物状态及其变化规律的显示、反映或描述, 通常由所谓信息符号序列如语言、文字、数字、图像和信号等序列表示. 在统计信息理论中, 由于信息仅有语法特性, 而无语义特性和语用特性, 因而就可将信息理解为客观事物状态及其变化规律的不确定性的显示、反映或描述, 而其信息符号则由一组随机变量表示. 本文讨论的正是这种信息理论.

Shannon 信息理论的一个核心问题是给出信息的度量, 即定量地给出信息熵的定义

$$H(A) = S(A) = - \sum_{i=1}^n p(a_i) \log p(a_i),$$

它是信源平均不确定性的度量. 其中信息符号 a_i 是一组随机变量, $p(a_i)$ 是 a_i 出现的概率. 这种信息理论之所以是静态的, 是因为这个基本公式及由它推导出的各个次级公式都与时间和空间无关. 本文动态统计信息理论就是研究信息演化规律及其应用的信息理论, 它的核心则是定量地表述这种演化规律的动态信息(熵)密度随时空和系统自身运动规律变化的非线性演化方程, 即动态信息(熵)演化方程. 为了建立这种动态信息理论, 我们的出发点是把客观实际动力学系统表示客观事物, 作为信息之源, 把表述动力学系统状态的一组态变量或状态向量取代静态信息理论中泛义的随机变量 a_i , 作为信息符号. 态变量在系统之外的坐标空间的传递就是信息符号的传递, 表述在系统之外的坐标空间传递的态变量的概率密度随时空和系统自身运动规律变化的演化方程, 即态变量概率密度演化方程就是信息符号演化方程. 所谓客观动力学系统, 原则上说, 应包括物理学系统、化学系统、生物学系统及社会学系统等各种系统. 系统性质不同, 态变量性质和数目及其演化方程就不同, 因而信息符号及其演化方程亦有所不同. 需要强调指出, 因为在信息传递过程中, 动力学系统的态变量既要随系统自身的运动规律变化, 同时它作为信息符号又要在系统之外的坐标空间传递, 故这儿的态变量演化意味着态变量既在态变量空间变化同时又在坐标空间传递, 对应的态变量概率密度演化方程当然也就既包含态变量空间变化项又含有坐标空间传递项.

下面我们就以服从随机规律的随机动力学系统和非平衡态统计物理系统与遵守确定性规律的电动力学系统为基础, 给出其对应的态变量概率密度演化方程和动态信息(熵)演化方程. 这四种动力学方程中, 除第一种随机动力学系统外, 其他三种都是典型的物理学系统.

还需说明, 从统计信息理论的概念出发, 所有信息传递过程, 都是概率随机过程. 无论是服从随机规律的动力学系统, 或是遵守确定性规律的动力学系统, 它们作为信源所传递的信息过程, 当然也都是随机过程, 差别在于前类系统内部具有随机性, 而后类系统内部则无随机性. 下述各动力学的信息符号演化方程和动态信息(熵)演化方程中, 将会看到这种差别.

2.1 随机动力学系统

随机动力学系统, 遵守传统的随机运动规律, 领域广泛, 可包括自然系统和社会系统, 其态变量性质和数目可各不相同, 既可是微观的, 更可是宏观的和介观的.

为了简化, 这里先研究一个态变量的动力学系统, 而后将它的结果推广到一组 n 个态变量的动力学系统. 设所讨论的动力学系统, 如流体动力学、颗粒(如晶粒、恒星等)长大动力学、生物群体动力学等, 其状态可由态变量 a 描述, 如流体的速度、颗粒尺度、群体数目等. 如上所述, 这里态变量起着信息符号作用. 设 t 为系统的态变量 a 演化的时间, \dot{a} 为 t 时态变量自身变化的速率, \dot{x} 为态变量在坐标空间的传递速率. 由于动力学系统自身及作为信息符号在坐标空间传递过程中的态变量总会受到内外随机噪声的干扰, \dot{a} 与 \dot{x} 都由漂移变化速率和涨落变化速率两部分组成.

根据随机理论, 描述在系统之外的坐标空间传递的动力学系统的态变量的概率密度 $p(a, x, t)$ 的演化方程应是下述 Fokker-Planck 方程 [6-9]

$$\frac{\partial p(a, x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} [K(a)p(a, x, t)] - v \frac{\partial p(a, x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} [B(a)p(a, x, t)] + Q \frac{\partial^2 p(a, x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

这里, $K(a)$ 是态变量自身的漂移变化速率, $B(a)$ 是其噪声强度或扩散系数, 两者都由动力学系统的运动规律和环境因素决定; v 是态变量即信息符号在坐标空间的漂移传递速率, Q 是其噪声强度或扩散系数. $p(a, x, t) da dx$ 为 t 时在 a 和 $a + da$ 间的态变量传递到空间坐标 x 和 $x + dx$ 间的概率. 需要强调, 这里 a 是系统的态变量, 属于系统内部; x 表示态变量作为信息符号在坐标空间传递到达之处, 属于系统外部. 两者互不相同. 显然, $p(a, x, t) da dx$ 应满足归一化条件

$$\int p(a, x, t) da dx = 1.$$

方程 (1) 就是所给出的随机动力学系统的态变量概率密度的演化方程或信息符号演化方程. 它的物理意义为: 动力学系统的态变量即信息符号的概率密度随时间的变化率是由其在态变量空间和坐标空间的漂移和扩散引起的. 若已知 $K(a)$, $B(a)$, v 和 Q , 就可以由方程 (1) 解出 $p(a, x, t)$.

信息熵, 是 Shannon 将统计物理中的 Boltzmann 熵移植到了信息理论中, 虽然在数学形式上除了 Boltzmann 常数 k 外, 两者相同, 且都用熵的名称, 然而其物理意义却有所不同. Boltzmann 熵与热力学熵一样, 都是系统中不可再用于做功的无效能的度量. 而信息熵则是信息量的度量, 它也可用来表示自然和社会系统的无序度, 但却与能量无关. 本文所讨论的各系统的熵, 其物理意义都属于信息熵. 正因如此, 在统计物理中, 所有熵公式和熵方程 [如后文公式 (20), (20a), (36), (36a) 和方程 (25), (27), (31), (38) 等] 内应有的 Boltzmann 常数 k , 本文全都删去. 熵公式和熵方程如此, 对应的信息公式和信息方程亦当如此, 因而本文不出现 Boltzmann 常数 k .

根据信息理论及与非平衡态统计物理熵的对应关系, 动力学系统演化 t 时的动态信息熵可定义为 [6-9]

$$S(t) = -\int p(a, x, t) \log \frac{p(a, x, t)}{p_m(a, x)} da dx + S_m = \int S_{ax}(t) da dx + S_m, \quad (2)$$

式中, $p_m = p_m(a, x)$ 为信息熵达最大值 S_m 时的概率密度, 物理学中叫平衡态概率密度, 满足方程

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} (K p_m) - v \frac{\partial p_m}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} (B p_m) + Q \frac{\partial^2 p_m}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

其中

$$S_{ax}(t) = -p(a, x, t) \log \frac{p(a, x, t)}{p_m(a, x)}, \quad (4)$$

是单位坐标空间和单位态变量空间的信息熵密度. 由于 $\Delta S(t) = S(t) - S_m$ 是相对熵, 故严格言之, $S_{ax}(t)$ 应叫相对信息熵密度.

将 (2) 式两边对时间 t 求偏导数, 并代入态变量演化方程 (1) 和 (3), 则可求得动态信息熵密度 $S_{ax}(t)$ 的演化方程 [8]:

$$\frac{\partial S_{ax}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} (K S_{ax}) - v \frac{\partial S_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} (B S_{ax}) + Q \frac{\partial^2 S_{ax}}{\partial x^2} + \frac{B}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right) S_{ax} - \frac{\partial S_{ax}}{\partial a} \right]^2 + \frac{Q}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) S_{ax} - \frac{\partial S_{ax}}{\partial x} \right]^2, \quad (5)$$

动态信息熵产生密度

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_x$$

$$= Bp \left(\frac{\partial}{\partial a} \log \frac{p}{p_m} \right)^2 + Qp \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{p}{p_m} \right)^2, \quad (6)$$

这就是演化方程 (5) 右边的最后两项.

将 (5) 式两边分别对 a 和 x 积分, 则得到单位坐标空间动态信息熵密度 $S_x(t)$ 和单位态变量空间信息熵密度 $S_a(t)$ 的演化方程分别为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_x}{\partial t} \\ &= -v \frac{\partial S_x}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} \\ &+ \int \frac{B}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right) S_{ax} - \frac{\partial S_{ax}}{\partial a} \right]^2 da \\ &+ \int \frac{Q}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) S_{ax} - \frac{\partial S_{ax}}{\partial x} \right]^2 dx, \quad (7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_a}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial a} (AS_a) + \frac{\partial^2}{\partial a^2} (BS_a) \\ &+ \int \frac{B}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right) S_{ax} - \frac{\partial S_{ax}}{\partial a} \right]^2 dx \\ &+ \int \frac{Q}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) S_{ax} - \frac{\partial S_{ax}}{\partial x} \right]^2 dx, \quad (7b) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \int S_{ax}(t) da, \\ S_a(t) &= \int S_{ax}(t) dx. \end{aligned}$$

在得到方程 (7a) 和 (7b) 时利用了 S_{ax} 及其导数在 $a \rightarrow \pm\infty$ 和 $x \rightarrow \pm\infty$ 时都为零的边界条件. 由于方程 (5), (7a), (7b) 右边仍存在概率密度 $p = p(a, x, t)$, 故它们都不是封闭的.

在演化方程 (5) 中, 态变量仅有一个且在一维坐标空间中传递. 若动力学系统的状态由 n 个态变量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 描述, 且它们作为信息符号在三维坐标空间 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 中传递, 则动态信息熵密度演化方程为^[6,8,9]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_{\mathbf{ax}}}{\partial t} \\ &= -\sum_i \frac{\partial}{\partial a_i} [K_i(\mathbf{a}) S_{\mathbf{ax}}] - \sum_k v_k \frac{\partial S_{\mathbf{ax}}}{\partial x_k} \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial a_j} [B_{ij}(\mathbf{a}) S_{\mathbf{ax}}] + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 S_{\mathbf{ax}}}{\partial x_k^2} \\ &+ \sum_{i,j} \frac{B_{ij}(\mathbf{a})}{p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_i} \log p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \right) S_{\mathbf{ax}} \right. \\ &\left. - \frac{\partial S_{\mathbf{ax}}}{\partial a_i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_j} \log p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \right) S_{\mathbf{ax}} - \frac{\partial S_{\mathbf{ax}}}{\partial a_j} \right] \\ &+ \sum_k \frac{Q_k}{p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \log p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \right) S_{\mathbf{ax}} \right. \\ &\left. - \frac{\partial S_{\mathbf{ax}}}{\partial x_k} \right]^2, \quad (8) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} & \int p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{a} d\mathbf{x} \\ &= \int p(a_1, a_2, \dots, a_n; x_1, x_2, x_3; t) \\ &\quad \times da_1 da_2 \dots da_n dx_1 dx_2 dx_3 = 1, \end{aligned}$$

动态信息熵密度为

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{ax}} &= S_{\mathbf{ax}}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \\ &= -p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \log \frac{p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)}{p_m(\mathbf{a}, \mathbf{x})}, \quad (9) \end{aligned}$$

v_k 和 Q_k 分别为信息符号在三维坐标空间的漂移传递速率和扩散系数.

方程 (5), (8) 就是随机动力学系统的动态信息熵演化方程. 它们表明: 当作为信息之源的随机动力学系统的信息在系统之外的坐标空间传递时, 它的动态信息熵密度随时间的变化率是由其在系统内部的态变量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和产生三者引起的. 信息熵扩散和产生同时发生, 都来自随机噪声干扰.

由于信息熵表示系统的无序度, 故演化方程 (5), (8) 就是描述随机动力学系统的无序度密度随时间、态变量空间和坐标空间变化的非线性演化方程.

只要知道了 $K(a)$, $B(a)$, v 和 Q , 原则上就可由动态熵演化方程 (5), (7a), (7b), (8) 解得 $S_{\mathbf{ax}}(t)$, $S_x(t)$ 和 $S_a(t)$, 但由于 (5), (7a), (7b), (8) 式是个复杂的非封闭的非线性偏微分方程, 严格的求解是较为困难的. 非封闭的原因, 则来自信息熵产生密度 (6) 式不能完全由信息熵密度表述而使概率密度 p 不出现. 下述动态信息演化方程 (13), (15a), (15b), (16) 同样是非封闭的, 其原因则来自信息耗损密度 (14) 式不能由信息密度表述而使概率密度 p 不出现.

信息, 原是通信中信息量的简称, 它又可用来表示自然和社会系统的有序度, 信息密度则表示系统的有序度密度.

根据信息论, 动力学系统演化 t 时的动态信息

可定义为^[6,8,9]

$$\begin{aligned} I(t) &= S_m - S(t) \\ &= \int p(a, x, t) \log \frac{p(a, x, t)}{p_m(a, x)} da dx \\ &= \int I_{ax}(t) da dx, \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$I_{ax}(t) = p(a, x, t) \log \frac{p(a, x, t)}{p_m(a, x)}, \quad (11)$$

为单位坐标空间和单位态变量空间的(相对)信息密度. (10)式实际上就是Kullback信息^[1,6].

由(10), (2)式和(11), (4)式得

$$I(t) + S(t) = S_m, \quad (12a)$$

或

$$I_{ax}(t) + S_{ax}(t) = 0, \quad (12b)$$

即动力学系统的信息(密度)与熵(密度)各自虽都不守恒,但两者之和却守恒.

将(12b)式代入方程(5),则得到动态信息密度 $I_{ax}(t)$ 的演化方程^[8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ax}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial a}(KI_{ax}) - v \frac{\partial I_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial a^2}(BI_{ax}) \\ &+ Q \frac{\partial^2 I_{ax}}{\partial x^2} - \frac{B}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial a} \right]^2 \\ &- \frac{Q}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial x} \right]^2, \end{aligned} \quad (13)$$

信息耗损密度

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_a + \rho_x \\ &= -Bp \left(\frac{\partial}{\partial a} \log \frac{p}{p_m} \right)^2 \\ &- Qp \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{p}{p_m} \right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

将(13)式两边分别对 a 和 x 积分,则得到单位坐标空间动态信息密度 $I_x(t)$ 和单位态变量空间动态信息密度 $I_a(t)$ 的演化方程分别为

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_x}{\partial t} &= -v \frac{\partial I_x}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 I_x}{\partial x^2} \\ &- \int \frac{B}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial a} \right]^2 da \\ &- \int \frac{Q}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial x} \right]^2 da, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_a}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial a}(AI_a) + \frac{\partial^2}{\partial a^2}(BI_a) \\ &- \int \frac{B}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial a} \right]^2 dx \\ &- \int \frac{Q}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial x} \right]^2 dx, \end{aligned} \quad (15b)$$

其中,

$$I_x(t) = \int I_{ax} da,$$

$$I_a(t) = \int I_{ax} dx.$$

与方程(8)相对应,若动力学系统的状态由 n 个态变量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 描述,且它们作为信息符号在三维坐标空间 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 中传递,则动态信息密度演化方程为^[6,8,9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ax}}{\partial t} &= -\sum \frac{\partial}{\partial a_i} [K_i(\mathbf{a}) I_{ax}] - \sum_k v_k \frac{\partial I_{ax}}{\partial x_k} \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial a_j} [B_{ij}(\mathbf{a}) I_{ax}] + \sum_l Q_k \frac{\partial^2 I_{ax}}{\partial x_k^2} \\ &- \sum_{i,j} \frac{B_{ij}(\mathbf{a})}{p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_i} \log p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial a_i} \right] \\ &\times \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_j} \log p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial a_j} \right] \\ &- \sum_k \frac{Q_k}{p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \log p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \right) I_{ax} - \frac{\partial I_{ax}}{\partial x_k} \right]^2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中动态信息密度为

$$I_{ax} = I_{ax}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) = p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) \log \frac{p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)}{p_m(\mathbf{a}, \mathbf{x})}. \quad (17)$$

方程(13), (16)就是随机动力学系统的动态信息演化方程.两者表明:动态信息密度随时间的变化率是由其在系统内部的态变量空间和传递过程中的坐标空间的漂移、扩散和耗损三者引起的.

