

局域浓度调控扩散系数的次氯酸-碘离子-丙二酸系统图灵斑图形成中的反常扩散

胡文勇 邵元智

**Anomalous diffusion in the formation of Turing pattern for the chlorine-iodine-malonic-acid system with a local concentration depended diffusivity**

Hu Wen-Yong Shao Yuan-Zhi

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica 63, 238202 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.238202

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.238202>

当期内容 View Table of Contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/volumn/home.shtml>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[细胞外钾离子浓度延迟恢复对螺旋波的影响研究](#)

乔成功, 李伟恒, 唐国宁

2014, 63(23): 238201. 全文: [PDF](#) (8964KB)

[气体放电系统中多臂螺旋波的数值分析](#)

白占国, 李新政, 李燕, 赵昆

2014, 63(22): 228201. 全文: [PDF](#) (16733KB)

[两层耦合可激发介质中螺旋波转变为平面波](#)

李伟恒, 黎维新, 潘飞, 唐国宁

2014, 63(20): 208201. 全文: [PDF](#) (0KB)

[钾扩散耦合引起的心脏中螺旋波的变化](#)

乔成功, 王利利, 李伟恒, 唐国宁

2013, 62(19): 198201. 全文: [PDF](#) (1222KB)

[时空调制对可激发介质螺旋波波头动力学行为影响及控制研究](#)

钱郁

2012, 61(15): 158202. 全文: [PDF](#) (2263KB)

# 局域浓度调控扩散系数的次氯酸-碘离子-丙二酸系统图灵斑图形成中的反常扩散\*

胡文勇 邵元智†

(中山大学物理科学与工程技术学院, 广州 510275)

(2014年5月16日收到; 2014年7月14日收到修改稿)

通过数值模拟及振幅方程解析解方法, 从实空间和倒空间分析了受局域浓度扩散系数调控下次氯酸-碘离子-丙二酸反应扩散系统图灵斑图形成的扩散机理. 在零扩散系数调节下, 斑图形成成为典型的菲克扩散; 而在负向正向扩散系数调节下, 斑图的形成依赖欠扩散和超扩散. 图灵系统的浓度稳态振幅对随机初始条件敏感性随局域浓度扩散调控系数  $k$  的增大而增加.

**关键词:** 反应扩散系统, 斑图, 扩散机理

**PACS:** 82.40.Ck, 47.54.-r, 64.60.an, 89.75.Da

**DOI:** 10.7498/aps.63.238202

## 1 引言

基于次氯酸-碘离子-丙二酸(CIMA)系统等化学反应扩散系统而形成的图灵斑图<sup>[1,2]</sup>通常呈现六角斑点状态、条纹状态, 或者两者共存的混合状态<sup>[3,4]</sup>. 通常可以通过施加外部因素, 如光场或电场<sup>[5-8]</sup>、噪声<sup>[9,10]</sup>等, 或调节内部因素<sup>[11-13]</sup>来实现斑图形态的调控. 很多研究表明: 图灵斑图系统间的相互作用机理以及对其内部耦合参数的调控, 不仅是调控图灵斑图的重要机理, 甚至可以构建新的斑图类型<sup>[14-16]</sup>. 扩散作为调节斑图形态的内在因素之一, 有很丰富的研究内涵. 各向异性的扩散机理(依赖于方向的扩散)在揭示生物表皮斑图的斑点及条纹形成方面取得了很大的成功<sup>[17-19]</sup>. 依赖浓度的扩散机理是另一个影响斑图形态的内在调控因素<sup>[20,21]</sup>, 但针对浓度依赖的图灵斑图调控的扩散机理研究的报道还非常少见.

基于完全随机行走的扩散理论, 可以得到随机行走(或扩散前端)的均方距离 $\langle \sqrt{R(t)^2} \rangle$ 与时间  $t$

的  $1/2$  幂指数关系, 即典型的菲克扩散:

$$\langle \sqrt{R(t)^2} \rangle \sim t^{1/2}. \quad (1)$$

其基本假设是任一粒子在任一时刻, 向各个方向扩散的概率相等, 且扩散步长、速率分布相等. 满足上述条件则要求扩散过程在空间和时间上具有完全的对称性, 且任意两粒子间无相互作用. 上述扩散过程也称为正常扩散. 在实际扩散过程中, 粒子之间存在着各种层次的相互作用, 粒子的疏密在很大程度上决定了相互作用的强弱, 相互作用的强弱直接影响扩散系数, 即扩散系数  $D$  是扩散物浓度  $c$  的函数. 在经典的扩散方程中, 直接将传统的常扩散系数用浓度的函数  $D(c)$  来代替是一种可行而有效的方式. 菲克扩散方程可以改写为更广义的形式, 即

