

(2+1) 维改进的 Zakharov-Kuznetsov 方程的无穷序列复合型类孤子新解

尹君毅

New infinite sequence complexion soliton-like solutions of (2+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov modified equal width equation

Yin Jun-Yi

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica 63, 230202 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.230202

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.230202>

当期内容 View Table of Contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/volumn/home.shtml>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

变系数 Whitham-Broer-Kaup 方程组的对称、约化及精确解

刘勇, 刘希强

2014, 63(20): 200200. 全文: [PDF](#) (0KB)

Kaup-Kupershmidt 方程的非局域对称及新的精确解

王振立, 刘希强

2014, 63(18): 180205. 全文: [PDF](#) (1722KB)

扩展的 (G'/G) 展开法和 Zakharov 方程组的新精确解

尹君毅

2013, 62(20): 200202. 全文: [PDF](#) (126KB)

Broer-Kau-Kupershmidt 方程组的对称、约化和精确解

李宁, 刘希强

2013, 62(16): 160203. 全文: [PDF](#) (136KB)

带源项的变系数非线性反应扩散方程的精确解

万晖

2013, 62(9): 090203. 全文: [PDF](#) (140KB)

(2+1)维改进的Zakharov-Kuznetsov方程的无穷序列复合型类孤子新解*

尹君毅†

(河南农业大学信息与管理科学学院, 郑州 450002)

(2014年6月7日收到; 2014年7月26日收到修改稿)

对 (G'/G) 展开法做了进一步的研究, 利用两次函数变换将二阶非线性辅助方程的求解问题转化为一元二次代数方程与 Riccati 方程的求解问题. 借助 Riccati 方程的 Bäcklund 变换及解的非线性叠加公式获得了辅助方程的无穷序列解. 这样, 利用 (G'/G) 展开法可以获得非线性发展方程的无穷序列解, 这一方法是对已有方法的扩展, 与已有方法相比可获得更丰富的无穷序列解. 以 $(2+1)$ 维改进的 Zakharov-Kuznetsov 方程为例得到了它的无穷序列新精确解. 这一方法可以用来构造其他非线性发展方程的无穷序列解.

关键词: (G'/G) 展开法, 改进的 Zakharov-Kuznetsov 方程, 精确解

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik, 02.30.Hq

DOI: 10.7498/aps.63.230202

1 引言

求非线性发展方程的精确解是非线性数学物理问题的重要内容. 多年来, 人们提出了齐次平衡法、双曲函数展开法及椭圆函数展开法等多种有效的求解方法^[1-12]. 近期, Wang 等^[13]提出了 (G'/G) 展开法, 文献^[14-18]利用 (G'/G) 展开法分别求出了某些非线性发展方程的有限多个精确解. 文献^[19-21]进一步研究了方程

$$aG''(\xi) + bG'(\xi) + cG(\xi) = 0, \quad (1)$$

其中, a, b, c 是常数. 文献^[19-21]得到了方程(1)的如下复合型无穷序列解:

$$\begin{aligned} G(\xi) = & C_1 \exp\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\xi\right) \\ & + C_2 \exp\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\xi\right) \\ & + \exp\left(\int z(\xi)d\xi\right) \quad (b^2 - 4ac > 0), \quad (2) \\ G(\xi) = & \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}\xi\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}\xi\right) \right] \exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right) \\ & + \exp\left(\int z(\xi)d\xi\right) \quad (b^2 - 4ac < 0), \quad (3) \end{aligned}$$

(2), (3) 式中的 C_1, C_2 是任意常数, z 满足如下 Riccati 方程:

$$a(z'(\xi) + z^2(\xi)) + bz(\xi) + c = 0. \quad (4)$$

根据(1), (2), (3) 式及方程(4)的 Bäcklund 变换与非线性叠加公式可求非线性发展方程的无穷序列解.

以下式为辅助方程的 (G'/G) 展开法是以(1)式为辅助方程的 (G'/G) 展开法的扩展,

$$G''G = \alpha G'^2 + \beta GG' + \gamma G^2, \quad (5)$$

其中, α, β, γ 是常数. 当 $\alpha = 0, \beta = -b/a, \gamma = -c/a$ 时, 辅助方程(5)化为方程(1). 以(5)式为辅助方程并利用解(2), (3)式可以构造非线性发展方程的有限多个精确解^[10].