若系统的态变量自身不变化,但却仅在坐标空间随机扩散传递而无漂移传递,即方程(1)中 $K = 0, B = 0, \nu = 0, p(a, x, t) = p(x, t)\delta(a - a_0)$,则由方程(13)和(17)式得到单位坐标空间动态信

息密度的演化方程就简化为

$$\frac{\partial I_x}{\partial t} = Q \frac{\partial^2 I_x}{\partial x^2} - \frac{Q}{p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) I_x - \frac{\partial I_x}{\partial x} \right]^2, \quad (18)$$

即动态信息密度随时间的变化率仅是由其在坐标空间的扩散和耗损两者共同引起的. 注意, 这里的 $p = p(x, t)$. 由于信息扩散和耗损的共同起源是态变量在空间的随机变化, 故两者是否发生是同时的, 有信息扩散就有信息耗损. 这就使得信息演化方程 (18) 与质量扩散方程不同, 不能变成只有扩散而无耗损的单纯信息扩散方程. 原因是质量和能量是守恒的, 而信息与熵各自都不守恒(但信息与熵之和守恒).

由于信息密度表示系统的有序度密度, 故演化方程 (13) 和 (16) 就是表述随机动力学系统的有序度密度随时间、态变量空间和坐标空间变化的非线性演化方程.

因为存在着信息和信息熵的扩散、耗损或产生, 动态信息演化方程和动态信息熵演化方程 (13), (16) 和 (5), (8) 是时间反演不对称的, 反映了这种演化过程的不可逆性.

从上述各个演化方程可以看出, 只有动态信息熵演化方程 (5) 和动态信息演化方程 (13) 是基本的, 两者正是动态统计信息理论的基本方程和核心. 所有其他各种结果都是由此两方程推导出的, 方程 (8) 和 (16) 则是此两方程推广到 n 个态变量在三维空间传递的动力学系统的结果. 而得到方程 (5) 和 (13) 则基于两点: 一是态变量概率密度演化方程看成信息符号演化方程; 二是动态熵和动态信息的定义. 此外, 不需任何其他假设. 由于存在着信息与熵之和守恒的关系式 (12), 从演化方程 (5) 和 (13) 中的一个就可推导出另一个, 故这两个演化方程中只有一个是基本的. 需要指出, 此论断对下述各动力学系统都同样适用. 鉴于信息是信息科学中的最基本概念和研究对象, 为了突出它, 我们把动态信息演化方程作为动态信息理论的基本方程.

若系统处于静态或平衡态, 则上述演化方程 (5) 和 (13) 中的信息熵密度和信息密度仅是态变量 a 的函数, 不随时间 t 和空间 x 变化, 信息熵产生和信息耗损亦等于零. 可见现有 Shannon 静态统计信息理论可看成是动态统计信息理论与时空过程无关的一个特殊部分.

应该强调指出, 系统理论中一个长期待解决

的重要问题是如何能将信息引入系统并用它阐述系统问题. 从信息熵和信息定义 (2) 和 (10) 式到动态信息熵和动态信息演化方程 (5) 和 (13) 可以看出, 信息熵和信息已与系统状态 (a) 及其运动规律 ($K(a)$ 和 $B(a)$) 结合在一起, 信息熵产生、信息耗损已是动力学系统的基本特性, 信息熵演化和信息演化是动力学系统的无序度和有序度演化的显示, 而信息流和信息熵流则是沟通系统内部及系统与其环境间的桥梁. 系统是信息之源, 信息是系统, 特别是生命系统的核心. 此处关于信息和熵与系统结合在一起的论断, 下述各动力学系统同样适用, 不再重复.

还需指出, 为了与现有的静态信息理论^[1-3]完全对应, 动力学系统演化 t 时的动态信息熵 (2) 式和动态信息 (10) 式应定义为

$$\begin{aligned} S(t) &= - \int p(a, x, t) \log p(a, x, t) da dx \\ &= \int S_{ax}(t) da dx, \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= S_m - S(t) \\ &= S_m + \int p(a, x, t) \log p(a, x, t) da dx \\ &= S_m + \int I_{ax}(t) da dx, \end{aligned} \quad (10a)$$

其中,

$$S_{ax}(t) = -p(a, x, t) \log p(a, x, t), \quad (4a)$$

$$I_{ax}(t) = p(a, x, t) \log p(a, x, t). \quad (11a)$$

当 (2a) 和 (10a) 式与 t 和 x 无关时, 两者就还原成静态熵和静态信息.

(2a) 和 (10a) 式与 (2) 和 (10) 式的形式虽稍不同, 但两者同样通用. 更重要的是, 当 K 和 B 为与 a 无关的常数时, (2a) 式中的动态信息熵密度 $S_{ax}(t)$ 和 (10a) 式中的动态信息密度 $I_{ax}(t)$ 所遵守的演化方程与 (5) 和 (13) 式相同 (否则将有包含 $\frac{\partial K}{\partial a} \neq 0$ 和 $\frac{\partial^2 B}{\partial a^2} \neq 0$ 的项出现), 差别是与 (6) 和 (14) 式对应的信息熵产生率密度和信息耗损率密度为

$$\sigma = Bp \left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right)^2 + Qp \left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right)^2, \quad (6a)$$

$$\rho = -Bp \left(\frac{\partial}{\partial a} \log p \right)^2 - Qp \left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right)^2. \quad (14a)$$

与 (6a) 和 (14a) 相比, (6) 和 (14) 式的优点是在平衡态 $p = p_m$ 的信息熵产生和信息耗损都自动

为零, 不需另加条件; 而用 (6a) 和 (14a) 式时, 则需 $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_{p_m} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{p_m} = 0$ 才可使平衡态的信息熵产生和信息耗损为零. 一般而言, 这种要求并不合理. 这就是为何本文的动态信息熵和动态信息的定义采用 (2) 和 (10) 式的原因.

最后顺便指出, Shannon 只定义了熵, 并未定义信息, 而 Wiener^[4] 则定义了信息. 当 $S_m = 0$ 且 p 与时空无关时, (10a) 式就还原为 Wiener 的静态信息. 它与 Shannon 的静态熵之和为零, 即信息为熵的负数.

2.2 经典非平衡态统计物理系统

这种系统是由 N 个微观粒子(原子分子)组成的, 遵守经典统计物理规律, 描述它的状态的则是 $6N$ 维相空间的状态向量. 当它作为信息符号在系统之外的坐标空间 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 中传递时, 它的系综概率密度 ρ 的演化方程则是下述时间反演不对称的方程^[8,9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] - \sum_k \nu_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}}^2 \rho + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k^2}, \quad (19)$$

其中, $H = H(\mathbf{X})$ 为系统的 Hamilton 函数; $\mathbf{X} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 为 $6N$ 维相空间的状态向量; \mathbf{q} 和 \mathbf{p} 为一组向量 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N)$ 和 $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$, \mathbf{q}_i 和 \mathbf{p}_i 为第 i 个粒子的位置和动量; $\dot{\mathbf{X}} = (\nabla_{\mathbf{p}} H, -\nabla_{\mathbf{q}} H)$ 为状态向量自身的漂移变化速度, 满足 $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H - \nabla_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} H = 0$, $-\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} \rho) = [H, \rho]$; D 为粒子的扩散系数; ν_k 和 Q_k 的物理意义与方程 (8) 中的相同. $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{X} d\mathbf{x}$ 为 t 时在 \mathbf{X} 和 $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ 间的状态向量传递到空间坐标 \mathbf{x} 和 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ 间的概率. 注意, 这里 \mathbf{X} 表示系统自身的状态向量, 属于系统内部; 在研究信息传递时, 系统是作为信息即信息符号之源, 而 \mathbf{x} 则表示系统的状态向量作为信息符号在坐标空间传递到达之处, 属于系统外部. 因而两者物理意义不同. 方程 (1) 中的态变量 a 和空间坐标 \mathbf{x} 两者的物理意义亦是这样的互不相同. 显然 $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{X} d\mathbf{x}$ 应满足归一化条件 $\int \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{X} d\mathbf{x} = 1$. 方程 (19) 就是 N 个粒子组成的非平衡态统计物理系统的状态向量的概率密度演化方程或信息符号演化方程. 它的物理意义为: 非平衡态统计物理系统的状态向量

即信息符号的概率密度随时间的变化率来自其在相空间的漂移和位置子空间的扩散以及坐标空间的漂移和扩散传递.

与定义 (2) 和 (10) 式相同, 经典非平衡态统计物理系统演化 t 时的 $6N$ 维动态熵和动态信息可定义为

$$S_B(t) = - \int \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \frac{\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{X}, \mathbf{x})} d\Gamma d\mathbf{x} + S_{B0} = \int S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) d\Gamma d\mathbf{x} + S_{B0}, \quad (20)$$

其中

$$S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) = -\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \frac{\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{X}, \mathbf{x})}. \quad (21)$$

或

$$S_B(t) = - \int \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) d\Gamma d\mathbf{x} = \int S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) d\Gamma d\mathbf{x}, \quad (20a)$$

其中

$$S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) = -\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t). \quad (21a)$$

$$I_B(t) = S_{B0} - S_B(t) = \int \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \frac{\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{X}, \mathbf{x})} d\Gamma d\mathbf{x} = \int I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) d\Gamma d\mathbf{x}, \quad (22)$$

其中

$$I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) = \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \frac{\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{X}, \mathbf{x})}. \quad (23)$$

或

$$I_B(t) = \int \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) d\Gamma d\mathbf{x} + S_{B0} = \int I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) d\Gamma d\mathbf{x} + S_{B0}, \quad (22a)$$

其中

$$I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) = \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \ln \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t). \quad (23a)$$

这里, $S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t)$ 和 $I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t)$ 为 t 时单位 $6N$ 维相空间和单位坐标空间的动态熵密度和动态信息密度, ρ_0 和 S_{B0} 各为平衡态的系综概率密度和熵.

由 (20), (22) 式及 (21), (23) 式得

$$I_B(t) + S_B(t) = S_{B0},$$

或

$$I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) + S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}(t) = 0, \quad (24)$$

即非平衡态统计物理系统的动态信息(密度)和动态熵(密度)之和为常数.

与导出方程(5)和(13)的方法相同, 可得6N维动态熵演化方程和6N维动态信息演化方程为^[8,9]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}) \\ & - \sum_k \nu_k \frac{\partial S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}}^2 S_{\mathbf{X}\mathbf{x}} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ & + \frac{D}{\rho} [(\nabla_{\mathbf{q}} \ln \rho) S_{\mathbf{X}\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}]^2 \\ & + \sum_k \frac{Q_k}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln \rho \right) S_{\mathbf{X}\mathbf{x}} - \frac{\partial S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}) - \sum_k \nu_k \frac{\partial I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}}^2 I_{\mathbf{X}\mathbf{x}} \\ & + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial x_k^2} - \frac{D}{\rho} [(\nabla_{\mathbf{q}} \ln \rho) I_{\mathbf{X}\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}} I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}]^2 \\ & - \sum_k \frac{Q_k}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln \rho \right) I_{\mathbf{X}\mathbf{x}} - \frac{\partial I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2, \quad (26) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}) &= [H, I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}], \\ -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}) &= [H, S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}]. \end{aligned}$$

同样, 与Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY) 扩散方程链中单粒子概率密度演化方程作为信息符号演化方程相对应, 可得6维动态熵演化方程和6维动态信息演化方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\nabla_{\mathbf{q}_1} \cdot (V_1 S_{\xi_1 \mathbf{x}}) - \nabla_{\mathbf{p}_1} \cdot (\mathbf{F}_1 S_{\xi_1 \mathbf{x}}) \\ & - \sum_k \nu_k \frac{\partial S_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}_1}^2 S_{\xi_1 \mathbf{x}} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 S_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ & + \frac{D}{f_1} [(\nabla_{\mathbf{q}_1} \ln f_1) S_{\xi_1 \mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}_1} S_{\xi_1 \mathbf{x}}]^2 \\ & + \sum_k \frac{Q_k}{f_1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln f_1 \right) S_{\xi_1 \mathbf{x}} - \frac{\partial S_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2 \\ & + \lambda_1(\phi), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\nabla_{\mathbf{q}_1} \cdot (V_1 I_{\xi_1 \mathbf{x}}) - \nabla_{\mathbf{p}_1} \cdot (\mathbf{F}_1 I_{\xi_1 \mathbf{x}}) \\ & - \sum_k \nu_k \frac{\partial I_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}_1}^2 I_{\xi_1 \mathbf{x}} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 I_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ & - \frac{D}{f_1} [(\nabla_{\mathbf{q}_1} \ln f_1) I_{\xi_1 \mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}_1} I_{\xi_1 \mathbf{x}}]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_k \frac{Q_k}{f_1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln f_1 \right) I_{\xi_1 \mathbf{x}} - \frac{\partial I_{\xi_1 \mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2 \\ & - \lambda_1(\phi), \quad (28) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{p}_1/m$ 为粒子速度, \mathbf{F}_1 为作用于粒子的外力, $f_1 = f_1(\xi_1, \mathbf{x}, t) = f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; \mathbf{x}, t)$ 为 t 时的6维状态向量 $\xi_1 = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ 作为信息符号传递到空间坐标 \mathbf{x} 和 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ 间的概率密度. $I_{\xi_1 \mathbf{x}}(t)$ 和 $S_{\xi_1 \mathbf{x}}(t)$ 为 t 时单位6维相空间和单位坐标空间的动态信息密度和动态熵密度, 其定义为

$$\begin{aligned} I_{\xi_1 \mathbf{x}}(t) &= -S_{\xi_1 \mathbf{x}}(t) \\ &= f_1(\xi_1, \mathbf{x}, t) \ln \frac{f_1(\xi_1, \mathbf{x}, t)}{f_{10}(\xi_1, \mathbf{x})}, \quad (29) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \lambda_1(\phi) &= N \int (\nabla_{\mathbf{q}_1} \phi_{12}) \cdot \left[(\nabla_{\mathbf{p}_1} f_{20}) \frac{f_1}{f_{10}} \right. \\ & \left. - (\nabla_{\mathbf{p}_1} f_2) \left(1 + \ln \frac{f_1}{f_{10}} \right) \right] d\xi_2, \quad (30) \end{aligned}$$

为两粒子相互作用位能 $\phi_{12} = \phi(|q_1 - q_2|)$ 引发的6维动态信息密度和6维动态熵密度的变化率.

以此类推, 与BBGKY扩散方程链中两粒子概率密度演化方程作为信息符号演化方程相对应, 可得12维动态熵演化方程和12维动态信息演化方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i} \cdot (V_i S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}) - \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{p}_i} \cdot (\dot{\mathbf{p}}_i S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}) \\ & - \sum_k \nu_k \frac{\partial S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i}^2 S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} \\ & + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{D}{f_2} [(\nabla_{\mathbf{q}_i} \ln f_2) S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}_i} S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}]^2 \\ & + \sum_k \frac{Q_k}{f_2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln f_2 \right) S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} - \frac{\partial S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2 \\ & + \lambda_2(\phi), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i} \cdot (V_i I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}) - \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{p}_i} \cdot (\dot{\mathbf{p}}_i I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}) \\ & - \sum_k \nu_k \frac{\partial I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i}^2 I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\
 & - \sum_{i=1}^2 \frac{D}{f_2} [(\nabla_{\mathbf{q}_i} \ln f_2) I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}_i} I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}]^2 \\
 & - \sum_k \frac{Q_k}{f_2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln f_2 \right) I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} - \frac{\partial I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2 \\
 & - \lambda_2(\phi), \tag{32}
 \end{aligned}$$

其中, $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i - \nabla_{\mathbf{q}_i} \phi_{ij}$ 为作用于第 i 个粒子的外力 \mathbf{F}_i 和两体相互作用力 $-\nabla_{\mathbf{q}_i} \phi_{ij}$ 之代数和, $f_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \mathbf{x}, t)$ 为 t 时的 12 维状态向量 (ξ_1, ξ_2) 作为信息符号传递到空间坐标 \mathbf{x} 和 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ 间的概率密度. $I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}(t)$ 和 $S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}}(t)$ 为 t 时单位 12 维相空间和单位坐标空间的动态信息密度和动态熵密度, 其定义为

$$I_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} = -S_{\xi_1 \xi_2 \mathbf{x}} = f_2 \ln(f_2/f_{20}). \tag{33}$$

而

$$\begin{aligned}
 \lambda_2(\phi) = N \int \sum_{i=1}^2 (\nabla_{\mathbf{q}_i} \phi_{i3}) \cdot \left[(\nabla_{\mathbf{p}_3} \phi_{i3}) \frac{f_2}{f_{20}} \right. \\
 \left. - (\nabla_{\mathbf{p}_i} f_3) \left(1 + \ln \frac{f_2}{f_{20}} \right) \right] d\xi_3, \tag{34}
 \end{aligned}$$

为两粒子相互作用位能 $\phi_{i3} = \phi(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_3|)$ 引发 12 维动态信息密度和 12 维动态熵密度的变化率.

