物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

参数不确定的分数阶混沌系统广义错位延时投影同步

李睿　张广军　姚宏　朱涛　张志浩

Generalized dislocated lag projective synchronization of fractional chaotic systems with fully uncertain parameters

Li Rui　Zhang Guang-Jun　Yao Hong　Zhu Tao　Zhang Zhi-Hao

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica 63, 230501 (2014)　**DOI:** 10.7498/aps.63.230501
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.230501
当期内容 View Table of Contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/volumn/home.shtml

---

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 23 (2014) 230501

参数不确定的分数阶混沌系统广义错位延时投影同步*

李睿[1)†] 张广军[1)2)] 姚宏[1)] 朱涛[1)] 张志浩[1)]

1) (空军工程大学理学院, 西安 710051)

2) (西安交通大学生命科学与技术学院, 西安 710049)

(2014 年 3 月 25 日收到; 2014 年 7 月 29 日收到修改稿)

为进一步增强通信系统中保密通信的安全性, 结合广义错位投影同步和延时投影同步, 提出了广义错位延时投影同步. 以分数阶 Chen 系统和 Lü 系统为例, 针对两系统参数都不确定, 基于分数阶稳定性理论与自适应控制方法, 设计了非线性控制器和参数自适应律, 实现了广义错位延时同步, 并辨识出驱动系统和响应系统中所有不确定参数. 理论分析和数值仿真验证了该方法的可行性与有效性.

关键词: 分数阶, 混沌, 广义错位延时投影同步, 参数辨识

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.63.230501

1 引 言

早在 300 多年前, 分数阶微积分就诞生了, 由于当时科学技术与人们认知世界的水平有限, 分数阶微积分并没有得到很好的发展. 随着科学技术和计算机科学的不断发展, 1983 年,Mandelbort[1] 首次指出了自然界及许多科学领域中存在大量的分数阶的事实, 且分数阶微积分与整数阶微积分在描述动力学系统时存在着相似的联系. 研究发现, 眼睛周转指令用分数阶进行建模时与实验结果相符 [2]. 目前, 分数阶微积分理论已用在许多科学领域中, 如: 生物医学 [2]、黏弹性力学 [3] 和金融系统 [4] 等. 由于混沌信号具有类随机性、初始值极端敏感性和连续宽带谱等特点, 它被认为在保密通信中有着巨大的市场潜在价值 [5−7]. 研究分数阶系统具有普遍意义, 对分数阶系统的研究已经是当前的热点问题之一.

保密通信就是通过某种方法将被传送的信息加密. 在接收端, 只有知道正确的密钥才能对收到的信息进行解密; 否则即使信息被截获, 也很难破译. 传统的保密通信方法多采用基于密钥的办法, 这是一种静态加密方法. 传统保密通信方法可分为两类: 对称加密和非对称加密. 较为经典的非对称加密方法是 Rivest-Shumir-Adleman 方法 [8], 也是目前最常使用的加密方法之一. 由于混沌具有类似噪声和连续宽频谱等特点, 使其具有天然的隐蔽性. 与传统加密方法不同, 基于混沌的保密通信方法是一种动态加密方法, 其计算效率高, 且能用于实时信号处理. 目前基于混沌加密的方法有以下四类: 混沌掩盖、混沌参数调制、混沌扩频和混沌键控 [9]. 通过混沌加密方法加密的信息很难被破译, 保密性极高. 混沌用于保密通信的开端是在 1998 年 Endo 与 Chua [10] 研究了锁相电路的混沌同步效应, 证明了某些混沌系统被同一信号连接时能保持同步, 混沌同步成为保密通信领域的研究热点之一.

混沌同步是非线性科学中的一个重要分支, 在 1990 年 Pecora 与 Carroll [11] 首次提出了混沌同步原理. 随后人们通过不同的控制方法实现了不同类

* 国家自然科学基金 (批准号: 10872156) 和陕西省自然科学基金 (批准号: 2012JM8035) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: li111rui@126.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

型的混沌同步, 例如完全同步[12]、投影同步[13]、修正投影同步[14]和函数投影同步[15]等. 不同的同步类型意味着比例因子的形式不同, 而越复杂多变的比例因子能够实现更多类型的混沌同步, 因此就越有利于保密通信的安全性.