$(2+1)$ 维改进的 Zakharov-Kuznetsov 方程 (Zakharov-Kuznetsov modified equal width, ZK-

* 河南农业大学基金(批准号: 30300204)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yy2000211@163.com

MEW) 为^[22–24]

$$u_t + 3\delta u^2 u_x + \sigma(u_{xxt} + u_{xyy}) = 0, \quad (6)$$

其中, δ, σ 为实值常数. 文献^[22–24]分别利用李群分析法、 $\tanh$ 和 sine-cosine 函数展开法得到了该方程的若干精确解.

本文进一步研究了 (G'/G) 展开法, 在文献^[19–21]的基础上, 研究利用辅助方程 (5) 获得非线性发展方程的无穷序列解的方法. 为此, 首先利用两次函数变换将二阶非线性辅助方程 (5) 的求解问题转化为一元二次代数方程与 Riccati 方程的求解问题, 然后利用 Riccati 方程的解及解的非线性叠加公式获得了方程 (5) 的无穷序列解. 这样, 适当选择非线性发展方程的形式解并利用方程 (5) 的无穷序列解即可获得非线性发展方程的无穷序列解. 以 (2+1) 维 ZK-MEW 方程为例, 利用本方法得到了该方程的无穷序列复合型新解. 这一方法是在文献^[19–21]的基础上对已有方法的扩展, 与已有方法相比可获得更丰富的无穷序列解.

2 二阶常系数非线性辅助方程的复合型新解

本文利用下面两式两个函数变换得到了二阶常系数非线性方程 (5) 的无穷序列复合型新解:

$$G = \nu^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (7)$$

$$\nu(\xi) = \exp(r\xi) + \exp\left(\int z(\xi) d\xi\right). \quad (8)$$

这里, $\alpha \neq 1$, r 是待定常数, z 是 Riccati 方程的解. 将函数变换 (7) 式代入方程 (5) 得

$$\nu'' - \beta\nu' + \gamma(\alpha - 1)\nu = 0. \quad (9)$$

将函数变换 (8) 式代入方程 (9), 并令 $\exp(r\xi)$ 和 $\exp\left(\int z(\xi) d\xi\right)$ 的系数为零, 得

$$r^2 - \beta r + \gamma(\alpha - 1) = 0, \quad (10)$$

$$z'(\xi) + z^2(\xi) - \beta z(\xi) + \gamma(\alpha - 1) = 0. \quad (11)$$

经计算并利用变换 (7) 式得到方程 (5) 的解:

$$\begin{aligned} G(\xi) = & \left[\left(C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2}\xi\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2}\xi\right) \right) \right. \\ & \left. \times \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) + \exp\left(\int z(\xi) d\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

$$(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma > 0), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} G(\xi) = & \left[\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2}\xi\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2}\xi\right) \right) \right. \\ & \left. \times \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) + \exp\left(\int z(\xi) d\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ & (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma < 0), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\xi) = & \left[(C_1 + C_2\xi) \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) \right. \\ & \left. + \exp\left(\int z(\xi) d\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ & (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma = 0). \quad (14) \end{aligned}$$

(12)–(14) 式中的 z 由 Riccati 方程 (11) 确定. 利用文献^[19–21]的某些结论获得 Riccati 方程 (11) 的四个结论.

结论 1 Riccati 方程 (11) 的解.

$$\begin{aligned} z(\xi) = & \frac{1}{2} \left[\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma} \right. \\ & \left. \times \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}\xi\right) \right] \\ & (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma > 0), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\xi) = & \frac{1}{2} \left[\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma} \right. \\ & \left. \times \coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}\xi\right) \right] \\ & (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma > 0), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\xi) = & \frac{1}{2} \left[\beta + \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma} \right. \\ & \left. \times \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}\xi\right) \right] \\ & (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma < 0), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\xi) = & \frac{1}{2} \left[\beta + \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma} \right. \\ & \left. \times \cot\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}\xi\right) \right] \\ & (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma < 0), \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\xi) = & \frac{2M_1 + \beta(M_1\xi + M_2)}{2(M_1\xi + M_2)} \\ & (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma = 0). \quad (19) \end{aligned}$$

结论 2 Riccati 方程 (11) 的 Bäcklund 变换.