演化方程 (25), (26) 与 (27), (28) 及 (31), (32) 之间的差别在于: 前者为 $6N$ 维相空间的, 通常 $N \approx 10^{23}$, 故只有基本理论意义, 难以实际应用; 后二者为 6 维和 12 维相空间的, 可以实际应用. 非平衡态统计物理中的基本方程与动力学方程的区别亦是如此. 这里顺便指出, 在统计物理中, 习惯将动态叫非平衡态, 静态叫平衡态. 在信息理论中, 为了统一, 我们将非平衡态叫动态.

由于熵(密度)表示系统的无序度(密度), 信息(密度)表示系统的有序度(密度), 故演化方程 (25), (27), (31) 和 (26), (28), (32) 就是描述非平衡态统计物理系统在其演化过程中的无序度密度和有序度密度随时间、相空间和坐标空间变化的非线性演化方程.

演化方程 (25), (27), (31) 和 (26), (28), (32) 的物理意义, 留待下节一并讨论.

2.3 量子非平衡态统计物理系统

这种系统与经典非平衡态统计物理系统的差别是其内部粒子遵守量子力学规律, 它所对应的动

态信息可称之为量子动态信息. 与经典非平衡态统计物理系统的信息符号演化方程 (19) 相对应, 在坐标空间传递的量子动态信息符号演化方程就是下述量子方程 [9]:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] - \sum_k \nu_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}}^2 \rho \\
 + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k^2}, \tag{35}
 \end{aligned}$$

这里, ρ 为量子概率密度算符, H 为哈密顿算符. 量子泊松括号 $[H, \rho] = H\rho - \rho H$, \hbar 为普朗克常数. 对应于 $6N$ 维经典动态熵密度 (19) 式和 $6N$ 维经典动态信息密度 (21) 式, 单位 $6N$ 维相空间和单位坐标空间的量子动态熵密度 $S_{\rho \mathbf{x}}$ 和量子动态信息密度 $I_{\rho \mathbf{x}}$ 可定义为

$$S_{\rho \mathbf{x}} = -\rho \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{36}$$

$$I_{\rho \mathbf{x}} = \rho \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{37}$$

与导出 $6N$ 维经典演化方程 (25) 和 (26) 的方法相同, 可得 $6N$ 维量子动态熵演化方程和 $6N$ 维量子动态信息演化方程为

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \frac{\partial S_{\rho \mathbf{x}}}{\partial t} \\
 & = [H, S_{\rho \mathbf{x}}] - \sum_k \nu_k \frac{\partial S_{\rho \mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}}^2 S_{\rho \mathbf{x}} \\
 & + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 S_{\rho \mathbf{x}}}{\partial x_k^2} + \frac{D}{\rho} [(\nabla_{\mathbf{q}} \ln \rho) S_{\rho \mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}} S_{\rho \mathbf{x}}]^2 \\
 & + \sum_k \frac{Q_k}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln \rho \right) S_{\rho \mathbf{x}} - \frac{\partial S_{\rho \mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2, \tag{38} \\
 & i\hbar \frac{\partial I_{\rho \mathbf{x}}}{\partial t} \\
 & = [H, I_{\rho \mathbf{x}}] - \sum_k \nu_k \frac{\partial I_{\rho \mathbf{x}}}{\partial x_k} + D \nabla_{\mathbf{q}}^2 I_{\rho \mathbf{x}} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 I_{\rho \mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\
 & - \frac{D}{\rho} [(\nabla_{\mathbf{q}} \ln \rho) I_{\rho \mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{q}} I_{\rho \mathbf{x}}]^2 \\
 & - \sum_k \frac{Q_k}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln \rho \right) I_{\rho \mathbf{x}} - \frac{\partial I_{\rho \mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2. \tag{39}
 \end{aligned}$$

在导出方程 (38) 和 (39) 时, 与导出方程 (25) 和 (26) 的不同处是其等式右边第一项量子泊松括号 $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ 与经典泊松括号不同. 尽管如此, 不难证明, 当量子概率密度算符 ρ 遵守量子 Liouville 方程 [11]

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = H\rho - \rho H = [H, \rho] \tag{40}$$

时, 可得

$$i\hbar \frac{\partial f(\rho)}{\partial t} = Hf(\rho) - f(\rho)H = [H, f(\rho)]. \quad (41)$$

其中 $f(\rho)$ 为 ρ 的函数. 当取

$$f(\rho) = \rho \ln \frac{\rho}{\rho_0} = I(\rho) (\equiv I_\rho) = -S(\rho) (\equiv -S_\rho)$$

时, 即得

$$i\hbar \frac{\partial I_\rho}{\partial t} = [H, I_\rho], \quad i\hbar \frac{\partial S_\rho}{\partial t} = [H, S_\rho], \quad (42)$$

因本文的量子概率密度 ρ 遵守方程 (35), 故得方程 (38) 和 (39).

这里仍需指出, 根据量子统计的习惯, 量子动态信息熵密度 $S_{\rho x}$ 和量子动态信息密度 $I_{\rho x}$ 通常应定义为

$$S_{\rho x} = -\rho \ln \rho, \quad (36a)$$

$$I_{\rho x} = \rho \ln \rho. \quad (37a)$$

本文所以采用 (36) 和 (37) 式而非 (36a) 和 (37a) 式, 理由与上述 2.1 节相同.

演化方程 (25), (26); (27), (28); (31), (32) 和 (38), (39) 一致表明: 当作为信息之源的非平衡统计物理系统的信息在系统之外的坐标空间传递时, 无论是经典的还是量子的, 也无论是 $6N$ 维的还是 6 维的或 12 维的, 它们的动态熵密度随时间的变化率是由在系统内部的状态向量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和产生三者引起的, 而动态信息密度随时间的变化率则是由其内部的状态向量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和耗损三者引起的. 当动态系统内部存在净相互吸引作用时, 演化方程 (27), (28) 和 (31), (32) 中的 $\lambda_1(\phi)$ 和 $\lambda_2(\phi)$ 还可能以信息产生率和熵减少率的形式出现 (详情见后面第 6 节).

2.4 电动力学系统

电动力学系统遵守确定性的电磁场运动规律, 由麦克斯韦方程描述. 经引入四维向量势 $A_\mu = A_\mu(\mathbf{A}, A_4 = \varphi)$ 和四维电荷密度 $J_\mu = J_\mu(\mathbf{J}, J_4 = c\rho)$, 则麦克斯韦方程变为

$$\nabla^2 A_\mu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} J_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad (43)$$

其中, c 为光速, ρ 为电荷密度, \mathbf{J} 为电流密度向量, \mathbf{A} 为向量势, φ 为纯量势, 需满足洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (44)$$

因为方程 (43) 是二阶微分方程, 无法由它求出动态信息演化方程. 为此仿照将二阶的牛顿动力学方程变为一阶的哈密顿方程的方法, 我们引入四维向量 L_μ , 将二阶麦克斯韦微分方程 (43) 再变成下述等价的一阶微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu}{\partial t} &= L_\mu, \\ \frac{\partial L_\mu}{\partial t} &= c^2 \nabla^2 A_\mu + 4\pi c J_\mu. \end{aligned} \quad (45)$$

这时的电动力学系统就由两个四维态变量 A_μ 和 L_μ 描述. 当它们作为信息符号在系统之外的坐标空间传递时, 其概率密度 $P = P(A_\mu, L_\mu, \mathbf{x}, t)$ 的演化方程即信息符号演化方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial A_\mu} (L_\mu P) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial L_\mu} [(c^2 \nabla^2 A_\mu + 4\pi c J_\mu) P] \\ &\quad - \sum_k \nu_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_k^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

与导出演化方程 (5) 和 (13) 的方法类似, 由信息符号演化方程 (46) 可导出电动力学系统的动态信息熵密度 $S_{E\mathbf{x}}$ 和动态信息密度 $I_{E\mathbf{x}}$ 的演化方程为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S_{E\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial A_\mu} (L_\mu S_{E\mathbf{x}}) \\ &\quad - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial L_\mu} [(c^2 \nabla^2 A_\mu + 4\pi c J_\mu) S_{E\mathbf{x}}] \\ &\quad - \sum_k \nu_k \frac{\partial S_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 S_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ &\quad + \sum_k \frac{Q_k}{P} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \log P \right) S_{E\mathbf{x}} - \frac{\partial S_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I_{E\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial A_\mu} (L_\mu I_{E\mathbf{x}}) \\ &\quad - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial L_\mu} [(c^2 \nabla^2 A_\mu + 4\pi c J_\mu) I_{E\mathbf{x}}] \\ &\quad - \sum_k \nu_k \frac{\partial I_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 I_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ &\quad - \sum_k \frac{Q_k}{P} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \log P \right) I_{E\mathbf{x}} - \frac{\partial I_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2, \end{aligned} \quad (48)$$

其中, $S_{E\mathbf{x}}$ 和 $I_{E\mathbf{x}}$ 的下角标 E 代表 A_μ, L_μ .

当电动力学系统内部的电流密度 $J_\mu = 0$ 时, 电动力学系统的动态信息熵密度演化方程 (47) 和动态信息演化方程 (48) 就变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_{E\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\mu}} (L_{\mu} S_{E\mathbf{x}}) - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial L_{\mu}} (c^2 \nabla^2 A_{\mu} S_{E\mathbf{x}}) \\ & \quad - \sum_k \nu_k \frac{\partial S_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 S_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ & \quad + \sum_k \frac{Q_k}{P} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \log P \right) S_{E\mathbf{x}} - \frac{\partial S_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I_{E\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\mu}} (L_{\mu} I_{E\mathbf{x}}) - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial L_{\mu}} (c^2 \nabla^2 A_{\mu} I_{E\mathbf{x}}) \\ & \quad - \sum_k \nu_k \frac{\partial I_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} + \sum_k Q_k \frac{\partial^2 I_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k^2} \\ & \quad - \sum_k \frac{Q_k}{P} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \log P \right) I_{E\mathbf{x}} - \frac{\partial I_{E\mathbf{x}}}{\partial x_k} \right]^2. \end{aligned} \quad (50)$$

动态信息熵演化方程和动态信息演化方程 (47), (48); (49), (50) 表明: 当作为信息之源的电动力学系统的信息在系统外部的坐标空间传递时, 它的动态信息熵密度随时间的变化率是由其在系统内部的态变量空间的漂移与传递过程的坐标空间的漂移、扩散和产生共同引起的, 而动态信息密度随时间的变化率则是由其在系统内部的态变量空间的漂移与传递过程的坐标空间的漂移、扩散和耗损共同引起的. 由此可以看出, 由于遵守确定性规律的电动力学系统内部没有随机性, 它的动态信息熵和动态信息的变化率在系统内部的态变量空间仅有漂移而无扩散和产生(耗损), 这是所有遵守确定性规律与服从随机性规律的动力学系统两者关键的差别; 而在系统之外传递过程的坐标空间的变化率则与服从随机性规律的动力学系统的相同, 都是由漂移、扩散和产生(耗损)三者引起的. 需要再次强调指出, 这里讨论的虽只是电动力学系统, 实际上, 所有遵守确定性规律的动力学系统的动态信息(熵)演化方程都可由同样的方程导出.

由以上四种动力学系统所得的动态信息熵演化方程和动态信息演化方程(5), (13); (8), (16); (25), (26); (27), (28); (31), (32); (38), (39)和(47), (48)可以看出, 它们的数学类型相同, 都是时间反

演不对称的, 而且一致表明: 对于服从随机性规律的动力学系统, 动态信息熵密度随时间的变化率是由其在系统内部的态变量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和产生三者引起的, 而动态信息密度随时间的变化率则是由其在系统内部的态变量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和耗损三者引起的. 它们间的差别则来自不同学科的各动力学系统内部运动规律的不同而表现于其态变量性质和数目及方程系数即态变量自身的漂移变化速率和扩散系数的互不相同. 对于遵守确定性规律的动力学系统, 由于系统内部缺乏随机性, 动态信息熵密度和动态信息密度在系统内部态变量空间的变化率只有漂移而无扩散和产生(耗散), 而在系统外部传递过程的坐标空间的变化率则与服从随机性规律的动力学系统的相同, 都是由漂移、扩散和产生(耗散)三者引起的.

应该指出, 上述各动态信息演化方程和动态熵演化方程的数学类型所以相同, 是因为它们都基于统一的动态信息和动态熵的定义与同一类型的态变量概率密度演化方程——广义 Fokker-Planck 方程 (Liouville 扩散方程亦可看成是 $6N$ 维相空间的一种 Fokker-Planck 方程). 若系统的态变量概率密度演化方程更为复杂如主方程等, 则其对应的动态信息演化方程和动态熵演化方程亦将比上述演化方程(5)和(13)等更为复杂. 然而, 不论系统属于什么学科, 如物理学的、化学的、生物学的及社会科学的等, 亦不论它们的态变量概率密度演化方程如何复杂, 只要它们存在, 上述推导出动态信息熵演化方程和动态信息演化方程的思路和方法都是普适的. 这就是如前所述的两个基本出发点: 一是态变量当成信息符号, 态变量概率密度演化方程就是信息符号演化方程; 二是动态信息熵和动态信息的定义. 再将两者结合. 这样, 即使得不出解析方程, 亦可给出数值结果.

这里, 我们再给动态信息演化方程一个概述: 所有客观动力学系统(如物理学的、化学的、生物学的及社会科学的等)的状态和运动规律都有其信息显示; 所有表述客观动力学系统状态和运动规律的动力学方程, 如物理方程、化学方程、生物学方程和社会科学方程等, 都有其对应的信息方程; 表述客观动力学系统的状态和运动规律及其在时空传递的信息方程就是本文的动态(统计)信息(熵)演化方程.

2.5 信息波

现在研究信息在噪声可略去的空间(如真空)中可能的传递形式. 设动力学系统的态变量只在空间传递而其自身不变化, 即方程(13)中 $K = 0$, $B = 0$, $p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)$, 则单位坐标空间动态信息密度 $I_{\mathbf{x}}(t) = \int I_{\mathbf{a}\mathbf{x}}(t)d\mathbf{a}$ 的演化方程为

$$\frac{\partial I_{\mathbf{x}}}{\partial t} = -\nu \frac{\partial I_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} + Q \frac{\partial^2 I_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{Q}{p(\mathbf{x}, t)} \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{x}, t) \right) I_{\mathbf{x}} - \frac{\partial I_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right]^2. \quad (51)$$

当空间噪声可略去时, $Q = 0$, 代入方程(51)并两边再次对时间 t 求导数, 即得

$$\frac{\partial^2 I_{\mathbf{x}}}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 I_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}^2}. \quad (52)$$

这就是信息波方程. 它表示信息在空间以波动形式传递, 其传递速度 ν 既可是光速, 又可是声速. 应该指出, 信息波传递的仅是系统的状态和运动规律, 本身不伴随能量传递, 因而有别于同时传递状态和能量的电磁波等物理波.

还需指出, 信息波方程(52)虽然得自随机动力学系统, 不难证明, 其结果对上述各动力学系统都是普适的.

3 物理学方程的信息表述

物理学系统, 其变化规律通常由物理学方程表述, 如经典力学的牛顿运动方程、电动力学的麦克斯韦方程、量子力学的薛定谔方程、统计物理的Liouville扩散方程、随机动力学系统的Fokker-Planck方程或主方程等. 现在要讨论的问题是: 物理学系统的演化规律是否亦可统一由信息方程表述? 换言之, 表述各物理学系统变化规律的物理学方程可否和如何转换成对应的信息方程? 这样做的结果, 可称之为物理学方程的信息化, 或物理学方程的信息表述, 从而可用信息概念阐述物理学问题, 把系统的演化过程抽象为信息的演化过程. 为了达到此目的并与上节对应, 我们仍从上节四种物理学系统进行讨论, 而其方法则可归结为: 上节物理学系统的信息要在系统之外的坐标空间传递, 故动态信息演化方程不仅随系统内部的态变量变化, 而且还随系统之外的空间坐标变化. 本节目的在于用信息方程描述物理学系统的演化规律, 不考虑信息在系统

之外的坐标空间传递, 因而各对应的信息方程仅随系统内部的态变量变化, 而与系统之外的空间坐标无关. 简言之, 当上节各物理学系统的概率密度不随系统之外的空间坐标变化时, 各动态信息演化方程中就不再出现系统之外的空间坐标及有关项, 它们就是本节需要的信息方程.