但是, 在现实生活中要达到即时同步(无延时同步)是不可能的[16]. 例如在手机通信领域中, 声音信号从发出者到接收者总会存在一定的时间延时, 也就是说: 在混沌同步中, 响应系统与驱动系统始终存在一定的时间延时. 而之前研究的混沌同步都是理想化的, 研究具有延时的混沌同步更有实际意义. 文献[17, 18]研究了整数阶混沌系统的延时同步. Chen等[19]研究了分数阶混沌系统延时投影同步. Wang等[20]针对驱动系统与响应系统不同维不同阶的情况, 研究了分数阶混沌系统的函数延时投影同步. 最近, 人们的研究重点转向参数辨识的分数阶混沌同步[21−23], 因为在真实的混沌系统中, 由于受到各种干扰, 系统中参数可能是不确定或是漂移的, 这时参数确定的混沌系统在原控制器的作用下将不能达到同步. 相比之前考虑的系统参数均已知的情况[19−20], 研究分数阶混沌系统参数全部不确定的延时同步更具有实用性.

由于利用混沌同步能够实现更加难以破解的保密通信, 本文结合广义错位投影同步和延时投影同步, 提出了广义错位延时投影同步. 由于考虑了延时和比例因子矩阵中非零元素的错位, 一方面提高了该方法在应用于保密通信中的抗破译能力, 另一方面提高了该方法在应用于保密通信中的可行性. 为此, 本文根据分数阶稳定性理论与自适应控制方法, 设计了非线性控制器与参数自适应律, 研究了分数阶混沌系统广义错位延时投影同步与参数辨识. 该方法更具有普适性, 并提高了系统的鲁棒性. 通过理论分析和数值仿真验证了该方法的有效性.

2 知识储备与问题描述

2.1 分数阶定义

在研究分数阶微积分时, 不同领域的研究者们对分数阶积分和微分的概念提出了多种定义[24], 在实际应用中使用较多的分数阶定义是Grunwald-Letnikov定义、Riemann-Liouville定义和Caputo定义. 由于在Caputo定义下, 系统的初始条件与整数阶系统一样具有明确的物理意义, 因此在工程应用中更为广泛, 所以本文采用的是Caputo定义.

一元函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的 q 阶微分的Caputo定义为

$$ {}_{0}^{\mathrm{C}}D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} \mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

式中, $n-1<q<n$; $f(t)$ 为在 $t>0$ 时在 $[0,t]$ 上有 $n+1$ 阶连续有界可导函数; $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}t.$$

2.2 广义错位延时投影同步描述

考虑分数阶混沌系统, 设驱动系统与响应系统分别为

$$\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^q} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha} \quad (t \geqslant 0), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t^q} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \quad (t \geqslant 0), \tag{3}$$

式中, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$ 分别表示驱动系统与响应系统的状态变量; $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 和 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \boldsymbol{R}^{n\times n} \to \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 表示非线性函数向量; $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}^n$ 分别表示驱动系统与响应系统中不确定参数向量; $\boldsymbol{u}$ 为将要设计的非线性控制器.

定义广义错位延时投影同步的误差向量如下:

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{x}(t-\tau), \tag{4}$$

式中, $\boldsymbol{\Delta} = \delta_{ij}$ 称为比例因子矩阵, $\boldsymbol{\Delta} \in R^{n\times n}$ 是非奇异矩阵, 且该矩阵每行每列有且仅有一个非零元素值; τ 为响应系统与驱动系统的延时时间. 若 $\tau = 0$, 该同步退化为广义错位投影同步; 若 $\boldsymbol{\Delta}$ 为对角矩阵, 该同步退化为广义延时投影同步. 当 $\boldsymbol{\Delta}$ 不是对角矩阵且 $\tau > 0$ 时, 则是新型的广义错位延时投影同步, 其要求驱动系统在时间 τ 前的状态向量与响应系统当前的状态向量至少有一对向量不按照原有的对应关系, 而是按照向量错位关系且成比例的投影同步.

定义 对于驱动系统(2)与响应系统(3), 如果存在比例因子矩阵使 $\lim\limits_{t\to\infty} \|\boldsymbol{e}(t)\| = 0$, 则称系统(2)与系统(3)实现广义错位延时投影同步.