若 $z(\xi)$ 是方程 (11) 的解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也

是方程 (11) 的解^[19-21]:

$$\bar{z}(\xi) = \frac{B(\alpha-1)\gamma - sz(\xi)}{B\beta - s - Bz(\xi)}, \quad (20)$$

$$\bar{z}(\xi) = \beta + \frac{-\beta A}{A + Rz(\xi) + \beta Bz^2(\xi)}. \quad (21)$$

结论 3 Riccati 方程 (11) 的非线性叠加公式.

若 $z_1(\xi)$, $z_2(\xi)$, $z_3(\xi)$ 是 Riccati 方程 (11) 的三个解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (11) 的解^[19-21]:

$$\begin{aligned} \bar{z}(\xi) &= \{\gamma(1-\alpha)Nz_3(\xi) + [\gamma(\alpha-1)(L+N) \\ &+ (\gamma(\alpha-1)d - \beta N)z_2(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (\gamma(\alpha-1)l - \beta L)z_3(\xi)]z_1(\xi) + \Upsilon(\xi)z_2(\xi)\} \\ &\times \{\gamma(1-\alpha)dz_3(\xi) + [\gamma(\alpha-1)(l+d) \\ &- Nz_2(\xi) - Lz_3(\xi)]z_1(\xi) \\ &+ [\gamma(1-\alpha)l + (L+N)z_3(\xi)]z_2(\xi)\}^{-1}. \quad (22) \end{aligned}$$

在 (19)–(22) 式中 $\Upsilon(\xi) = \gamma(1-\alpha)L - [\gamma(\alpha-1)(l+d) - \beta(L+N)]z_3(\xi)$, 其中, $\alpha \neq 1$; $\beta, \gamma, L, N, A, B, l, d, R, s, M_1, M_2$ 是不全为零的任意常数.

结论 4 计算 $\exp\left(\int z(\xi)d\xi\right)$ 的三种结果.

将解 (15)–(19) 分别代入 (20)–(22) 式后得到如下无穷函数序列:

$$\exp\left(\int z_k(\xi)d\xi\right) = \exp\left[\int \left(\frac{B(\alpha-1)\gamma - sz_{k-1}(\xi)}{B\beta - s - Bz_{k-1}(\xi)}\right)d\xi\right] \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (23)$$

$$\exp\left(\int z_k(\xi)d\xi\right) = \exp\left[\int \left(\beta + \frac{-\beta A}{-A\beta + Rz_{k-1}(\xi) + \beta Bz_{k-1}^2(\xi)}\right)d\xi\right] \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (24)$$

$$\exp\left(\int z_k(\xi)d\xi\right) = \exp\left[\int \left(\frac{\gamma(1-\alpha)Nz_{k-1}(\xi) + \Upsilon_1(\xi)z_{k-3}(\xi) + \Upsilon_2(\xi)z_{k-2}(\xi)}{d\gamma(1-\alpha)z_{k-1}(\xi) + \Upsilon_4(\xi)z_{k-3}(\xi) + \Upsilon_3(\xi)}\right)d\xi\right]. \quad (25)$$

在 (23)–(25) 式中

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(\xi) &= \gamma(\alpha-1)(L+N) \\ &+ (\gamma(\alpha-1)d - \beta N)z_{k-2}(\xi) \\ &+ (\gamma(\alpha-1)l - \beta L)z_{k-1}(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_2(\xi) &= \gamma(1-\alpha)L - [\gamma(\alpha-1)(l+d) \\ &- \beta(L+N)]z_{k-1}(\xi), \end{aligned}$$

$$\Upsilon_3(\xi) = [-\gamma(\alpha-1)l + (L+N)z_{k-1}(\xi)]z_{k-2}(\xi),$$

$$\Upsilon_4(\xi) = \gamma(\alpha-1)(l+d) - Nz_{k-2}(\xi) - Lz_{k-1}(\xi),$$

$\alpha \neq 1$; $\beta, \gamma, L, N, A, B, l, d, R, s$ 是不全为零的任意常数.