3.1 随机动力学系统

随机动力学系统, 其演化规律可由Fokker-Planck方程描述. 对于 n 个态变量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的系统, 演化方程为

$$\frac{\partial p(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a_i} [K_i(\mathbf{a}) p(\mathbf{a}, t)] + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} [B_{ij}(\mathbf{a}) p(\mathbf{a}, t)]. \quad (53)$$

显然, 当系统的概率密度

$$p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) = p(\mathbf{a}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

时, 方程(1)就变成方程(53). 与此方程相对应, 动态信息演化方程(16)和动态熵演化方程(8)就变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I_{\mathbf{a}}}{\partial t} \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a_i} [K_i(\mathbf{a}) I_{\mathbf{a}}] + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} [B_{ij}(\mathbf{a}) I_{\mathbf{a}}] \\ & \quad - \sum_{i,j=1}^n \frac{B_{ij}(\mathbf{a})}{p(\mathbf{a}, t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_i} \log p(\mathbf{a}, t) \right) I_{\mathbf{a}} - \frac{\partial I_{\mathbf{a}}}{\partial a_i} \right] \\ & \quad \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_j} \log p(\mathbf{a}, t) \right) I_{\mathbf{a}} - \frac{\partial I_{\mathbf{a}}}{\partial a_j} \right], \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_{\mathbf{a}}}{\partial t} \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a_i} [K_i(\mathbf{a}) S_{\mathbf{a}}] + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} [B_{ij}(\mathbf{a}) S_{\mathbf{a}}] \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n \frac{B_{ij}(\mathbf{a})}{p(\mathbf{a}, t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_i} \log p(\mathbf{a}, t) \right) S_{\mathbf{a}} - \frac{\partial S_{\mathbf{a}}}{\partial a_i} \right] \\ & \quad \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_j} \log p(\mathbf{a}, t) \right) S_{\mathbf{a}} - \frac{\partial S_{\mathbf{a}}}{\partial a_j} \right], \quad (55) \end{aligned}$$

其中, $I_{\mathbf{a}}$ 和 $S_{\mathbf{a}}$ 为单位 n 维态变量空间的动态信息密度和动态熵密度, 其定义用 $p(\mathbf{a}, t)$ 取代(11)和(4)式中的 $p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)$ 即得, 或由(11)和(4)式经由 $I_{\mathbf{a}} = \int I_{\mathbf{a}\mathbf{x}} d\mathbf{x}$ 和 $S_{\mathbf{a}} = \int S_{\mathbf{a}\mathbf{x}} d\mathbf{x}$ 求得.

3.2 经典非平衡态统计物理系统

经典非平衡态统计物理系统的宏观行为和演化规律可由下述 $6N$ 维相空间的时间反演不对称的 Liouville 扩散方程描述:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= [H, \rho] + D \nabla_q^2 \rho \\ &= -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} \rho) + D \nabla_q^2 \rho, \end{aligned} \quad (56)$$

其中系综概率密度 $\rho = \rho(\mathbf{X}, t)$. 这个方程, 是十多年前由作者^[12-14]提出的, 以取代现有的时间反演对称的 Liouville 方程, 作为经典非平衡态统计物理基本方程. 显然, 当系统的概率密度 $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{X}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 时, 方程(19)就变成方程(56). 与此方程相对应, $6N$ 维动态信息演化方程(26)和 $6N$ 维动态熵演化方程(25)就变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{X}}}{\partial t} &= -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} I_{\mathbf{X}}) + D \nabla_q^2 I_{\mathbf{X}} \\ &\quad - \frac{D}{\rho} [(\nabla_q \ln \rho) I_{\mathbf{X}} - \nabla_q I_{\mathbf{X}}]^2, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\mathbf{X}}}{\partial t} &= -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} S_{\mathbf{X}}) + D \nabla_q^2 S_{\mathbf{X}} \\ &\quad + \frac{D}{\rho} [(\nabla_q \ln \rho) S_{\mathbf{X}} - \nabla_q S_{\mathbf{X}}]^2, \end{aligned} \quad (58)$$

其中, $-\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} I_{\mathbf{X}}) = [H, I_{\mathbf{X}}]$, $-\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} S_{\mathbf{X}}) = [H, S_{\mathbf{X}}]$, $I_{\mathbf{X}}$ 和 $S_{\mathbf{X}}$ 为单位 $6N$ 维相空间的动态信息密度和动态熵密度, 其定义可参考(54)和(55)式中的 I_a 和 S_a .

同样, 6 维动态信息演化方程(28)和 6 维动态熵演化方程(27)变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\xi_1}}{\partial t} &= -\nabla_{\mathbf{q}_1} \cdot (\mathbf{V}_1 I_{\xi_1}) - \nabla_{\mathbf{p}_1} \cdot (\mathbf{F}_1 I_{\xi_1}) + D \nabla_{\mathbf{q}_1}^2 I_{\xi_1} \\ &\quad - \frac{D}{f_1} [(\nabla_{\mathbf{q}_1} \ln f_1) I_{\xi_1} - \nabla_{\mathbf{q}_1} I_{\xi_1}]^2 \\ &\quad - \lambda_1(\phi), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\xi_1}}{\partial t} &= -\nabla_{\mathbf{q}_1} \cdot (\mathbf{V}_1 S_{\xi_1}) - \nabla_{\mathbf{p}_1} \cdot (\mathbf{F}_1 S_{\xi_1}) + D \nabla_{\mathbf{q}_1}^2 S_{\xi_1} \\ &\quad + \frac{D}{f_1} [(\nabla_{\mathbf{q}_1} \ln f_1) S_{\xi_1} - \nabla_{\mathbf{q}_1} S_{\xi_1}]^2 \\ &\quad + \lambda_1(\phi), \end{aligned} \quad (60)$$

其中, $f_1 = f_1(\xi_1, t) = f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t)$, I_{ξ_1} 和 S_{ξ_1} 为单位 6 维相空间的动态信息密度和动态熵密度. 以此类推, 12 维动态信息演化方程(32)和 12 维动态熵演化方程(31)变为

$$\frac{\partial I_{\xi_1 \xi_2}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i} \cdot (\mathbf{V}_i I_{\xi_1 \xi_2}) - \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{p}_i} \cdot (\mathbf{F}_i I_{\xi_1 \xi_2})$$

$$\begin{aligned} &+ D \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i}^2 I_{\xi_1 \xi_2} \\ &- \frac{D}{f_2} \sum_{i=1}^2 [(\nabla_{\mathbf{q}_i} \ln f_2) I_{\xi_1 \xi_2} - \nabla_{\mathbf{q}_i} I_{\xi_1 \xi_2}]^2 \\ &- \lambda_2(\phi), \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\xi_1 \xi_2}}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i} \cdot (\mathbf{V}_i S_{\xi_1 \xi_2}) - \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{p}_i} \cdot (\mathbf{F}_i S_{\xi_1 \xi_2}) \\ &+ D \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{q}_i}^2 S_{\xi_1 \xi_2} \\ &+ \frac{D}{f_2} \sum_{i=1}^2 [(\nabla_{\mathbf{q}_i} \ln f_2) S_{\xi_1 \xi_2} - \nabla_{\mathbf{q}_i} S_{\xi_1 \xi_2}]^2 \\ &+ \lambda_2(\phi), \end{aligned} \quad (62)$$

其中, $f_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, t) = f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; t)$, $I_{\xi_1 \xi_2}$ 和 $S_{\xi_1 \xi_2}$ 为单位 12 维相空间的动态信息密度和动态熵密度.

3.3 量子非平衡态统计物理系统

与经典 Liouville 扩散方程(56)相对应, 描述量子非平衡态统计物理系统演化规律的应是下述的量子 Liouville 扩散方程:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} &= H\rho - \rho H + D \nabla_q^2 \rho \\ &= [H, \rho] + D \nabla_q^2 \rho, \end{aligned} \quad (63)$$

显然, 当量子概率密度算符 ρ 与空间坐标 x 无关时, 方程(35)就变成方程(63). 与此方程相对应, $6N$ 维量子动态信息演化方程(39)和 $6N$ 维动态熵演化方程(38)就变为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial I_{\rho}}{\partial t} &= [H, I_{\rho}] + D \nabla_q^2 I_{\rho} \\ &\quad - \frac{D}{\rho} [(\nabla_q \ln \rho) I_{\rho} - \nabla_q I_{\rho}]^2, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial S_{\rho}}{\partial t} &= [H, S_{\rho}] + D \nabla_q^2 S_{\rho} \\ &\quad + \frac{D}{\rho} [(\nabla_q \ln \rho) S_{\rho} - \nabla_q S_{\rho}]^2, \end{aligned} \quad (65)$$

其中, $[H, I_{\rho}] = H I_{\rho} - I_{\rho} H$, $[H, S_{\rho}] = H S_{\rho} - S_{\rho} H$, I_{ρ} 和 S_{ρ} 为单位 $6N$ 维相空间的量子动态信息密度和量子动态熵密度.

3.4 电动力学系统

当不考虑信息在系统之外的坐标空间传递时, 由 2.4 节方程(46)得电动力学系统运动规律的概率

密度演化方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial A_{\mu}} (L_{\mu} P) - \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial L_{\mu}} [(c^2 \nabla^2 A_{\mu} + 4\pi c J_{\mu}) P], \quad (66)$$

其中 $P = P(A_{\mu}, L_{\mu}, t)$. 显然, 当系统的概率密度 $P(A_{\mu}, L_{\mu}, \mathbf{x}, t) = P(A_{\mu}, L_{\mu}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 时, 方程 (46) 就变为 (66). 与此方程对应的电动力学系统的动态信息演化方程 (48) 和动态熵演化方程 (47) 就变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I_E}{\partial t} \\ &= - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\mu}} (L_{\mu} I_E) \\ & \quad - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial L_{\mu}} [(c^2 \nabla^2 A_{\mu} + 4\pi c J_{\mu}) I_E], \quad (67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_E}{\partial t} \\ &= - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\mu}} (L_{\mu} S_E) \\ & \quad - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial L_{\mu}} [(c^2 \nabla^2 A_{\mu} + 4\pi c J_{\mu}) S_E], \quad (68) \end{aligned}$$

其中 I_E 和 S_E 为单位 (A_{μ}, L_{μ}) 空间的动态信息密度和动态信息熵密度.

方程 (54), (55); (57), (58); (59), (60); (61), (62); (64), (65) 和 (67), (68) 正是与物理方程 (53), (56), (63) 和 (66) 相对应的信息 (熵) 方程. 当方程 (53), (56), (63) 和 (66) 看成是由物理方程表述了随机动力学系统、经典非平衡态统计物理系统、量子非平衡统计物理系统和电动力学系统等物理学系统的演化规律时, 通常都将信息 (熵) 方程 (54), (55); (57), (58); (59), (60); (61), (62); (64), (65) 和 (67), (68) 看成是表述了这些物理学系统自身的动态信息和动态熵的演化规律. 然而从数学上看, 由于它们是从其对应的物理方程经过信息变换 (4), (10) 得来的, 故在表述有关物理学系统的演化规律时, 这些信息 (熵) 方程与其对应的物理方程是等价的. 换言之, 各系统的演化规律不仅可由物理方程表述, 亦可统一由其对应的信息方程表述. 当物理学系统的状态和演化规律统一由信息方程表述时, 所使用的概念都是信息概念, 即信息方程的系数和组成项: 信息流 (包括漂移信息流和扩散信息流)、信息耗损和信息产生等, 从而将物理系统和信息联

系在一起, 把系统的演化过程抽象为信息的演化过程. 进而由以上四种物理学系统的动态信息方程和动态熵方程 (54), (55); (57), (58); (59), (60); (61), (62); (64), (65) 和 (67), (68) 可以看出, 当它们用来表述物理学系统的演化规律时, 对于服从随机性规律的物理学系统, 如随机动力学系统、经典统计物理系统和量子统计物理系统, 它们的数学类型都是相同的, 而且一致表明: 动态信息密度随时间的变化率是由其在系统内部的态变量空间的漂移、扩散和耗损三者引起的, 而动态熵密度随时间的变化率则是由其内部态变量空间的漂移、扩散和产生三者引起的. 当动态系统内部存在净相互吸引作用时, 方程 (59), (60) 和 (61), (62) 中的 $\lambda_1(\phi)$ 和 $\lambda_2(\phi)$ 还可能以信息产生率和熵减少率的形式出现. 对于遵守确定性规律的动力学系统如电动力学系统, 由于系统内部不存在随机性, 动态信息密度和动态熵密度随时间的变化率仅由其在系统内部态变量空间的漂移引起的.

综合上述结果可以看出, 物理学方程信息化, 即物理学方程的信息表述的思路和方法可分为两步: 1) 将表述物理学变化规律的态变量随时间变化的方程转换成其等价的态变量概率密度随时间变化的方程; 2) 经过信息变换, 将概率密度变化方程转换成其等价的信息方程. 上述电动力学方程转换成信息方程就需 1), 2) 两步, 而随机动力学方程和非平衡态统计物理方程转换成信息方程仅第二步就完成. 需要指出, 这种思路和方法虽是由物理学方程得出的, 实际上, 它对于表述所有动力学系统变化规律的动力学方程, 不论属于什么学科, 如物理学的、化学的、生物学的和社会科学的等, 只要它们的概率密度演化方程存在, 原则上都是普适的. 这就是: 动力学方程信息表述.

还应强调指出, 若将上述动力学方程转化成信息方程的过程每一步都反反过来就变为信息方程转换成动力学方程的过程. 换言之, 只要已知表述动力学系统变化规律的信息方程, 就可由它推导出其对应的动力学方程.

4 信息流

所谓信息流, 即单位时间流过的信息量; 而信息流密度, 则是坐标空间或 (和) 态变量空间单位时间单位面积流过的信息量. 通常的信息联系包括信

息传递和控制, 都是由信息流实现的. 下面扼要给出各系统外部和系统内部的信息流密度的表达式, 再讨论物理学中的最基本概念“力”和信息流的类似性和相关性.

4.1 系统外部坐标空间的信息流密度

根据动态信息演化方程 (13), (26), (28), (32), (39) 和 (48), 即可求得各动力学系统外部坐标空间的信息流密度的表达式, 它们都是由漂移信息流密度和扩散信息流密度二者的代数和组成, 具体表示为

1) 随机动力学系统

$$J_{x_k}^{a\alpha} = \nu_k I_{a\alpha} - Q_k \frac{\partial I_{a\alpha}}{\partial x_k}; \quad (69)$$

2) 经典非平衡态统计物理系统 (6N 维、6 维和 12 维相空间)

$$J_{x_k}^{X\alpha} = \nu_k I_{X\alpha} - Q_k \frac{\partial I_{X\alpha}}{\partial x_k}, \quad (70)$$

$$J_{x_k}^{\xi_1\alpha} = \nu_k I_{\xi_1\alpha} - Q_k \frac{\partial I_{\xi_1\alpha}}{\partial x_k}, \quad (71)$$

$$J_{x_k}^{\xi_1\xi_2\alpha} = \nu_k I_{\xi_1\xi_2\alpha} - Q_k \frac{\partial I_{\xi_1\xi_2\alpha}}{\partial x_k}; \quad (72)$$

3) 量子非平衡态统计物理系统

$$J_{x_k}^{\rho\alpha} = \nu_k I_{\rho\alpha} - Q_k \frac{\partial I_{\rho\alpha}}{\partial x_k}; \quad (73)$$

4) 电动力学系统

$$J_{x_k}^{E\alpha} = \nu_k I_{E\alpha} - Q_k \frac{\partial I_{E\alpha}}{\partial x_k}. \quad (74)$$

将动态熵密度 $S_{a\alpha}$, $S_{X\alpha}$, $S_{\xi_1\alpha}$, $S_{\xi_1\xi_2\alpha}$, $S_{\rho\alpha}$ 和 $S_{E\alpha}$ 分别取代 (69)—(74) 式中动态信息密度的 $I_{a\alpha}$, $I_{X\alpha}$, $I_{\xi_1\alpha}$, $I_{\xi_1\xi_2\alpha}$, $I_{\rho\alpha}$ 和 $I_{E\alpha}$, 即得各动力学系统外部坐标空间的熵流密度的表达式, 它们同样是由漂移熵流密度和扩散熵流密度二者的代数和组成.