2.3 应用于保密通信的安全性分析

如果能够对参数不确定的混沌系统进行控制实现广义错位延时投影同步, 与传统整数阶完全同步和已有的分数阶混沌系统的几类同步相比, 该同步在应用于保密通信时有如下5个优点:

1) 整数阶混沌系统由于运动轨迹的不可预测性使得加密信号不易破解, 而分数阶混沌系统还能通过分数阶次的变化进一步增加运动轨迹的不可预测性, 所以分数阶混沌系统应用于保密通信中具有更好的保密性;

2) 投影同步的比例因子可以灵活选取, 具有不可预测性, 进一步增强了保密通信的保密程度, 分数阶投影同步的矩阵是对角阵的形式, 而广义错位投影同步的矩阵是非对角阵, 而不为零的元素可以在非对角元素中任意调整, 也极大地增加了破译的难度;

3) 对于分数阶系统, 矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$ 的种类有 $n!$ 种, 除去 $\boldsymbol{\Delta}$ 为对角矩阵的形式 (广义投影同步), 广义错位延时投影同步中 $\boldsymbol{\Delta}$ 的种类有 $n!-1$ 种, 完全同步、投影同步、广义投影同步和延时投影同步等都是广义错位延时投影同步的特例, 因此增加了保密通信的抗破译能力;

4) 响应系统与驱动系统存在一定时间的延时, 使保密通信更具有实用性;

5) 系统的参数不确定性以及参数辨识使得模型更加接近真实的系统, 并且在参数有噪声干扰时也能够实现同步, 并辨识出不确定参数, 提高了该方法在保密通信中的实用性.

以往的分数阶混沌同步只是具有上述一点或者两点优势, 而本文提出的广义错位延时投影同步是将上述5点优势结合在一起, 一方面加大了保密通信中破译的难度, 增强了通信的安全性, 另一方面提高了应用于保密通信的实用性.

3 分数阶Chen系统与Lü 系统的广义错位延时投影同步与参数辨识

分数阶Chen系统的数学模型如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}^q x_1/\mathrm{d}t^q = a_1(x_2 - x_1), \\ \mathrm{d}^q x_2/\mathrm{d}t^q = (c_1 - a_1)x_1 - x_1x_3 + c_1x_2, \\ \mathrm{d}^q x_3/\mathrm{d}t^q = x_1x_2 - b_1x_3, \end{cases} \tag{5}$$

其中, $0<q<1$, a_1, b_1, c_1 是系统参数, 当 $a_1=35$, $b_1=3$, $c_1=28$ 且 $q>0.8244$ 时, 分数阶Chen系统处于混沌状态, 混沌吸引子参见文献[25].

分数阶Lü 系统的数学模型如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}^q y_1/\mathrm{d}t^q = a_2(y_2 - y_1), \\ \mathrm{d}^q y_2/\mathrm{d}t^q = -y_1y_3 - c_2y_2, \\ \mathrm{d}^q y_3/\mathrm{d}t^q = y_1y_2 - b_2y_3, \end{cases} \tag{6}$$

其中, $0<q<1$, a_2, b_2, c_2 是系统参数, 当 $a_1=36$, $b_1=3$, $c_1=20$ 且 $q>0.9156$ 时, 分数阶Lü 系统处于混沌状态, 混沌吸引子参见文献[26].

以分数阶Chen系统(5)作为驱动系统, 对系统(6)加上控制器作为响应系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}^q y_1/\mathrm{d}t^q = a_2(y_2 - y_1) + u_1, \\ \mathrm{d}^q y_2/\mathrm{d}t^q = -y_1y_3 - c_2y_2 + u_2, \\ \mathrm{d}^q y_3/\mathrm{d}t^q = y_1y_2 - b_2y_3 + u_3. \end{cases} \tag{7}$$