3 ZK-MEW 方程的无穷序列复合型类孤子新精确解

根据以上得到的结论, 可以构造 (2+1) 维 ZK-MEW 方程的有限多个类孤子新精确解和无穷序列复合型类孤子新精确解. 下面利用辅助方程 (5) 及其相关的结论, 构造 (2+1) 维 ZK-MEW 方程的无穷序列复合型类孤子新精确解. 设方程 (6) 有如下形式的解:

$$u(x, y, t) = A_0 + A_1$$

$$\times \frac{G'(x + \kappa y + \lambda t)}{nG(x + \kappa y + \lambda t) + mG'(x + \kappa y + \lambda t)}, \quad (26)$$

其中, $A_0, A_1, \kappa, \lambda, m, n$ 是待定常数. 将 (26) 和 (5) 式代入 (6) 式, 并令 $G^j(\xi)(G'(\xi))^i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$; $i + j = 4$; $\xi = x + \kappa y + \lambda t$) 的系数为零, 就得到一个关于变量 $A_0, A_1, \kappa, \lambda, m, n$ 的非线性代数方程组, 利用 Mathematica 求解此方程组得到许多组解. 这里给出最具代表性的一组解:

$$\begin{aligned} A_0 &= \pm \frac{n\beta - 2m\gamma}{2n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}}, \\ A_1 &= \pm \frac{(\alpha-1)n^2 + \gamma m^2 - mn\beta}{n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}}, \\ \lambda &= \frac{\sigma\kappa^2(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}{2 - \sigma(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}, \end{aligned} \quad (27)$$

式中 m, n 为任意常数.

3.1 (2+1) 维 ZK-MEW 方程的有限多个类孤子新精确解

对于方程 (5) 的解 (12)–(14) 式, 当 $z(\xi) = 0$ 时, 二阶常微分方程 (5) 存在如下解:

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \left[\left(C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2}\xi\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2}\xi\right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right)\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma > 0), \quad (28)$$

$$G(\xi) = \left[\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2}\xi\right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2}\xi\right) \right) \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma < 0), \quad (29)$$

$$G(\xi) = \left[(C_1 + C_2\xi) \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma = 0). \quad (30)$$

利用(28)–(30)式可以构造(2+1)维 ZK-MEW 方程的有限多个类孤子新精确解。

情形 1 把(27), (28)式代入(26)式后可以获得(2+1)维 ZK-MEW 方程的指数函数型类孤子新精确解:

$$u = \pm \frac{n\beta - 2m\gamma}{2n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\ \pm \frac{(\alpha - 1)n^2 + \gamma m^2 - mn\beta}{n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\ \times \frac{G'(x + \kappa y + \lambda t)}{nG(x + \kappa y + \lambda t) + mG'(x + \kappa y + \lambda t)}, \\ G(\xi) = \left[\left(C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2}\xi\right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2}\xi\right) \right) \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma > 0), \quad (31)$$

其中, $\xi = x + \kappa y + \lambda t$, $\lambda = \frac{\sigma\kappa^2(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}{2 - \sigma(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}$.

情形 2 把(27), (29)式代入(26)式后可以获得(2+1)维 ZK-MEW 方程的三角函数型类孤子新精确解:

$$u = \pm \frac{n\beta - 2m\gamma}{2n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}}$$

$$\pm \frac{(\alpha - 1)n^2 + \gamma m^2 - mn\beta}{n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\ \times \frac{G'(x + \kappa y + \lambda t)}{nG(x + \kappa y + \lambda t) + mG'(x + \kappa y + \lambda t)}, \\ G(\xi) = \left[\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2}\xi\right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2}\xi\right) \right) \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma < 0), \quad (32)$$

其中, $\xi = x + \kappa y + \lambda t$, $\lambda = \frac{\sigma\kappa^2(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}{2 - \sigma(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}$.

情形 3 把(27), (30)式代入(26)式后可以获得(2+1)维 ZK-MEW 方程的有理函数型类孤子新精确解:

$$u = \pm \frac{n\beta - 2m\gamma}{2n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\ \pm \frac{(\alpha - 1)n^2 + \gamma m^2 - mn\beta}{n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\ \times \frac{G'(x + \kappa y + \lambda t)}{nG(x + \kappa y + \lambda t) + mG'(x + \kappa y + \lambda t)}, \\ G(\xi) = \left[(C_1 + C_2\xi) \exp\left(\frac{\beta}{2}\xi\right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma = 0), \quad (33)$$

其中, $\xi = x + \kappa y + \lambda t$, $\lambda = \frac{\sigma\kappa^2(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}{2 - \sigma(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}$.