4.2 系统内部态变量空间的信息流密度

当信息不在系统之外的坐标空间传递时, 根据动态信息演化方程 (54), (57), (59), (61) 和 (67), 即可求得各动力学系统内部态变量空间的信息流密度的表达式. 对服从随机性规律的动力学系统, 它们同样是由漂移信息流密度和扩散信息流密度二者的代数和组成, 具体表示为

1) 随机动力学系统

$$J_{a_i}^a = K_i(a) I_a - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial a_j} [B_{ij}(a) I_a]; \quad (75)$$

2) 经典非平衡态统计物理系统 (6N 维、6 维和 12 维相空间)

$$J_X^X = \dot{X} I_X - D \nabla_q I_X = \begin{cases} (\nabla_p H) I_X - D \nabla_q I_X, \\ -(\nabla_q H) I_X, \end{cases} \quad (76)$$

$$J_{\xi_1}^{\xi_1} = \begin{cases} V_1 I_{\xi_1} - D \nabla_{q_1} I_{\xi_1}, \\ F_1 I_{\xi_1}, \end{cases} \quad (77)$$

$$J_{\xi_1\xi_2}^{\xi_1\xi_2} = \begin{cases} V_i I_{\xi_1\xi_2} - D \nabla_{q_i} I_{\xi_1\xi_2}, \\ (F_1 - \nabla_{q_i} \phi_{ij}) I_{\xi_1\xi_2}; \end{cases} \quad (78)$$

3) 电动力学系统

由于遵守确定性规律, 信息流密度仅有漂移项, 其表达式为

$$J_E^E = \begin{cases} L_\mu I_E, \\ (c^2 \nabla^2 A_\mu + 4\pi c J_\mu) I_E. \end{cases} \quad (79)$$

将动态熵密度 S_a , S_X , S_{ξ_1} , $S_{\xi_1\xi_2}$ 和 S_E 分别取代 (75)—(79) 式中的动态信息密度 I_a , I_X , I_{ξ_1} , $I_{\xi_1\xi_2}$ 和 I_E , 即得各动力学系统内部态变量空间的熵流密度的表达式, 它们的组成与信息流密度相同.

若系统内部和外部同时存在信息流时, 则各动力学系统内部的信息流密度公式 (75)—(79) 中的 I_a , I_X , I_{ξ_1} , $I_{\xi_1\xi_2}$ 和 I_E 应分别由 $I_{a\alpha}$, $I_{X\alpha}$, $I_{\xi_1\alpha}$, $I_{\xi_1\xi_2\alpha}$ 和 $I_{E\alpha}$ 取代. 对应的熵流密度亦是如此.

对于同一动力学系统, 熵流密度 J_s 与信息流密度 J_i 之和为零, 即

$$J_s + J_i = 0. \quad (80)$$

态变量空间如此, 坐标空间亦如此.

由于存在着累积耗损, 信息流密度在空间传递途中将会减小. 为此我们经由 (69) 和 (11) 式先给出随机动力学系统的于 t 时流经坐标空间 x 处的信息流密度的表达式

$$J_x^a(t) = \int \left\{ \left[\nu p(a, x, t) - Q \frac{\partial p(a, x, t)}{\partial x} \right] \ln \frac{p(a, x, t)}{p_m(a, x)} - Q \left[\frac{\partial p(a, x, t)}{\partial x} - \frac{p(a, x, t)}{p_m(a, x)} \frac{\partial p_m(a, x)}{\partial x} \right] \right\} da. \quad (81)$$

可见空间信息流密度是时空的函数. 由此不难求出 $t = 0$ 时流经 $x = 0$ 处与 $t = \tau$ 时流经 $x = l$ 处两者信息流密度之差, 即随机动力学系统的信息流密度

在传递过程中随传递距离增加而减小的变化式为

$$J_0^a(0) - J_l^a(\tau) = P_l^a(\tau), \quad (82)$$

其中 $P_l^a(\tau)$ 就是信息流密度在传递途中的累积耗损, 它可由 (81) 式计算出. (81) 和 (82) 式虽来自随机动力学系统, 其他动力学系统同样适用.

若动态信息由 (10a) 定义时, 与 (81) 式相对应, 信源为同样的随机动力学系统, 于 t 时流经 x 处的信息流密度为

$$J_x^a(t) = \int \left\{ \left[vp(a, x, t) - Q \frac{\partial p(a, x, t)}{\partial x} \right] \times \ln p(a, x, t) - Q \frac{\partial p(a, x, t)}{\partial x} \right\} da, \quad (81a)$$

由此式同样可求出 (82) 式.

(81) 和 (82) 式来自随机动力学系统, 与 (81) 式相似, 由于存在累积耗损, 非平衡态统计物理系统的信息流密度在空间传递中也会减小. 由 (70), (23) 式和 (71), (29) 式可求出, 当非平衡态统计物理系统演化 t 时, 其传递至 x 处的 $6N$ 维和 6 维的信息流密度为

$$J_x^X(t) = \int \left\{ \left[v\rho(\mathbf{X}, x, t) - Q \frac{\partial \rho(\mathbf{X}, x, t)}{\partial x} \right] \ln \frac{\rho(\mathbf{X}, x, t)}{\rho_0(\mathbf{X}, x)} - Q \left[\frac{\partial \rho(\mathbf{X}, x, t)}{\partial x} - \frac{\rho(\mathbf{X}, x, t)}{\rho_0(\mathbf{X}, x)} \frac{\partial \rho_0(\mathbf{X}, x)}{\partial x} \right] \right\} d\Gamma, \quad (83)$$

$$J_x^\varepsilon(t) = \int \left\{ \left[vf_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x, t) - Q \frac{\partial f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x, t)}{\partial x} \right] \times \ln \frac{f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x, t)}{f_{10}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x)} - Q \left[\frac{\partial f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x, t)}{\partial x} - \frac{f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x, t)}{f_{10}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x)} \frac{\partial f_{10}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; x)}{\partial x} \right] \right\} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{p}_1, \quad (83a)$$

可见信息流密度是时空的函数. 由 (83) 和 (83a) 式即可求得 $t = 0$ 时流经 $x = 0$ 处与 $t = \tau$ 时传递至 $x = l$ 处两者的信息流密度之差为

$$J_0^X(0) - J_l^X(\tau) = P_l^X(\tau), \quad (84)$$

$$J_0^\varepsilon(0) - J_l^\varepsilon(\tau) = P_l^\varepsilon(\tau), \quad (84a)$$

式中, $P_l^X(\tau)$ 和 $P_l^\varepsilon(\tau)$ 就是信息流密度在传递途中的累积耗损, 可由 (83) 和 (83a) 式求出.

比较 (69)—(74) 和 (75)—(79) 式, 可以看出:

1) 系统内部态变量空间和系统外部坐标空间的漂移信息流密度都等于漂移传递速度和信息密度之乘积, 扩散信息流密度都等于扩散系数与信息密度负梯度之乘积;

2) 态变量空间的漂移传递速度就是系统态变量的漂移变化速度, 扩散系数就是态变量的扩散系数, 两者都是由动力学系统的性质和演化规律决定的. 然而, 坐标空间的漂移传递速度 ν_k 和扩散系数 Q_k 都由载体性质决定, 与动力学系统的性质无关. 若载体为光时 (即人用眼接收信息), 则 ν_k 为光速, 若载体为声时 (即人用耳接收信息), 则 ν_k 为声速;

3) 漂移信息流的传递是定向的, 而扩散信息流的传递总是从信息高密度区向信息低密度区自发进行, 方向可以是四面八方的;

4) 系统内部态变量空间的信息流, 只负责系统内部组分之间的联系, 只引起系统内部的信息密度分布变化, 而与系统和外部环境之间的信息联系无关. 然而, 系统外部坐标空间的信息流, 无论在通信过程中或开放系统的有序度变化过程中, 都有其实际意义. 这是因为系统与外部环境之间的信息联系, 包括一个系统与另一个系统之间的信息联系, 两个生物个体之间及人类社会各个成员之间的信息联系, 都是通过坐标空间的信息流实现的.

以上四点内容, 同样适用于熵流.

4.3 信息流和力的类似性和相关性

在物理世界和物理科学中, 力是基本概念, 起着核心作用. 物理世界中, 从原子核、原子、分子、固体到星体, 它们的稳定存在和运动规律, 都分别靠核力、弱力、电磁力和万有引力维持的. 在信息世界和信息科学、生命世界和生命科学以及思维科学中, 信息是基本概念, 起着与力在物理世界和物理科学中类似的核心作用. 生物社会包括人类社会的稳定存在和发展, 生命所以能以活的形式存在 (生命本质), 生物的遗传、发育、进化和衰老等, 都有赖于信息传递和调控. 当描述动力学系统演化规律的物理方程 (53), (56), (63), (66) 变成信息方程 (54), (57), (59), (61), (64) 和 (67) 时, 力虽仍然存在, 但已不再以原来的角色出现, 取代它的则是信息流. 从 (76), (77) 和 (78) 式可进一步看出, 力 $-\nabla_{\mathbf{q}} H$, \mathbf{F}_i 和 $-\nabla_{\mathbf{q}_i} \phi_{ij}$ 是以传递速度的形式出现在信息流表达式中. 由此可见, 在物理表述中, 相互作用力聚

合了两个系统;而在信息表述中,联系两个系统的则是信息流.

5 信息耗损、熵产生和 Fisher 信息

信息耗损和熵产生是具有随机性的动力学系统的基本特性,亦是信息在有噪声的信道传递过程中必然发生的.本节首先扼要给出各动力学系统内外部和内部信息耗损率和熵产生率的表达式,而后再讨论与之相关的 Fisher 信息.

5.1 系统内外部的信息耗损和熵产生

当信息在系统之外的坐标空间传递时,各动力学系统内部的态变量空间和外部的坐标空间都存在信息耗损和熵产生.由动态信息演化方程 (13), (26), (28), (32), (39), (48) 和动态熵演化方程 (8), (25), (27), (31), (38) 和 (47) 等式右边最后两项的信息耗损项和熵产生项,即可求得各动力学系统内部和外部的信息耗损率和熵产生率的表达式,具体表示为

1) 随机动力学系统

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\mathbf{a}\mathbf{x}}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\mathbf{a}\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\int p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) [(B(\mathbf{a})) : (\nabla_{\mathbf{a}}\theta_{\mathbf{a}\mathbf{x}})(\nabla_{\mathbf{a}}\theta_{\mathbf{a}\mathbf{x}}) \\ &\quad + Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\mathbf{a}\mathbf{x}})^2] d\mathbf{a} d\mathbf{x} \\ &= -\overline{B : (\nabla_{\mathbf{a}}\theta_{\mathbf{a}\mathbf{x}})(\nabla_{\mathbf{a}}\theta_{\mathbf{a}\mathbf{x}})} - \overline{Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\mathbf{a}\mathbf{x}})^2} \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (85)$$

其中

$$\theta_{\mathbf{a}\mathbf{x}} = \ln \frac{p(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t)}{p_0(\mathbf{a}, \mathbf{x})}; \quad (86)$$

2) 经典非平衡态统计物理系统 (6N 维、6 维和 12 维相空间)

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\mathbf{X}\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\int \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) \left[D(\nabla_{\mathbf{q}}\theta_{\mathbf{X}\mathbf{x}})^2 \right. \\ &\quad \left. + Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\mathbf{X}\mathbf{x}})^2 \right] d\Gamma d\mathbf{x} \\ &= -\overline{D(\nabla_{\mathbf{q}}\theta_{\mathbf{X}\mathbf{x}})^2} - \overline{Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\mathbf{X}\mathbf{x}})^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\xi_1\mathbf{x}}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\xi_1\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\int f_1(\xi_1, t) \left[D(\nabla_{\mathbf{q}_1}\theta_{\xi_1\mathbf{x}})^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. + Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\xi_1\mathbf{x}})^2 \right] d\xi_1 d\mathbf{x} \\ &= -\overline{D(\nabla_{\mathbf{q}_1}\theta_{\xi_1\mathbf{x}})^2} - \overline{Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\xi_1\mathbf{x}})^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\xi_1\xi_2\mathbf{x}}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\xi_1\xi_2\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\int f_2(\xi_1, \xi_2, \mathbf{x}, t) \left[D(\nabla_{\mathbf{q}}\theta_{\xi_1\xi_2\mathbf{x}})^2 \right. \\ &\quad \left. + Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\xi_1\xi_2\mathbf{x}})^2 \right] d\xi_1 d\xi_2 d\mathbf{x} \\ &= -\overline{D(\nabla_{\mathbf{q}}\theta_{\xi_1\xi_2\mathbf{x}})^2} - \overline{Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\xi_1\xi_2\mathbf{x}})^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (89)$$

其中,

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{X}\mathbf{x}} &= \ln \frac{\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{X}, \mathbf{x})}, \\ \theta_{\xi_1\mathbf{x}} &= \ln \frac{f_1(\xi_1, \mathbf{x}, t)}{f_{10}(\xi_1, \mathbf{x})}, \\ \theta_{\xi_1\xi_2\mathbf{x}} &= \ln \frac{f_2(\xi_1, \xi_2, \mathbf{x}, t)}{f_{20}(\xi_1, \xi_2, \mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (90)$$

这里需要指出, (87) 式中 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N)$, (89) 式中的 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$;

3) 量子非平衡态统计物理系统

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial_i I_{\rho\mathbf{x}}}{\partial t} &= -i\hbar \frac{\partial_i S_{\rho\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -\sum \rho \left[D(\nabla_{\mathbf{q}}\theta_{\rho\mathbf{x}})^2 + Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\rho\mathbf{x}})^2 \right] \\ &= -D\text{Tr}[\rho(\nabla_{\mathbf{q}}\theta_{\rho\mathbf{x}})^2] - Q\text{Tr}[\rho(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{\rho\mathbf{x}})^2] \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (91)$$

其中

$$\theta_{\rho\mathbf{x}} = \ln \frac{\rho}{\rho_0}; \quad (92)$$

4) 电动力学系统

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{E\mathbf{x}}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{E\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= -Q \int P(A_\mu, L_\mu, \mathbf{x}, t) [(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{E\mathbf{x}})^2] dA_\mu dL_\mu d\mathbf{x} \\ &= -\overline{Q(\nabla_{\mathbf{x}}\theta_{E\mathbf{x}})^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (93)$$

其中

$$\theta_{E\mathbf{x}} = \ln \frac{P(A_\mu, L_\mu, \mathbf{x}, t)}{P_0(A_\mu, L_\mu, \mathbf{x})}. \quad (94)$$

(85), (87), (88), (89), (91) 和 (93) 式表明, 当内部有随机性的动力学系统的信息在系统之外的坐标空间传递时, 信息耗损率 $\frac{\partial_i I}{\partial t}$ 与熵产生率 $\frac{\partial_i S}{\partial t}$ 都由两部分组成, 其一 (右边第一项) 发生于系统内部的态变量空间, 另一 (右边第二项) 则发生于系统外部的坐标空间. 内部无随机性的电动力学系统, 信息耗损与熵产生仅发生于系统外部的坐标空间.

5.2 系统内部的信息耗损和熵产生

当仅研究系统内部的信息变化而不考虑其信息在系统外部传递时, 由动态信息方程 (54), (57), (59), (61), (64), (66) 和动态熵方程 (55), (58), (60), (62), (65), (67) 等式右边的信息损耗项和熵产生项, 即可求得各动力学系统内部的信息耗损率和熵产生率的表达式, 具体表示为

1) 随机动力学系统

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\mathbf{a}}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\mathbf{a}}}{\partial t} \\ &= -\int p(\mathbf{a}, t) B(\mathbf{a}) : (\nabla_{\mathbf{a}} \theta_{\mathbf{a}}) (\nabla_{\mathbf{a}} \theta_{\mathbf{a}}) d\mathbf{a} \\ &= -\overline{B(\mathbf{a}) : (\nabla_{\mathbf{a}} \theta_{\mathbf{a}}) (\nabla_{\mathbf{a}} \theta_{\mathbf{a}})} \leq 0, \end{aligned} \quad (95)$$

其中

$$\theta_{\mathbf{a}} = \ln \frac{p(\mathbf{a}, t)}{p_0(\mathbf{a})}; \quad (96)$$

2) 经典非平衡态统计物理系统 (6N 维、6 维和 12 维相空间)

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\mathbf{X}}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\mathbf{X}}}{\partial t} \\ &= -D \int \rho(\mathbf{X}, t) (\nabla_{\mathbf{q}} \theta_{\mathbf{X}})^2 d\Gamma \\ &= -D \overline{(\nabla_{\mathbf{q}} \theta_{\mathbf{X}})^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\xi_1}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\xi_1}}{\partial t} \\ &= -D \int f_1(\xi_1, t) (\nabla_{\mathbf{q}_1} \theta_{\xi_1})^2 d\xi_1 \\ &= -D \overline{(\nabla_{\mathbf{q}_1} \theta_{\xi_1})^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I_{\xi_1 \xi_2}}{\partial t} &= -\frac{\partial_i S_{\xi_1 \xi_2}}{\partial t} \\ &= -D \int f_2(\xi_1, \xi_2, t) (\nabla_{\mathbf{q}} \theta_{\xi_1 \xi_2})^2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -D \overline{(\nabla_{\mathbf{q}} \theta_{\xi_1 \xi_2})^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (99)$$

其中,

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{X}} &= \ln \frac{\rho(\mathbf{X}, t)}{\rho_0(\mathbf{X})}, \\ \theta_{\xi_1} &= \ln \frac{f_1(\xi_1, t)}{f_0(\xi_1)}, \\ \theta_{\xi_1 \xi_2} &= \ln \frac{f_2(\xi_1, \xi_2, t)}{f_{20}(\xi_1, \xi_2)}; \end{aligned} \quad (100)$$

3) 量子非平衡态统计物理系统

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial_i I_{\rho}}{\partial t} &= -i\hbar \frac{\partial_i S_{\rho}}{\partial t} \\ &= -D \sum \rho (\nabla_{\mathbf{q}} \theta_{\rho})^2 \end{aligned}$$

$$= -D \text{Tr}[\rho (\nabla_{\mathbf{q}} \theta_{\rho})^2] \leq 0, \quad (101)$$

其中

$$\theta_{\rho} = \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (102)$$

(86), (90), (92), (94) 和 (96), (100), (102) 式中 θ 定义为各动力学系统的概率密度的离开平衡率或简称为系统的离开平衡率, 用来定量地度量各系统离开平衡态的百分比.