由于驱动系统与响应系统都是3阶, 所以广义错位延时投影同步的错位形式有 $3!-1=5$ 种. 设 n_i 表示错位形式, $i=1,2,\cdots,5$, 数字1, 2, 3代表两个分数阶系统对应的状态向量, 则有如下5种错位组合:

$$\begin{aligned} &n_1 \quad (1,1),(2,3),(3,2); \\ &n_2 \quad (1,2),(2,3),(3,1); \\ &n_3 \quad (1,2),(2,1),(3,3); \\ &n_4 \quad (1,3),(2,2),(3,1); \\ &n_5 \quad (1,3),(2,1),(3,2). \end{aligned}$$

对于以上5种错位形式, 这里研究第五种 n_5,

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{23} \\ \delta_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其余形式都能用相似的方法进行分析. 所以广义错位延时同步误差为

$$\begin{cases} e_1(t) = y_1(t) - \delta_{12}x_2(t-\tau), \\ e_2(t) = y_2(t) - \delta_{23}x_3(t-\tau), \\ e_3(t) = y_3(t) - \delta_{31}x_1(t-\tau). \end{cases} \tag{8}$$

设 $x_i(t-\tau)=x_{i\tau}$ $(i=1,2,3)$, 由(8)式, 得到同步误差系统动力学方程为

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^q e_1}{\mathrm{d}t^q} &= a_2(y_2-y_1)-\delta_{12}((c_1-a_1)x_{1\tau}\\ &\quad -x_{1\tau}x_{3\tau}+c_1x_{2\tau})+u_1,\\ \frac{\mathrm{d}^q e_2}{\mathrm{d}t^q} &= -y_1y_3-c_2y_2\\ &\quad -\delta_{23}(x_{1\tau}x_{2\tau}-b_1x_{3\tau})+u_2,\\ \frac{\mathrm{d}^q e_3}{\mathrm{d}t^q} &= y_1y_2-b_2y_3\\ &\quad -\delta_{31}a_1(x_{2\tau}-x_{1\tau})+u_3.\end{aligned}\right. \tag{9}$$

驱动系统与响应系统的广义错位延时投影同步问题转化为通过设计合理的控制器使误差系统(9)在零点处稳定, 即 $\lim\limits_{t\to\infty}||\boldsymbol{e}(t)||=0$. 基于分数阶稳定性理论和自适应控制方法, 设计的非线性控制器如下:

$$\left\{\begin{aligned}u_1 &= -\hat{a}_2(y_2-y_1)+\delta_{12}((\hat{c}_1-\hat{a}_1)x_{1\tau}\\ &\quad -x_{1\tau}x_{3\tau}+\hat{c}_1x_{2\tau})-ke_1,\\ u_2 &= \ y_1y_3+\hat{c}_2y_2\\ &\quad +\delta_{23}(x_{1\tau}x_{2\tau}-\hat{b}_1x_{3\tau})-ke_2,\\ u_3 &= -y_1y_2+\hat{b}_2y_3\\ &\quad +\delta_{31}\hat{a}_1(x_{2\tau}-x_{1\tau})-ke_3,\end{aligned}\right. \tag{10}$$

式中, k 是大于零的常数, 为反馈增益; τ 为延时时间; $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_2$ 分别是驱动系统与响应系统中不确定参数 a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 的估计值, 其参数自适应律为

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^q\hat{a}_1}{\mathrm{d}t^q} &= \delta_{12}e_1x_{1\tau}-\delta_{31}e_3(x_{2\tau}-x_{1\tau}),\\ \frac{\mathrm{d}^q\hat{b}_1}{\mathrm{d}t^q} &= \delta_{23}e_2x_{3\tau},\\ \frac{\mathrm{d}^q\hat{c}_1}{\mathrm{d}t^q} &= -\delta_{12}e_1(x_{1\tau}+x_{2\tau}),\\ \frac{\mathrm{d}^q\hat{a}_2}{\mathrm{d}t^q} &= e_1(y_2-y_1),\\ \frac{\mathrm{d}^q\hat{b}_2}{\mathrm{d}t^q} &= -e_3y_3,\\ \frac{\mathrm{d}^q\hat{c}_2}{\mathrm{d}t^q} &= -e_2y_2.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

引理 对于分数阶系统 $\dfrac{\mathrm{d}^q\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^q}=\varphi(\boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{M}=[m_1,m_2,\cdots,m_n]^{\mathrm{T}}$, 当分数阶阶次 $0<q\leqslant 1$ 时, 如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得函数 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dfrac{\mathrm{d}^q\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^q}\leqslant 0$ 恒成立, 则系统变量 $\boldsymbol{M}$ 将渐近稳定[27].