3.2 (2+1)维 ZK-MEW 方程的无穷多个复合型类孤子新精确解

利用 Riccati 方程(11)的 Bäcklund 变换(20), (21)式和解的非线性叠加(22)式可以获得非线性发展方程的无穷序列复合型类孤子新精确解。下面利用以上结论构造(2+1)维 ZK-MEW 方程的无穷序列复合型类孤子新精确解。

情形 1 指数函数型无穷序列类孤子新精确解。

通过下列公式, 可以获得(2+1)维 ZK-MEW 方程的指数函数型无穷序列类孤子新精确解。

$$u_k = \pm \frac{n\beta - 2m\gamma}{2n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \pm \frac{(\alpha - 1)n^2 + \gamma m^2 - mn\beta}{n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\ \times \frac{G'_k(x + \kappa y + \lambda t)}{nG_k(x + \kappa y + \lambda t) + mG'_k(x + \kappa y + \lambda t)},$$

$$\begin{aligned}
 G_k(\xi) &= \left\{ \left[C_1 \sinh \left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2} \xi \right) + C_2 \cosh \left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma}}{2} \xi \right) \right] \right. \\
 &\quad \times \exp \left(\frac{\beta}{2} \xi \right) + \exp \left(\int z_k(\xi) d\xi \right) \left. \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\
 \exp \left(\int z_k(\xi) d\xi \right) &= \exp \left[\int \left(\beta + \frac{-\beta A}{-A\beta + Rz_{k-1}(\xi) + \beta Bz_{k-1}^2(\xi)} \right) d\xi \right], \\
 z_0(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma} \xi \right) \right] \\
 &\quad (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma > 0; k = 1, 2, 3, \dots),
 \end{aligned} \tag{34}$$

其中 $\xi = x + \kappa y + \frac{\sigma\kappa^2(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}{2 - \sigma(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}t$.

情形2 指数函数与三角函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

通过下列公式, 可以获得 $(2+1)$ 维 ZK-MEW 方程的指数函数与三角函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

$$\begin{aligned}
 u_k &= \pm \frac{n\beta - 2m\gamma}{2n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \pm \frac{(\alpha - 1)n^2 + \gamma m^2 - mn\beta}{n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\
 &\quad \times \frac{G'_k(x + \kappa y + \lambda t)}{nG_k(x + \kappa y + \lambda t) + mG'_k(x + \kappa y + \lambda t)}, \\
 G_k(\xi) &= \left\{ \left[C_1 \sin \left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2} \xi \right) + C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma}}{2} \xi \right) \right] \exp \left(\frac{\beta}{2} \xi \right) \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left(\int z_k(\xi) d\xi \right) \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\
 \exp \left(\int z_k(\xi) d\xi \right) &= \exp \left[\int \left(\beta + \frac{-\beta A}{-A\beta + Rz_{k-1}(\xi) + \beta Bz_{k-1}^2(\xi)} \right) d\xi \right], \\
 z_0(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\beta + \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 4\gamma} \xi \right) \right] \\
 &\quad (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma < 0; k = 1, 2, 3, \dots),
 \end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\xi = x + \kappa y + \frac{\sigma\kappa^2(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}{2 - \sigma(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}t$.

情形3 指数函数与有理函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

通过下列公式, 可以获得 $(2+1)$ 维 ZK-MEW 方程的指数函数与有理函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

$$\begin{aligned}
 u_k &= \pm \frac{n\beta - 2m\gamma}{2n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \pm \frac{(\alpha - 1)n^2 + \gamma m^2 - mn\beta}{n} \sqrt{\frac{2\sigma(\lambda + \kappa^2)}{-\delta}} \\
 &\quad \times \frac{G'_k(x + \kappa y + \lambda t)}{nG_k(x + \kappa y + \lambda t) + mG'_k(x + \kappa y + \lambda t)}, \\
 G_k(\xi) &= \left[(C_1 + C_2\xi) \exp \left(\frac{\beta}{2} \xi \right) + \exp \left(\int z_k(\xi) d\xi \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\
 \exp \left(\int z_k(\xi) d\xi \right) &= \exp \left[\int \left(\beta + \frac{-\beta A}{-A\beta + Rz_{k-1}(\xi) + \beta Bz_{k-1}^2(\xi)} \right) d\xi \right], \\
 z_0(\xi) &= \frac{2M_1 + \beta(M_1\xi + M_2)}{2(M_1\xi + M_2)} \quad (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma = 0; k = 1, 2, 3, \dots),
 \end{aligned} \tag{36}$$

其中

$$\xi = x + \kappa y + \frac{\sigma \kappa^2 (\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)}{2 - \sigma(\beta^2 + 4\gamma - 4\alpha\gamma)} t.$$

以上各式中的 α 均假设 $\alpha \neq 1$.