由 (85), (87), (88), (89), (91), (93) 和 (95), (97), (98), (98), (101) 式可以看出, 各动力学系统的信息耗损率 $\frac{\partial_i I}{\partial t}$ 与熵产生率 $\frac{\partial_i S}{\partial t}$ 都满足:

$$1) \quad \frac{\partial_i I}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial_i S}{\partial t} \geq 0, \quad (103)$$

$$2) \quad \frac{\partial_i S}{\partial t} = -\frac{\partial_i I}{\partial t} \text{ 或 } \frac{\partial_i}{\partial t}(I + S) = 0. \quad (104)$$

(103) 式表明各动力学系统的信息通常只能耗损不能产生, 而熵则通常只能产生 (增加) 不能减少. (104) 式则表明各动力学系统的信息耗损率等于熵产生 (增加) 率, 即动力学系统内部的信息耗损与熵产生之和为零.

信息耗损率公式, 可称之为信息耗损定律公式. 它表明自然和社会各动力学系统的信息总是在耗损, 即系统自发向信息耗损的方向演化. 由于信息表示系统的有序度, 故信息耗损定律表示自然和社会各动力学系统的有序度总是在耗损. 熵产生率, 即熟知的熵增加定律, 是统计热力学中一个基本定律. 它的微观物理基础是什么? 是由哪几个物理量决定的? 可否由一个定量的简明公式表示? 这是统计物理中长期待解决的重要课题. 熵产生率 (97) 和 (98) 式 (等式右边 D 前应多个 k), 就是作者多年前首先给出的一个有普适性的熵增加定律公式 [10,15,16]. 信息熵产生率式, 即信息熵增加定律公式, 又可名为广义熵增加定律公式. 它表明自然和社会各动力学系统的熵总是在产生, 即系统自发向熵产生的方向演化. 由于熵表示系统的无序度, 故熵产生定律表示自然和社会各动力学系统的无序度总是在产生.

上述各信息耗损率公式和熵产生率公式表明, 各动力学系统的信息耗损率与熵产生率两者都等于扩散系数或噪声强度与系统离开平衡率梯度平方的乘积之平均值. 可见, 各动力学系统, 只要它处于非平衡态 ($\theta \neq 0$)、非均匀离开平衡 ($\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{a}} \neq 0, \frac{\partial \theta}{\partial x} \neq 0$) 且具有随机扩散运动 ($B \neq 0$,

$Q \neq 0$), 它的信息总是在耗损, 熵总是在产生. 反之, 当系统或处于平衡态 ($\theta = 0$) 或虽处于非平衡态但却是均匀的 ($\frac{\partial \theta}{\partial a} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$), 或只具有确定性运动而无随机性运动 ($B = 0, Q = 0$), 它都没有信息耗损和熵产生.

若系统处于定态, 其宏观态虽不随时间变化, 系统内部却有宏观流, 由方程 (53) ($n = 1$) 和 $\frac{\partial p(a)}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial a} = 0$, 可以证明一维定态系统内部的熵产生率为^[15]

$$\frac{\partial_i S}{\partial t} = J \left[-\phi(L) + \ln \frac{p_{st}(0)}{p_{st}(L)} \right], \quad (105)$$

其中, J 为系统的几率流, $\phi(L) = -\frac{1}{B} \int_0^L A(a) da$, L 为 J 流过的区间长度 $[0, L]$, $p_{st}(0)$ 和 $p_{st}(L)$ 为在边界 $a = 0$ 和 $a = L$ 处的几率密度. 这里扩散系数 B 为常数.

同样, 由 (85) 和 (105) 式可得一维定态系统内部的信息耗损率

$$\frac{\partial_i I}{\partial t} = -J \left[-\phi(L) + \ln \frac{p_{st}(0)}{p_{st}(L)} \right]. \quad (106)$$

由 (105) 和 (106) 式可见, 定态系统的熵产生率和信息耗损率正比于系统几率流. 当系统处于平衡态, $J = 0$, 信息熵产生率和信息耗损率都为零. 这与 (85) 式的结果一致的.

从信息熵产生定律和信息耗损定律出发, 可以断定: 任何自然和社会动力学系统都不可能纯洁无瑕, 铁板一块, 其内部总存在无序子系统, 例如晶体内有缺陷, 健康生物体内有死亡细胞, 社会上有犯罪分子等.

由于离开平衡率与信息熵密度和信息密度的不均匀性, 不难推断: 动力学系统在不可逆变化过程中, 其内部对应的微观结构变化总是不均匀的. 例如, 固体在范性变形过程中, 其内部位错滑移总是集中成滑移带; 人在衰老过程中, 各器管的衰老和病变速度总是有快有慢, 如有些人仅心脑血管严重患病, 另些人只肾功能显著衰退等.

5.3 Fisher 信息

Fisher 信息, 是估计分布参数最小均方误差的度量, 可用来度量实验数据中含有某参数的信息量. 它与 Shannon 信息的关系虽已有研究^[1,16], 这里给出更简明的结果.

设 a 为与估计参数有关的噪声随机变量, $p(a, t)$ 为 t 时测得 a 的概率密度, 对应的 Shannon 动态熵和动态信息为

$$\begin{aligned} S(t) &= - \int p(a, t) \ln p(a, t) da \\ &= \int S_a(t) da, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= S_m - S(t) \\ &= S_m + \int p(a, t) \ln p(a, t) da \\ &= S_m + \int I_a(t) da, \end{aligned} \quad (108)$$

其中, $S_a(t)$ 和 $I_a(t)$ 为动态熵密度和动态信息密度. 与求得方程 (54) 和 (55) ($n = 1$) 的方法相同并考虑到测量时方程 (54) 和 (55) 中的漂移变化速度 $K(a) = 0$, 即可求得 $S_a(t)$ 和 $I_a(t)$ 的动态演化方程为

$$\frac{\partial S_a}{\partial t} = B \frac{\partial^2 S_a}{\partial a^2} + Bp \left(\frac{\partial}{\partial a} \ln p \right)^2, \quad (109)$$

$$\frac{\partial I_a}{\partial t} = B \frac{\partial^2 I_a}{\partial a^2} - Bp \left(\frac{\partial}{\partial a} \ln p \right)^2, \quad (110)$$

由方程 (109) 和 (110) 得 Shannon 熵产生率和信息耗损率为

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i S}{\partial t} &= B \int p \left(\frac{\partial}{\partial a} \ln p \right)^2 da \\ &= B \int \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial a} \right)^2 da, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i I}{\partial t} &= -B \int p \left(\frac{\partial}{\partial a} \ln p \right)^2 da \\ &= -B \int \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial a} \right)^2 da, \end{aligned} \quad (112)$$

当 $B = 1$ 时即得 Fisher 信息

$$I_F = \frac{\partial_i S}{\partial t} = -\frac{\partial_i I}{\partial t}. \quad (113)$$

可见, Fisher 信息等于 Shannon 信息损耗率或熵产生率. 这就是本文给出的 Fisher 信息和 Shannon 信息的关系式. 近些年, Frieden^[16] 试图由 Fisher 信息统一推导出各种物理方程, 这是一种大胆有趣的探索.

6 内部相互作用引发信息变化

如前所述, 信息, 是客观事物状态及其运动规律的显示、反映和描述, 亦可用于表示系统的有序

度. 信息损耗定律表示自然和社会各动力学系统的信息即有序度总是向耗损的方向演化, 即系统趋向退化. 现在的问题是, 若无外界的输入, 孤立系统内部信息能发生变化吗? 若能, 它的微观机理是什么? 数学表达式又是什么?

为了解答此问题, 我们从经典非平衡态统计物理系统的6维动态信息演化方程(59)和6维动态熵演化方程(60)出发. 这两个方程表明, 动力学系统的信息密度(熵密度)随时间的变化率(等式左边)是由其在空间的漂移(等式右边第一项)(设 $F_1 = 0$)、扩散(等式右边第二项)、耗损(增加)(等式右边第三项)和相互作用位能 ϕ 引发的信息(熵)变化(等式右边第四项)四者组成的.

根据(30)式, 相互作用位能引发信息(熵)变化的第四项为

$$\begin{aligned}
 R(t) &= - \int \lambda_1(\phi) d\xi \\
 &= - N \int (\nabla_q \phi) \cdot \left\{ \frac{f_1(\xi, t)}{f_{10}(\xi)} \nabla_p f_{20}(\xi, \xi_1) \right. \\
 &\quad \left. - \nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t) \left[1 + \ln \frac{f_1(\xi, t)}{f_{10}(\xi)} \right] \right\} d\xi d\xi_1 \\
 &= - N \int f_2(\xi, \xi_1, t) (\nabla_q \phi) \cdot \left\{ \nabla_p \left[\ln \frac{f_1(\xi, t)}{f_{10}(\xi)} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{f_{20}(\xi, \xi_1)}{f_2(\xi, \xi_1, t)} \nabla_p \left[\frac{f_1(\xi, t)}{f_{10}(\xi)} \right] \right\} d\xi d\xi_1. \quad (114)
 \end{aligned}$$

将(88)式中的系统的离开平衡率 $\theta_1 = \theta_{\xi_1}$ 和 $\theta_2 = \theta_{\xi_1 \xi_2}$ 代入(114)式最后一行并稍加运算就得

$$\begin{aligned}
 R(t) &= - N \int f_2(\xi, \xi_1, t) (\nabla_q \phi) \cdot (\nabla_p \theta_1) \\
 &\quad \times \left[1 - e^{-(\theta_2 - \theta_1)} \right] d\xi d\xi_1 \\
 &= - N \overline{(\nabla_q \phi) \cdot (\nabla_p \theta_1) \left[1 - e^{-(\theta_2 - \theta_1)} \right]}, \quad (115)
 \end{aligned}$$

此式就是内部粒子间的相互作用位能导致非平衡系统信息(熵)发生变化的公式. 它表明, 非平衡系统的宏观信息(熵)变化率 $R(t)$ 等于相互作用力 $(-\nabla_q \phi)$ 、离开平衡率的动量空间梯度 $(\nabla_p \theta_1)$ 和系统在12维和6维两个相空间离开平衡率之差 $([1 - e^{-(\theta_2 - \theta_1)}] \simeq \theta_2 - \theta_1)$ 三者之积的平均值的 N 倍. R 的数值是正还是负, 即位能是增加信息(减少熵)还是减少信息(增加熵), 要由位能是负还是正而定. 现在我们对这个论断进

行论证. 因 $f_1(\xi, t)$ 和 $f_{10}(\xi)$ 是概率密度, 都大于零, 故 $f_1(\xi, t)/f_{10}(\xi)$ 比 $\ln [f_1(\xi, t)/f_{10}(\xi)]$ 约大一个量级. 同样, 因 $f_2(\xi, \xi_1, t)$ 是大于零的概率密度, 满足规一化条件 $\int f_2(\xi, \xi_1, t) dq dp dq_1 dp_1 = 1$

且 $\int \nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t) dp = 0$, 故 p 达到一定值时, f_2 总会随 p 增加而减小并趋于零. 因而对那些随 p 增加而减小占主导部分的 $f_2(\xi, \xi_1, t)$ 函数而言, $\nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t)$ 可看成负号项. 再考虑到 $\int (\nabla_q \phi) \cdot \nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t) dp = 0$ 及在平衡态附近, $\nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t)$ 和 $\nabla_p f_{20}(\xi, \xi_1)$ 量级相等, 即 $\nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t) \simeq \nabla_p f_{20}(\xi, \xi_1)$, 代入(114)式倒数第二行, 即得

$$\begin{aligned}
 R(t) \approx & - N \int (\nabla_q \phi) \cdot \left[\frac{f_1(\xi, t)}{f_{10}(\xi)} - \ln \frac{f_1(\xi, t)}{f_{10}(\xi)} \right] \\
 & \times \nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t) d\xi d\xi_1, \quad (116)
 \end{aligned}$$

此式积分号下3个连乘的因子中, 两个正负号已定, 即第二个因子 $\left(\frac{f_1}{f_{10}} - \ln \frac{f_1}{f_{10}} \right)$ 为正而第三个因子 $\nabla_p f_2(\xi, \xi_1, t)$ 为负, 故 $R(t)$ 的数值是负还是正就由第一个因子 $\nabla_q \phi$ 而定. 简言之, 当 $\nabla_q \phi < 0$ (排斥力)时, 则 $R(t) < 0$, 系统的信息减少(熵增加); 反之, 当 $\nabla_q \phi > 0$ (吸引力)时, 则 $R(t) > 0$. 系统的信息产生(熵减少). 换言之, 非平衡系统内部吸引力产生信息(减少熵), 排斥力则减少信息(增加熵). 公式(115)就是它的定量表达式.

现在从(115)式全面看一个统计热力学系统内部信息产生(减少)和熵减少(增加)的物理基础:

- 1) 系统处于非平衡态, 即 $\theta_1 \neq 0, \theta_2 \neq 0$. 反之, 当系统处于平衡态, 即 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$, 则 $R = 0$;
- 2) 系统在动量子空间非均匀地离开平衡, 即 $\nabla_p \theta_1 \neq 0$. 反之, 当系统均匀地离开平衡, 即 $\nabla_p \theta_1 = 0$, 则 $R = 0$;
- 3) 系统是非线性的. 因在最简单的情况下, 即系统粒子间统计独立时, $f_2(\xi, \xi_1, t) = f_1(\xi, t) f_1(\xi_1, t)$, $R(t)$ 就是非线性的. 系统粒子间存在统计关联时, $R(t)$ 将更复杂. 当 $f_2 = 0$, 系统没有了非线性, 则 $R = 0$.

7 退化和自组织进化的统一信息表述

自然界演化有两个方向: 一是由熵增加定律表述的退化, 是系统自发趋向无序度增加方向的衰败性演化; 另是以生物学进化为典型的自组织进化,

是系统自发趋向有序度增加方向的新生性演化. 如何统一表述退化和自组织进化? 一直是待解决的一个重要课题. 下面我们给出非平衡孤立系统和开放系统的总信息变化率和总熵变化率, 并由其所得公式来讨论此课题.