定理 对于任意给定的非奇异比例因子矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$($\boldsymbol{\Delta}$ 每行每列有且仅有一个非零元素值) 和初始条件, 在自适应同步控制器(10)与参数自适应律(11)的作用下, 可实现驱动系统(5)与响应系统(7)的广义错位延时投影同步并估计出驱动系统与响应系统中全部不确定参数的真实值.

证明 设 $\boldsymbol{\Theta}=(a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2)^{\mathrm{T}}$, 令

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}=\hat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta}, \tag{12}$$

由于 $\boldsymbol{\Theta}$ 中元素全为常数, 所以有 $\mathrm{d}^q\tilde{\boldsymbol{\Theta}}/\mathrm{d}t^q=\mathrm{d}^q\hat{\boldsymbol{\Theta}}/\mathrm{d}t^q$.

将非线性控制器(10)代入误差系统方程(9), 得

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^q e_1}{\mathrm{d}t^q} &= -\tilde{a}_2(y_2-y_1)+\delta_{12}((\tilde{c}_1-\tilde{a}_1)\\ &\quad \times x_{1\tau}+\tilde{c}_1x_{2\tau})-ke_1,\\ \frac{\mathrm{d}^q e_2}{\mathrm{d}t^q} &= \tilde{c}_2y_2-\delta_{23}\tilde{b}_1x_{3\tau}-ke_2,\\ \frac{\mathrm{d}^q e_3}{\mathrm{d}t^q} &= \tilde{b}_2y_3+\delta_{31}\tilde{a}_1(x_{2\tau}-x_{1\tau})-ke_3.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

根据引理构造函数

$$\begin{aligned}J &= [e_1,e_2,e_3,\tilde{a}_1,\tilde{b}_1,\tilde{c}_1,\tilde{a}_2,\tilde{b}_2,\tilde{c}_2]\cdot[\mathrm{d}^q e_1/\mathrm{d}t^q,\\ &\quad \mathrm{d}^q e_2/\mathrm{d}t^q,\mathrm{d}^q e_3/\mathrm{d}t^q,\mathrm{d}^q\tilde{a}_1/\mathrm{d}t^q,\mathrm{d}^q\tilde{b}_1/\mathrm{d}t^q,\\ &\quad \mathrm{d}^q\tilde{c}_1/\mathrm{d}t^q,\mathrm{d}^q\tilde{a}_2/\mathrm{d}t^q,\mathrm{d}^q\tilde{b}_2/\mathrm{d}t^q,\mathrm{d}^q\tilde{c}_2/\mathrm{d}t^q]^{\mathrm{T}}\\ &= e_1\frac{\mathrm{d}^q e_1}{\mathrm{d}t^q}+e_2\frac{\mathrm{d}^q e_2}{\mathrm{d}t^q}+e_3\frac{\mathrm{d}^q e_3}{\mathrm{d}t^q}+\tilde{a}_1\frac{\mathrm{d}^q\hat{a}_1}{\mathrm{d}t^q}\\ &\quad +\tilde{b}_1\frac{\mathrm{d}^q\hat{b}_1}{\mathrm{d}t^q}+\tilde{c}_1\frac{\mathrm{d}^q\hat{c}_1}{\mathrm{d}t^q}+\tilde{a}_2\frac{\mathrm{d}^q\hat{a}_2}{\mathrm{d}t^q}\\ &\quad +\tilde{b}_2\frac{\mathrm{d}^q\hat{b}_2}{\mathrm{d}t^q}+\tilde{c}_2\frac{\mathrm{d}^q\hat{c}_2}{\mathrm{d}t^q}.\end{aligned} \tag{14}$$