4 结 论

文献[19]首次运用 (G'/G) 展开法及辅助方程(1)获得了非线性发展方程的无穷序列解. 文献[20, 21]利用该方法并选择不同形式的解分别获得了带强迫项的变系数KdV方程及Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff方程的无穷序列解. 本文利用函数变换得到了二阶非线性辅助方程(5)的无穷序列解. 这样, 利用 (G'/G) 展开法及解(12)—(14)式可以获得非线性发展方程的无穷序列解, 这一方法是在文献[19—21]的基础上对其所用方法的扩展, 与已有方法相比可获得更丰富的无穷序列解. 本文以(2+1)维ZK-MEW方程为例得到了该方程的无穷序列复合型类孤子新解. 这一方法可以用来构造其他非线性发展方程的无穷序列解.

参考文献

- [1] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Phys. Lett. A* **289** 69
- [2] Zhang S 2007 *Phys. Lett. A* **368** 470
- [3] Wu J P 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 060207
- [4] Zuo J M, Zhang Y M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010205
- [5] Li Z B, Zhang S Q 1997 *Acta Math. Sin.* **17** 81 (in Chinese) [李志斌, 张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]
- [6] Wang M L 1995 *Acta Lett. A* **199** 169
- [7] Shi L F, Chen C S, Zhou X C 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100507
- [8] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984
- [9] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Chaos, Soliton. Fract.* **20** 765
- [10] Alam M N, Akbar M A, Mohyud-Din S T 2014 *Chin. Phys. B* **23** 020203
- [11] Qiang J Y, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090305
- [12] Gepreel K A, Omran S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 110204
- [13] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417
- [14] Bekir A, Ayhan B, Özer M N 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010202
- [15] Shehata A R 2010 *Appl. Math. Comput.* **217** 1
- [16] Zayed E M E 2009 *J. Appl. Math. Comput.* **30** 89
- [17] Inca M, Ulutas E, Biswasc A 2013 *Chin. Phys. B* **22** 060204
- [18] Zhao Y L, Liu Y P, Li Z B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030306
- [19] Taogetusang 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070202 (in Chinese) [套格图桑 2013 物理学报 **62** 070202]
- [20] Taogetusang 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 210201 (in Chinese) [套格图桑 2013 物理学报 **62** 210201]
- [21] Yi L N, Taogetusang 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 030201 (in Chinese) [伊丽娜, 套格图桑 2014 物理学报 **63** 030201]
- [22] Khaliq C M 2011 *Math. Comput. Model.* **54** 184
- [23] Wazwaz A M 2005 *Int. J. Comput. Math.* **82** 699
- [24] Wazwaz A M 2006 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **11** 148

New infinite sequence complex soliton-like solutions of (2+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov modified equal width equation^{*}

Yin Jun-Yi[†]

(College of Information and Management Science, Henan Agricultural University, Zhengzhou 450002, China)

(Received 7 June 2014; revised manuscript received 26 July 2014)

Abstract

The (G'/G) -expansion method is further studied, the solution to the second-order nonlinear auxiliary equation is changed into solving of one unknown quadratic equation and Riccati equation by two function transformations. An infinite sequence solution of auxiliary equation is obtained with the help of Bäcklund transformation of Riccati equation and nonlinear superposition formula of the solution. In this way, the infinite sequence solution to the nonlinear evolution equation can be obtained by the (G'/G) -expansion method, this method is an extension of existing methods, which can get more infinite series solutions. Take the (2+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov modified equal width equation as an example to obtain the new infinite sequence solution. This method can be used to get the infinite sequence solution to other nonlinear evolution equations.

Keywords: (G'/G) -expansion method, Zakharov-Kuznetsov modified equal width equation, exact solutions

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik, 02.30.Hq

DOI: [10.7498/aps.63.230202](https://doi.org/10.7498/aps.63.230202)

^{*} Project supported by the Henan Agricultural University Foundation, China (Grant No. 30300204).

[†] Corresponding author. E-mail: yiy2000211@163.com