我们先给出内部有相互吸引作用的孤立系统的总信息变化率和总熵变化率公式. 将动态信息演化方程 (59) 和动态熵演化方程 (60) 两边对 6 维相空间积分并代入 (98) 和 (115) 式, 即得总信息变化率公式和总熵变化率公式分别为

$$\frac{\partial_i I}{\partial t} = -D \overline{(\nabla_q \theta_1)^2} - N \overline{(\nabla_q \phi) \cdot (\nabla_p \theta_1) [1 - e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]}, \quad (117)$$

$$\frac{\partial_i S}{\partial t} = D \overline{(\nabla_q \theta_1)^2} + N \overline{(\nabla_q \phi) \cdot (\nabla_p \theta_1) [1 - e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]}. \quad (118)$$

演化方程 (59) 和 (60) 等式右边第一项和第二项从 (117) 和 (118) 式的总信息 (熵) 变化率中消失的原因, 是由于孤立系统内没有信息 (熵) 流入或流出, 而信息 (熵) 扩散只影响内部局域信息 (熵) 密度的分布, 不影响系统总信息 (熵) 的增减. (117) 和 (118) 式表明, 孤立系统的总信息 (熵) 变化率 (等式左边) 是由信息耗损定律 (熵增加定律) 公式 (等式右边第一项) 和信息产生率 (熵减少率) 公式 (等式右边第二项) 两者相加的结果. 前者为负 (正), 起源于系统内部粒子的随机运动; 后者为正 (负), 来自系统内部粒子间的相互吸引作用. 正负两者同时共存, 互相对抗抵消. 信息耗损 (熵增加) 会破坏有序结构, 是热力学退化; 信息产生 (熵减少) 则产生有序结构, 是自组织进化. 由 (117) 和 (118) 式可见, 若仅有第一项的信息耗损 (熵增加), 则孤立系统的总信息只减不增 (总熵只增不减), 即 $\frac{\partial_i I}{\partial t} \leq 0$, $\frac{\partial_i S}{\partial t} \geq 0$, 系统日益无序化. 然而, 若第二项的信息产生 (熵减少) 出现且大于第一项的信息耗损 (熵增加) 时, 孤立系统的总信息 (总熵) 变化率就大于零 (小于零), 即 $\frac{\partial_i I}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial_i S}{\partial t} < 0$, 因而就会涌现自组织结构. 由此可见, 正是内部相互吸引力所导致的信息产生 (熵减少) 使孤立系统可能抵抗信息耗损 (熵增加) 定律而涌现自组织结构.

下面我们利用 (117) 和 (118) 式讨论一个实际孤立系统课题.

宇宙作为一个孤立的非平衡系统, 其内部恒星之间、星系之间的相互作用力是万有引力. 描述它们运动的动力学方程就是单粒子概率密度 BBGKY 方程, 相互作用位能则是万有引力位能 $\phi = -Gm/|\mathbf{q} - \mathbf{q}_1|$. 将此位能代入 (117) 和 (118) 式第二项, 原则上就应计算出信息产生 (熵减少) 的具体数值结果. 但因在星系演化动力学中, 迄今未见过联合概率密度 $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, t)$ 的具体函数形式, 我们只能根据 (117) 和 (118) 式第二项定性肯定万有引力将使系统涌现信息产生 (熵减少). 它与第一项的信息损耗 (熵增加) 抵消的结果, 就可能使系统的总信息增加 (总熵不再只增不减), 因而原先有关宇宙趋向热寂的推论亦就显得缺乏理论依据.

若系统是开放的, 信息 (熵) 可流入或流出. 由动态信息演化方程 (59) 和动态熵演化方程 (60) 两边对 6 维相空间积分并代入 (117) 和 (118) 式, 即得开放系统的总信息变化率公式和总熵变化率公式分别为

$$\frac{\partial_o I}{\partial t} = - \int (\mathbf{C} \cdot \mathbf{I}_V) \cdot d\mathbf{A} - D \overline{(\nabla_q \theta_1)^2} - N \overline{(\nabla_q \phi) \cdot (\nabla_p \theta_1) [1 - e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]}, \quad (119)$$

$$\frac{\partial_o S}{\partial t} = - \int (\mathbf{C} \cdot \mathbf{S}_V) \cdot d\mathbf{A} + D \overline{(\nabla_q \theta_1)^2} + N \overline{(\nabla_q \phi) \cdot (\nabla_p \theta_1) [1 - e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]}, \quad (120)$$

其中, $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, t)$ 为流体平均速度, A 为系统的面积, $\mathbf{I}_V = \int \mathbf{I}_{\xi_1} d\mathbf{p}$, $\mathbf{S}_V = \int \mathbf{S}_{\xi_1} d\mathbf{p}$ 为单位体积的信息密度和熵密度. 与 (117) 和 (118) 式相比, (119) 和 (120) 式多了信息 (熵) 流入 (出) 一项. 它表明, 开放系统的总信息 (熵) 变化率 (等式左边) 是由信息耗损 (熵增加) (等式右边第二项)、信息产生 (熵减少) (等式右边第三项) 和信息 (熵) 流入 (出) (等式右边第一项) 三者共同决定的. 因此, 只要信息流入 (熵流出) 与信息产生 (熵减少) 两者之和大于信息耗损 (熵增加), 系统就可以涌现自组织结构. 可见, 对于开放系统, 即使不存在内部吸引力导致的信息产生 (熵减少), 只要信息流入 (熵流出) 超过信息耗损 (熵增加), 系统仍能涌现自组织结构.

从 (117) — (120) 式就可以看出, 无论孤立系统还是开放系统, 一方面, 非平衡系统的信息总是在损耗 (熵总是在增加), 显示出破坏有序结构的退化力量的永恒存在; 另一方面, 若内部存在相互吸引

力时, 非平衡系统同时有另一种形式的信息在产生(熵在减少), 再加上信息流入(熵流出), 表明了产生有序结构的自组织进化力量在蓄势逞强. 二者同时共存于一个系统中和一个理论公式中, 显示了动力学系统退化和自组织进化的统一信息(熵)表述.

8 动态互信息和动态信道容量

Shannon 信息传递理论中一个重要课题是给出可用于定量计算信宿在输出端收到信源从输入端通过信道传递的信息量的公式, 这就是现有的静态互信息公式^[1-3].

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A), \quad (121)$$

其中, A 是从输入端输入信道的符号; B 是信宿在输出端收到的符号, $H(A)$ 是信源熵; $H(B)$ 是信宿熵; $H(A|B)$ 和 $H(B|A)$ 都是由噪声对符号的干扰引起的噪声熵. 这个通信模型, 实质上是零传递时间模型, 或称为点模型, 没有时空过程, 即符号从输入端传递至输出端不需任何时间, 两端相当于处在同一个点, 噪声当然亦集中于此点. 这样, (121) 式各项中的符号都是同一时间、同一地点的符号. 以互信息而言, 则应是 $I(A; B) = I(A_0(0); B_0(0)) = I(A_l(\tau); B_l(\tau))$, 它的精确定义是: 信宿于 $t = \tau (= 0)$ 时在输出端 $x = l (= 0)$ 处从符号 $B_l(\tau) (= B_0(0))$ 中提取此地此时由信源传递来的符号 $A_l(\tau) [= A_0(0)]$ 的信息量. 现在的问题是, 当信息符号在信道中的传递时间足够长且传递途中存在噪声时, 如何计算信宿于 $t = \tau$ 时在输出端 $x = l$ 处从符号 $B_l(\tau)$ 中提取信源于 $t = 0$ 时由输入端 $x = 0$ 处发送的符号 $A_0(0)$ 的信息量? 这就需要动态互信息公式^[6,7]

$$I(A_0(0); B_l(\tau)) = H(A_0(0)) - H(A_0(0)|B_l(\tau)), \quad (122)$$

其中

$$H(A_0(0)|B_l(\tau)) = H(Q_l(\tau)) + H(A_l(\tau)|B_l(\tau)). \quad (123)$$

为了使 (122) 式可用于实际计算, 需知信息在传递途中的累积耗损 $H(Q_l(\tau))$, 利用信息流密度在传递途中的变化 (82) 式, 不难求得^[6]

$$H(Q_l(\tau)) = \frac{P_l(\tau)}{J_0(0)} H(A_0(0)), \quad (124)$$

$$H(A_l(\tau)) = H(A_0(0)) - H(Q_l(\tau)) = \left[1 - \frac{P_l(\tau)}{J_0(0)} \right] H(A_0(0)) = \frac{J_l(\tau)}{J_0(0)} H(A_0(0)). \quad (125)$$

再将 (123)—(125) 式代入 (122) 式, 则动态互信息公式变为

$$I(A_0(0); B_l(\tau)) = \frac{J_l(\tau)}{J_0(0)} H(A_0(0)) - H(A_l(\tau)|B_l(\tau)). \quad (126)$$

信息传递理论中另一个重要课题是信道所能传递的最大信息量, 即信道容量. 它与互信息密切相关. 在现有 Shannon 信息理论中, 静态信道容量定义为^[1-3]

$$C = \max_{p(a)} I(A; B), \quad (127)$$

其中 $I(A; B)$ 就是 (121) 式的静态互信息公式. 随着动态互信息公式 (122) 和 (126) 的出现, 自然就有其相应的动态信道容量公式. 与 (127) 式相对应, 它应定义为

$$C_d = \max_{p(a_0)} I(A_0(0); B_l(\tau)) = \max_{p(a_0)} \left[\frac{J_l(\tau)}{J_0(0)} H(A_0(0)) - H(A_l(\tau)|B_l(\tau)) \right], \quad (128)$$

其中 $p(a_0)$ 表示于 $t = 0$ 时, 由输入端 $x = 0$ 处发送符号 $A_0(0)$ 的几率密度分布. (128) 式就是将 (127) 式中的静态互信息公式 (121) 由动态互信息公式 (126) 取代后变成的.

由 (122), (123), (126), (128) 式可见, 动态互信息公式和动态信道容量公式中噪声引起的信息耗损应由两部分组成: 其一是 (121) 和 (127) 式中那种在输出端接收时的瞬时信息耗损 $H(A_l(\tau)|B_l(\tau))$; 另一则是在信道传递过程中的累积信息耗损 $H(Q_l(\tau))$, 它使输入端的信息 $H(A_0(0))$ 传递到输出端时减小变为 $H(A_l(\tau))$. 何种条件下 $H(Q_l(\tau))$ 可以略去? 由 (124) 和 (125) 式可见, 仅当传递时间 $\tau = l/v \rightarrow 0$ 即信道长度 l 与信号传递速度 v 之比趋于零, 累积信息耗损 $H(Q_l(\tau))$ 才可略去. 这种条件下, 输入端的信息传递至输出端时几乎无变化, (122), (126), (128) 式就变成 (121) 和 (127) 式, 这亦正是静态互信息公式 (121) 和静态信道容量公式 (127) 适用的条件. 反之, 若信道长度 l 很长或传

递速度 v 很小或信道噪声强度 Q 很大时, 累积信息耗损 $H(Q_i(\tau))$ 则不可略去. 这种条件下, 表达信宿在输出端收到输入端的信息量的互信息公式和信道容量公式应由静态 (121) 和 (127) 式改为动态 (122), (126), (128) 式. 海洋水下通信, 恒星间的通信, 前者因声速较低且途中噪声较强, 后者因距离特大且噪声难以完全略去, 因而动态互信息公式和动态信道容量公式就有其实际意义.

9 应用

下面我们将上述主要原理性结果用于两个实际课题的计算.

9.1 Brown 运动

设系统的态变量自身做 Brown 运动, 同时在坐标空间漂移扩散传递, 如 Gauss 信道中的信号在空间的传递, 流体中的 Brown 粒子运动, 就是这方面的例子. 在这种过程中, 系统的信息熵和信息都将发生变化. 根据方程 (1), 描述此种系统的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial a}(ap) - v \frac{\partial p}{\partial x} + D \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} + Q \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (129)$$

这里, a 仍是系统的态变量, x 是态变量作为信息符号在坐标空间传递到达之处, β 是阻力系数. 设方程 (129) 的起始解为

$$p(a, x, t = 0) = (\pi\varepsilon_0)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(a - a_0)^2}{\varepsilon_0}\right] \times 2(\pi\varphi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{\varphi}\right), \quad (130)$$

则可得方程 (129) 的含时解为 [17]

$$\begin{aligned} p(a, x, t) &= (\pi\varepsilon_t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{[a - b(t)]^2}{\varepsilon_t}\right\} \\ &\times 2(\pi\varphi + 4\pi Qt)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - vt)^2}{(\varphi + 4Qt)}\right] \\ &= p(a, t)p(x, t), \end{aligned} \quad (131)$$

其中,

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \varepsilon_0 e^{-2\beta t} + \varepsilon_m(1 - e^{-2\beta t}), \\ b(t) &= b_0 e^{-\beta t}, \\ \varepsilon_m &= \frac{2D}{\beta}. \end{aligned}$$

显然, (131) 式满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} da \int_0^{\infty} dx p(a, x, t) = 1.$$

方程 (129) 的平衡态解为

$$\begin{aligned} p_m(a, x) &= p_m(a)p_m(x), \\ p_m(a) &= (\pi\varepsilon_m)^{-1/2} \exp\left(-\frac{a^2}{\varepsilon_m}\right), \\ p_m(x) &= \text{常数}, \end{aligned} \quad (132)$$

将 (131) 和 (132) 式代入 (85) 式, 即得该系统于 t 时的信息熵产生率为

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{d_i S}{dt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} da \int_0^{\infty} dx \left[Dp \left(\frac{\partial}{\partial a} \log \frac{p}{p_m} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + QP \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{p}{p_m} \right)^2 \right] \\ &= \beta \left[\frac{2b^2(t)}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_t} - 2 \right] \\ &\quad + \frac{2Q}{4Qt + \varphi} \geq 0. \end{aligned} \quad (133)$$

t 时信息熵产生率的时间变化率为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t)}{\partial t} &= -2\beta^2 \left[\frac{2b^2(t)}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_t^2} - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_t} - 1 \right] \\ &\quad - \frac{8Q^2}{(4Qt + \varphi)^2} \leq 0. \end{aligned} \quad (134)$$

该系统于 t 时的信息熵产生

$$\begin{aligned} \Delta_i S &= \int_0^t P(t) dt \\ &= \frac{b_0^2}{\varepsilon_m} (1 - e^{-2\beta t}) + \frac{1}{2} (e^{-2\beta t} - 1) \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_m} (1 - e^{-2\beta t}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon_m + (\varepsilon_0 - \varepsilon_m) e^{-2\beta t}}{\varepsilon_0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \frac{4Qt + \varphi}{\varphi} \geq 0. \end{aligned} \quad (135)$$

根据 (85) 式, 同样可求得该系统于 t 时的信息耗损率, 它的时间变化率及信息耗损为

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{d_i I}{dt} = -\frac{d_i S}{dt} \\ &= -\beta \left[\frac{2b^2(t)}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_t} - 2 \right] \\ &\quad - \frac{2Q}{4Qt + \varphi} \leq 0, \end{aligned} \quad (136a)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = 2\beta^2 \left[\frac{2b^2(t)}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_t^2} - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_t} - 1 \right]$$

$$+ \frac{8Q^2}{(4Qt + \varphi)^2} \geq 0, \quad (136b)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i I = & -\frac{b_0^2}{\varepsilon_m}(1 - e^{-2\beta t}) - \frac{1}{2}(e^{-2\beta t} - 1) \\ & - \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_m}(1 - e^{-2\beta t}) \\ & - \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon_m + (\varepsilon_0 - \varepsilon_m)e^{-2\beta t}}{\varepsilon_0} \\ & - \frac{1}{2} \ln \frac{4Qt + \varphi}{\varphi} \leq 0. \end{aligned} \quad (136c)$$

由(133)—(136)式可见: Brown运动的漂移扩散传递系统的始态 $t=0$ 的信息熵产生率 $P > 0$, 它的时间变化率 $\frac{\partial P}{\partial t} < 0$ 和信息熵产生 $\Delta_i S = 0$, 始态的信息耗损率 $P_i < 0$, 它的时间变化率 $\frac{\partial P_i}{\partial t} > 0$ 和信息耗损 $\Delta_i I = 0$; 终态 $t = t_f$ 的信息熵的 $P = 0$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ 和 $\Delta_i S > 0$, 信息的 $P_i = 0$, $\frac{\partial P_i}{\partial t} = 0$ 和 $\Delta_i I < 0$; 其他任何时间($0 < t < t_f$)的信息熵的 $P > 0$, $\frac{\partial P}{\partial t} < 0$ 和 $\Delta_i S > 0$, 信息的 $P_i < 0$, $\frac{\partial P_i}{\partial t} > 0$ 和 $\Delta_i I < 0$; (134)式正是该系统最小信息熵产生定理的表达式. 而(136b)式则可看成是该系统最小信息耗损定理的表达式.