由(10)—(13)式, 得到

$$\begin{aligned}J &= e_1(-\tilde{a}_2(y_2-y_1)+\delta_{12}((\tilde{c}_1-\tilde{a}_1)x_{1\tau}+\tilde{c}_1x_{2\tau})\\ &\quad -ke_1)+e_2(\tilde{c}_2y_2-\delta_{23}\tilde{b}_1x_{3\tau}-ke_2)\\ &\quad +e_3(\tilde{b}_2y_3+\delta_{31}\tilde{a}_1(x_{2\tau}-x_{1\tau})-ke_3)\\ &\quad +\tilde{a}_1(\delta_{12}e_1x_{1\tau}-\delta_{31}e_3(x_{2\tau}-x_{1\tau}))\\ &\quad +\tilde{b}_1\delta_{23}e_2x_{3\tau}-\tilde{c}_1\delta_{12}e_1(x_{1\tau}+x_{2\tau})\\ &\quad +\tilde{a}_2e_1(y_2-y_1)-\tilde{b}_2e_3y_3-\tilde{c}_2e_2y_2\\ &= -k(e_1^2+e_2^2+e_3^2)\leqslant 0.\end{aligned} \tag{15}$$

显然(15)式满足引理, 即误差系统(9)式将稳定于零点, $\lim\limits_{t\to\infty}||\boldsymbol{e}(t)||=0$. 实现了参数全部不确定的广义错位延时投影同步, 定理得证.

4 数值仿真

Diethelm 等[28] 提出的预估矫正算法具有很高的计算精度, 被广泛应用于分数阶微分方程的求

解. Bhalekar 和 Daftardar-Gejji[29] 将该算法进行改进, 得到了能够计算具有时滞的分数阶微分方程的新算法, 这极大地增加了分数阶微积分的应用范围. 由于本文误差系统 (9) 是含有时滞的分数阶微分方程, 为验证上述方法的有效性, 本文采用改进后的预估矫正算法进行数值仿真实验.

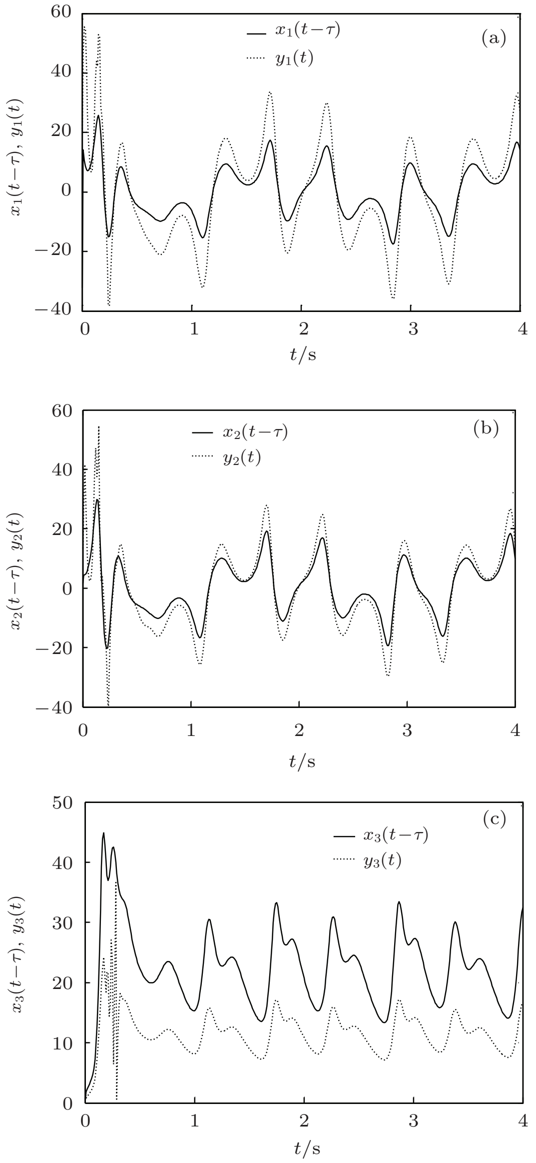

图 1　系统各状态变量随时间演化

取分数阶阶次 $q = 0.95$ 以保证两超混沌系统处于混沌状态, 分别选取不确定参数的“真实值” $\alpha = [35, 3, 28]^{\mathrm{T}}$, $\beta = [36, 3, 20]^{\mathrm{T}}$. 选取步长为 0.1, 任意选取延时 $\tau = 2$; 驱动系统、响应系统初值选为 $\boldsymbol{x}(0) = [3, 1, 2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}(0) = [2, 3, 1]^{\mathrm{T}}$; 选取比例因子 $\delta_{12} = 2, \delta_{23} = 1.5, \delta_{31} = 0.5$ 及不确定参数估计值初值为 $\alpha = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$, $\beta = [4, 5, 6,]^{\mathrm{T}}$; 选取反馈增益 $k = 5$.

通过数值仿真, 得到如下结果: 图 1 为系统各状态变量随时间的演化; 图 2 为广义错位延时投影同步误差系统响应. 从图 1 和图 2 可以看出, 驱动系统与响应系统实现了广义错位延时投影同步.

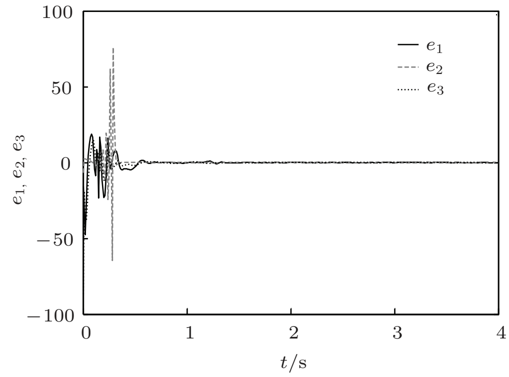

图 2　误差系统随时间的演化

图 3 和图 4 分别为驱动系统与响应系统中不确定参数的响应, 可以明显地看到, 全部不确定参数在一段时间后都收敛于各自的“真实值”, 实现了参数辨识.

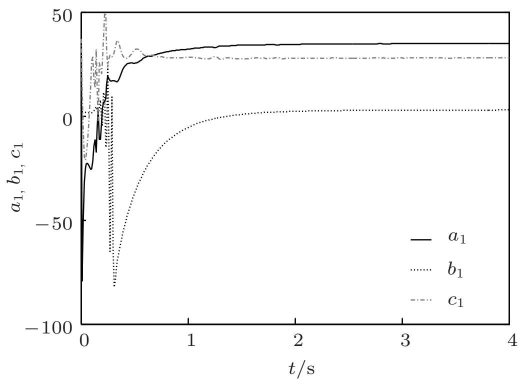

图 3　驱动系统不确定参数的辨识

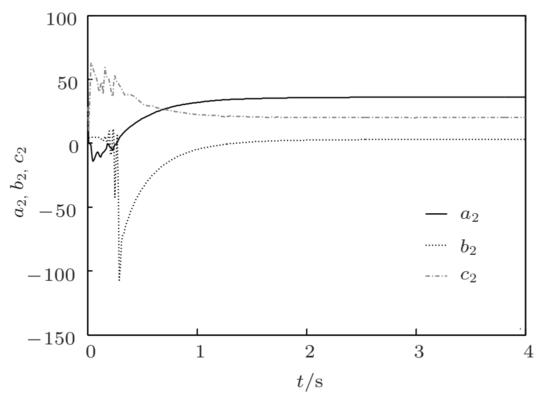

图 4　响应系统不确定参数的辨识

数学证明和数值仿真实验表明: 根据本文设计的控制律和不确定参数自适应律, 两参数不确定的分数阶混沌系统达到了广义错位延时同步并实现了参数辨识, 同步的效果与以往的混沌同步相同, 即误差系统在极短的时间内稳定到零点. 因此也能够实现前面所述的该类型同步在保密通信应用上的优势. 这将有效地提高保密通信的安全性与实用性.

5 结 论

本文提出了一种新的分数阶广义错位延时投影同步. 针对不同的分数阶混沌系统, 设计了非线性控制器及参数自适应控制律, 实现了广义错位延时投影同步并估计出不确定参数, 给出了数学证明. 利用修正的预估校正算法进行数值仿真, 理论分析与仿真结果一致, 验证了该方法的有效性. 该方法具有一定普适性, 并且很好地解决了参数辨识问题, 具有良好的鲁棒性能. 本文研究结果不仅具有重要的理论意义, 在保密通信领域中也具有潜在的应用价值.