将(131)和(132)式代入(81)式得该系统于 t 时流经 x 处的空间信息流密度为

$$\begin{aligned} J_x(t) = & vI_x(t) - Q \frac{\partial I_x}{\partial x} \\ = & \left\{ \left[v + \frac{2Q(x-vt)}{\varphi + 4Qt} \right] \left[\frac{b_t^2}{\varepsilon_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m} - \ln \frac{e\varepsilon_t}{\varepsilon_m} \right) \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \ln \frac{(\varphi + 4Qt_f)}{\varphi + 4Qt} - \frac{(x-vt)^2}{\varphi + 4Qt} \right] \\ & \left. + \frac{2Q(x-vt)}{\varphi + 4Qt} \right\} p(x, t), \end{aligned} \quad (137)$$

系统于 $t=0$ 时, 在 $x=0$ 处的信息流密度 $J_0(0)$ 与 $t=\tau$ 时传递至 $x=l$ 处的信息密度 $J_l(\tau)$ 之差为

$$\begin{aligned} J_0(0) - J_l(\tau) = & P_l(\tau) \\ = & v \left[\frac{p_{00}b_0^2 - P_{l\tau}b_\tau^2}{\varepsilon_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_{00}\varepsilon_0 - P_{l\tau}\varepsilon_\tau}{\varepsilon_m} \right. \right. \\ & \left. \left. - p_{00} \ln \frac{e\varepsilon_0}{\varepsilon_m} + p_{l\tau} \ln \frac{e\varepsilon_\tau}{\varepsilon_m} \right) \right. \\ & + \frac{p_{00}}{2} \ln \left(\frac{\varphi + 4Qt_f}{\varphi} \right) \\ & \left. - \frac{p_{l\tau}}{2} \ln \left(\frac{\varphi + 4Q\tau_f}{\varphi + 4Q\tau} \right) \right] > 0, \end{aligned} \quad (138)$$

其中, $\tau = l/v$, $p_{00} \equiv p(x=0, t=0) = 2(\pi\varphi)^{-1/2}$, $p_{l\tau} \equiv p(x=l, t=\tau) = 2(\pi\varphi + 4\pi Q\tau)^{-1/2}$, $P_l(\tau)$

为该系统的信息流密度在传递过程中的累积耗损. (137)和(138)式正是由(130)式表述的特殊动力学系统在非平衡传递过程中信息流密度随时空的变化式, 其中 $J_l(\tau)$ 和 $P_l(\tau)$ 随 τ 和 Q 的变化及物理意义, 留待与后面的(145)式一并讨论.

9.2 Gauss动态信道容量

在Shannon的静态信息论中, Gauss信道是个典型的例子, 它的信号和噪声都是Gauss分布的, 其单符号加性高斯信道容量公式为

$$C = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{P_a}{P_n} \right), \quad (139)$$

对于限带加性连续高斯信道, 其单位时间的信道容量公式为^[1-3]

$$C_t = W \ln \left(1 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \right) = W \ln \left(1 + \frac{P_a}{P_n} \right), \quad (140)$$

其中, W 为频带宽度; σ_a^2 和 σ_n^2 为输入信号和噪声的方差, 即两者的平均功率 P_a 和 P_n . (140)式就是著名的Shannon静态信道容量公式.

下面给出Gauss动态信道容量公式, 即Gauss分布的动态信号在信道中做漂移扩散传递的动态信道容量公式. 按前面所述, 信息传递是通过信息流实现的, 而信息流在信道传递途中由于存在累积耗损而会减小. 根据(81)和(137)式, 在Gauss信道中传递的信息, 它在 $t=\tau$ 时传递至输出端 $x=l$ 处的信息流密度 $J_l(\tau)$ 与 $t=0$ 时从输入端 $x=0$ 处发出的信息流密度 $J_0(0)$ 之比为

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{J_l(\tau)}{J_0(0)} \\ = & \left\{ \left[\frac{b_\tau^2}{\varepsilon_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_m} - \ln \frac{e\varepsilon_\tau}{\varepsilon_m} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{\varphi + 4Qt_f}{\varphi + 4Q\tau} \right] (\pi\varphi)^{1/2} \right\} \\ & \times \left\{ \left[\frac{b_0^2}{\varepsilon_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_m} - \ln \frac{e\varepsilon_0}{\varepsilon_m} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{\varphi + 4Qt_f}{\varphi} \right] (\pi\varphi + 4\pi Q\tau)^{1/2} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (141)$$

根据(141)和(125)式, 在Gauss信道中, 若 $t=0$ 时, 从输入端 $x=0$ 处发出的信息为

$$H(A_0(0)) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e\sigma_a^2), \quad (142)$$

则它于 $t=\tau$ 时, 传递到输出端 $x=l$ 处变为

$$\begin{aligned} H(A_l(\tau)) = & \delta H(A_0(0)) \\ = & \frac{\delta}{2} \ln(2\pi e\sigma_a^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_{a_l}^2), \quad (143)$$

其中

$$\sigma_{a_l}^2 = (2\pi e)^{\delta-1} \sigma_a^{2\delta}. \quad (144)$$

(143) 式仍是 Gauss 分布的信号, 只是其平均功率由 σ_a^2 减小为 $\sigma_{a_l}^2$. 将 (141) 和 (143) 代入 (128) 式并利用 (140) 式的算法, 即得单符号加性高斯信道的动态信道容量公式和限带加性连续 Gauss 信道的单位时间的动态信道容量公式分别为 [8]

$$C = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{(2\pi e)^{\delta-1} \sigma_a^{2\delta}}{\sigma_n^2} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{(2\pi e)^{\delta-1} P_a^\delta}{P_n} \right], \quad (145)$$

$$C_{td} = W \ln \left[1 + \frac{(2\pi e)^{\delta-1} \sigma_a^{2\delta}}{\sigma_n^2} \right] = W \ln \left[1 + \frac{(2\pi e)^{\delta-1} P_a^\delta}{P_n} \right]. \quad (146)$$

由 (141) 式可见, δ 与传递时间 $\tau = l/v$ 即信道长度 l 、传递速度 v 及空间噪声强度 Q 有关. 当 $\tau = l/v \rightarrow 0$ 即 $l \rightarrow 0$ 或 $v \rightarrow \infty$, 则 $\delta = 1$, $J_l(\tau) = J_0(0)$. 这种情况下, 信息在信道途中累积耗损 $H(Q_l(\tau)) = 0$, $\sigma_{a_l}^2 = \sigma_a^2$, 动态信道容量公式 (145) 和 (146) 还原为静态信道容量公式 (139) 和 (140). 实际上, $\tau = l/v \rightarrow 0$ 物理上意味着输入端和输出端两点缩短为一点, 噪声当然亦集中于这一点, 这就是现有的静态通信模型. 当 $\tau = l/v \rightarrow \infty$ 即 $l \rightarrow \infty$ 或 $v \rightarrow 0$, 或 $Q \rightarrow \infty$, 则 $\delta = 0$, $J_l(\tau) = 0$. 这种情况下, $H(Q_l(\tau)) = H(A_0(0))$, $H(A_l(\tau)) = 0$, 信源发出符号 $A_0(0)$ 的信息全部耗损于传递途中, 在输出端收不到有关它的任何信息. 在其他一般情况下, 即当 $0 < \tau < \infty$ 且 $0 < Q < \infty$, 则 $0 < \delta < 1$, $\sigma_{a_l}^2 < \sigma_a^2$, Gauss 动态信道容量都小于其静态信道容量. 这些结果就是 Gauss 信道的动态信道容量对其静态信道容量的修正.

迄今为止, 本文上述结果都是基于动态信息熵 (2) 式和动态信息 (10) 式. 若从动态信息 (10a) 出发, 将 (131) 代入 (81a) 式, 即可求得 Gauss 信道中由于传递途中存在累积耗损于终态和始态时空两点的信息流密度之比

$$\delta = \frac{J_l(\tau)}{J_0(0)} = \frac{(\pi\varphi)^{1/2} \ln[(\pi e \varepsilon_\tau) (\pi\varphi + 4\pi Q\tau)]}{(\pi\varphi + 4\pi Q\tau)^{1/2} \ln[(\pi e \varepsilon_0) (\pi\varphi)]}. \quad (141a)$$

(141a) 和 (141) 式的物理意义是相同的, 两者的差别来自其计算的出发点稍有不同. 若用 (141a) 式代替 (141) 式来计算 Gauss 信道的动态信道容量公式 (145) 和 (146), 定量的数值虽稍有差别, 但定性的结果与上述讨论的完全相同.

10 结 论

动态统计信息理论是研究动态信息演化规律及其应用的信息理论. 它的核心则是表述这种演化规律的动态信息 (熵) 演化方程. 基于动力学系统的态变量概率密度演化方程可看成信息符号演化方程和动态信息 (熵) 定义的结合, 推导出了服从随机性规律的随机动力学系统、非平衡态经典统计物理系统和量子统计物理系统及遵守确定性规律的电动力学系统的动态信息 (熵) 演化方程. 它们表明: 当信息在系统之外的坐标空间传递时, 对于服从随机性规律的系统, 动态信息 (熵) 密度随时间的变化率是由其在系统内部的态变量空间和传递过程的坐标空间的漂移、扩散和耗损 (产生) 三者引起的; 对于遵守确定性规律的系统, 动态信息 (熵) 演化方程与前者的相比, 除动态信息 (熵) 密度在系统内部的态变量空间仅有漂移外, 其余全相同. 当空间噪声可略去时, 将会出现信息波.

若仅研究动力学系统内部的信息变化, 不考虑信息在系统之外的坐标空间传递, 则上述四种动态信息演化方程就仅随系统内部的态变量变化, 而与系统之外的坐标空间无关. 这些信息方程, 既可看成是表述动力学系统的动态信息的演化规律, 亦可看成是动力学方程的信息表述, 即用信息方程表述动力学系统的演化规律, 从而把系统的演化过程抽象成信息的演化过程.

基于各动态信息 (熵) 演化方程, 推导出了各种信息 (熵) 流公式、信息耗损率公式和熵产生率公式及动力学系统退化和进化的统一信息表述公式. 信息 (熵) 流公式, 包括系统外部坐标空间的和系统内部态变量空间的, 都是由漂移信息 (熵) 流公式和扩散信息 (熵) 流公式两者的代数和组成. 漂移信息 (熵) 流是定向的, 扩散信息 (熵) 流则总是从一个信息 (熵) 高密度区流向各方向的信息 (熵) 低密度区. 信息耗损和熵产生, 对于服从随机性规律的系统, 既发生于系统内部的态变量空间, 亦发生于系统外部的坐标空间; 而对于遵守确定性规律的系统, 则

仅发生于系统外部的坐标空间. 信息耗损率和熵产生率, 两者都等于随机噪声强度与系统离开平衡率梯度平方的乘积之平均值. Fisher 信息则等于 Shannon 信息耗损率或熵产生率.

动态互信息公式和动态信道容量公式包含了信息流在传递过程中的动态耗损特性, 仅在传递时间即信道长度和信号传递速度之比趋于零的极限情况下才变为其极大值——现有静态互信息公式和静态信道容量公式. 当信息(熵)演化方程中的信

息(熵)密度仅是态变量的函数, 而不随时间和空间变化时, 熵产生或信息耗损亦等于零, 这正是静态或平衡态统计信息理论的情况. 可见现有 Shannon 静态统计信息理论可看成是动态统计信息理论的一个与时空过程无关的特殊部分.

最后给出了描述动态信息理论框架的方块图, 其中动态信息演化方程起着核心作用, 建立此方程的基本出发点及由它推导出和预言的各种结果的相互关系如图 1 所示.

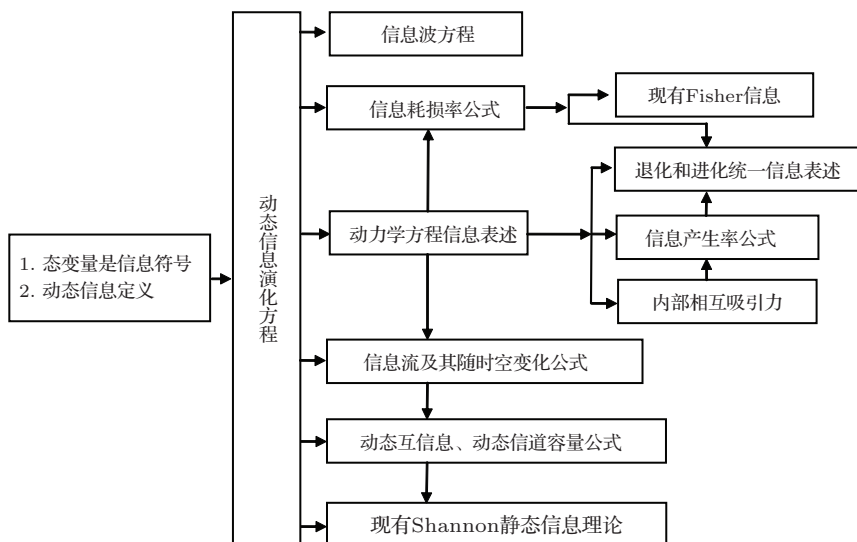


图1 动态信息理论方块图

参考文献

[1] Cover T M, Thomas J A 1991 *Elements of Information Theory* (New York: John Wiley and Sons)
 [2] Zhu X L 2000 *Fundamentals of Applied Information Theory* (Beijing: Tsinghua University Press) (in Chinese) [朱雪龙 2000 应用信息论基础 (北京:清华大学出版社)]
 [3] Zhong Y X 1996 *Principles of Information Science* (Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications Press) (in Chinese) [钟义信 1996 信息科学原理 (北京:北京邮电大学出版社)]
 [4] Wiener N 1948 *Cybernetics* (Cambridge: MIT Press)
 [5] Hofkirchner W 1996 *The Quest for a Unified Theory of Information* (Amsterdam: Gordon and Breach Publishers)
 [6] Xing X S 2004 *Trans. Beijing Inst. Technol.* **24** 1 (in Chinese) [邢修三 2004 北京理工大学学报 **24** 1]

[7] Xing X S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2852 (in Chinese) [邢修三 2004 物理学报 **53** 2852]
 [8] Xing X S 2006 *Sci. China G* **49** 1
 [9] Xing X S 2010 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **53** 607
 [10] Xing X S 2001 *Sci. China A* **44** 1331
 [11] Yang Z R 2007 *Quantum Statistical Physics* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [杨展如 2007 量子统计物理 (北京:高等教育出版社)]
 [12] Xing X S 1996 *Sci. China A* **39** 1193
 [13] Xing X S 1998 *Int. J. Mod. Phys. B* **12** 2005
 [14] Xing X S 2010 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **53** 2194
 [15] Xing X S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2969 (in Chinese) [邢修三 2003 物理学报 **52** 2969]
 [16] Frieden B R 1998 *Physics from Fisher Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
 [17] Haken H 1983 *Synergetics* (Berlin: Springer Verlag)

REVIEW

On dynamic information theory

Xing Xiu-San[†]*(Department of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)*

(Received 5 June 2014; revised manuscript received 28 July 2014)

Abstract

In this paper, the author presents an overview on his own research works. In recent ten years, we extended the present static statistical information theory to dynamic processes and established a dynamic statistical information theory whose core is the dynamic information evolution equation describing the evolution law of dynamic information. Starting from the idea that the state variable probability density evolution equations of the stochastic dynamic system, the classical and quantum nonequilibrium statistical physical systems obeying stochastic law and the electrodynamic system obeying deterministic law can be regarded as their information symbol evolution equations and the definitions of dynamic information and dynamic entropy, we derived the evolution equations of dynamic information and dynamic entropy that express the evolution laws of dynamic information. These show that for the dynamic systems obeying a stochastic law, the time rate of change of dynamic information densities originates from their drift, diffusion and dissipation in state variable space inside the systems and coordinate space in the transmission processes, and that the time rate of change of dynamic entropy densities is caused by their drift, diffusion and production in state variable space inside the systems and coordinate space in the transmission processes. For the dynamic systems obeying the deterministic law, the evolution equations of dynamic information and dynamic entropy are the same mathematical type as the former except that dynamic information (entropy) density only has drift in state variable space inside the systems. Information and entropy have been connected with the state and change law of the system. Information diffusion and information dissipation occur at the same time. When the space noise can be neglected, information wave will appear. If we only consider the information change inside the systems, the dynamic information evolution equations reduce to information equations corresponding to the dynamic equations which express evolution laws for the above dynamic systems. This reveals that the evolution laws of the respective dynamic systems can be expressed by information equations in a unified fashion. Furthermore, we have presented the formulas for drift and diffusion information flow, information dissipation rate, and entropy production rate and a unified information expression for degradation and self-organizing evolution. Obtained the dynamic mutual information and dynamic channel capacity reflecting the dynamic dissipative character in transmission process, in when in the limiting case the ratio of channel length to signal transmission rate approaches zero, reduces itself to the present static mutual information and static channel capacity. All these new theoretical formulas and results are derived from the dynamic information evolution equation.

Keywords: dynamic information evolution equation, information wave, information flow, dynamic channel capacity

PACS: 02.50.Ey, 05.40.-a, 89.70.-a, 89.70.Cf

DOI: [10.7498/aps.63.230201](https://doi.org/10.7498/aps.63.230201)

[†] Corresponding author. E-mail: xingxiusan@gmail.com