参考文献

[1] Mandelbrot B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)

[2] Anastasio T J 1994 *Biol. Cybern.* **72** 69

[3] Bagley R L, Calico R A 1991 *J. Guid. Control Dyn.* **14** 304

[4] Wang Z, Huang X, Shi G D 2011 *Comput. Math. Appl.* **62** 1531

[5] Feki M 2003 *Chaos Solitons Fractals* **18** 141

[6] Wu X J, Wang H, Lu H T 2012 *Nonlinear Anal. RWA* **13** 1441

[7] Xue W, Xu J K, Cang S J, Jia H Y 2014 *Chin. Phys. B* **23** 060501

[8] Rivest R L, Shamir A, Adleman L 1978 *Commun. ACM* **21** 120

[9] Yu S M 2011 *Chaotic Systems and Chaotic Circuits: Principle, Design and Its Application in Communications* (Xi'an: Xidian University Press) p217 (in Chinese) [禹思敏 2011 混沌系统与混沌电路——原理、设计及其在保密通信中的应用 (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 217 页]

[10] Endo I, Chua L O 1991 *Int. J. Bifurcation Chao* **1** 701

[11] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[12] Yuan L G, Yang Q G 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 305

[13] Wang X Y, He Y 2008 *Phys. Lett. A* **372** 435

[14] Wang X Y, Zhang Y L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100506

[15] Yang Y H, Xiao J, Ma Z Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 180505 (in Chinese) [杨叶红, 肖剑, 马珍珍 2013 物理学报 **62** 180505]

[16] Zhang Q J, Lu J A 2008 *Phys. Lett. A* **372** 1416

[17] Chai Y, Chen L Q 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 3390

[18] Luo C, Wang X Y 2013 *J. Vib. Control* **20** 1831

[19] Chen L P, Chai Y, Wu R C 2011 *Phys. Lett. A* **375** 2099

[20] Wang S, Yu Y G, Wang H, Rahmani A 2014 *Chin. Phys. B* **23** 040502

[21] Agrawal S K, Das S 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 907

[22] Huang L L, Qi X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 080507 (in Chinese) [黄丽莲, 齐雪 2013 物理学报 **62** 080507]

[23] Dong J, Zhang G J, Yao H, Wang J 2013 *J. Electron. Inform. Technol.* **35** 1371 (in Chinese) [董俊, 张广军, 姚宏, 王珏 2013 电子与信息学报 **35** 1371]

[24] Petrtráš I 2011 *Fractional-Order Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p341

[25] Lu J, Chen G 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 659

[26] Deng W H, Li C P 2005 *Physica A* **353** 61

[27] Zhao D L, Hu J B, Liu X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2305 (in Chinese) [赵灵冬, 胡建兵, 刘旭辉 2010 物理学报 **59** 2305]

[28] Diethelm K, Ford N J, Freed A D 2002 *Nonlinear Dyn.* **29** 3

[29] El-Sayed A M A, Ahmed E, Herzallah M A E 2011 *J. Fract. Calc. Appl.* **1** 1

Generalized dislocated lag projective synchronization of fractional chaotic systems with fully uncertain parameters*

Li Rui[1)†] Zhang Guang-Jun[1)2)] Yao Hong[1)] Zhu Tao[1)] Zhang Zhi-Hao[1)]

1) (*Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*)

2) (*School of Life Science and Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

(Received 25 March 2014; revised manuscript received 29 July 2014)

Abstract

In order to improve the security of secure communication combined with the generalized dislocated projective synchronization and lag projective synchronization, a new generalized dislocated lag projective synchronization (GDLPS) is investigated. This paper takes the fractional order Chen system and Lü system as examples. for the parameters of the two systems are uncertain, based on the fractional stability theory and adaptive control method, the nonlinear controller and parameter update laws are designed for the GDLPS between the two chaotic systems with uncertain parameters. Under the controller and parameter update laws, GDLPS of the two uncertain parameters chaotic systems is achieved and all uncertain parameters of the drive system and response system are identified. Theoretical analyses and numerical simulation show that this method is feasible and effective.

Keywords: fractional-order, chaotic, generalized dislocated lag projective synchronization, parameters identification

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.63.230501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872156) and the Natural Science Foundation of Shannxi Province, China (Grant No. 2012JM8035).

† Corresponding author. E-mail: li111rui@126.com