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot [D(c) \nabla c]. \quad (2)$$

广义扩散对应着非正常扩散, 相应的粒子迁移已不满足完全随机行走的理论. 根据广义扩散理论, 扩散前端  $R$  与时间  $t$  之间严格满足幂函数

\* 国家自然科学基金(批准号: 11274394)、广东省自然科学基金(批准号: S2012010010542)、中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 111gjc12)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20110171110023)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: stssyz@mail.sysu.edu.cn

关系 [19]:

$$\langle \sqrt{R(t)^2} \rangle \sim t^{n/2}. \quad (3)$$

幂指数  $n/2$  的取值范围将直接决定扩散的类型. 当  $0 < n/2 < 0.5$  时, 扩散过程为欠扩散 (subdiffusion), 扩散进行比正常扩散慢; 当  $0.5 < n/2 < 1$  时, 扩散过程为超扩散 (superdiffusion), 扩散进行比正常扩散快; 当  $n/2 \geq 1$  时, 扩散过程为弹道扩散, 扩散快且可以实现长距离传递. 显然 (1) 式中的幂指数为  $1/2$  仅是广义扩散 (1) 式中  $n/2 = 0.5$  的情形, 即正常扩散介于欠扩散和超扩散之间. Kuntz 和 Lavalée 采用二维格点气自动原胞扩散模型, 探讨了扩散系数受浓度控制的扩散过程与非正常扩散之间的内在关系 [22], 并随后从实验角度验证了上述论点 [23].

受 Roussel 和 Wang [20,21] 工作的启发, 我们在 CIMA 系统中引入局域浓度控制的扩散系数, 探讨了受局域浓度控制的扩散系数作为内在调节手段调控图灵斑图形态 [24]. 扩散系数  $D(u)$  的具体形式按 Taylor 级数展开至一阶项:  $D(u) = (1 + ku)D$ , 其中,  $k$  是调节扩散系数的浓度常数, 而  $D$  为恒定的扩散系数. 在 CIMA 系统中考虑了扩散系数对局部浓度的一阶依赖, 得到如下系统演化微分方程组 [24]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot [(1 + ku) \nabla u] + \frac{1}{\sigma} \left( a - u - \frac{4uv}{1 + u^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d \nabla \cdot [(1 + ku) \nabla v] + b \left( u - \frac{uv}{1 + u^2} \right), \quad (5)$$

式中,  $u$  和  $v$  分别为激活子 (碘离子  $I^-$ ) 和抑制子 (次氯酸根  $ClO_2^-$ ) 在空间的浓度分布, 即  $u(\mathbf{R}, t)$  和  $v(\mathbf{R}, t)$ ;  $\sigma$ ,  $a$  和  $b$  均为化学反应的动力学控制参数;  $d$  为抑制子扩散系数对激活子的比率,

$$d = D_v/D_u. \quad (6)$$

我们在文献 [24] 的研究中表明: 引入局域浓度调控扩散效应的 CIMA 系统中, 斑图仍具有图灵斑图特征. 通过改变  $k$  系数可以方便地实现六角斑点和平行条纹两种图斑转化, 点条比率强烈依赖于  $k$  系数; 斑图特征波长  $\lambda$  与  $k$  之间呈现平方根的规律  $\lambda \sim (c_1 + c_2 k)^{1/2}$ , 其中,  $c_1, c_2$  为常数; 在某些特定条件下, 相同  $k$  参数下还会导致斑图的非等概率双稳破缺态出现. 虽然我们的工作推进了图灵斑图的内在调控机理的探讨, 但还存在如下明显缺陷: 1)

整个工作都未涉及斑图形态变化的扩散机理, 即未回答那些丰富多彩的斑图形态是通过怎样的一个受  $k$  参数调控的扩散机理来实现的; 2) 整个工作未考虑  $k < 0$  的情况, 而这正可能构成不同扩散模式的差异. 本文则是针对上述两个问题而展开研究.

## 2 研究内容

为了与文献 [24] 工作保持一致, 除引入  $k < 0$  的情况外, 本文中所有参数与文献 [24] 完全相同. 本文将系统探讨  $k < 0, k = 0, k > 0$  三种状态: 1) 在实空间中斑图建立过程与时间的关系, 从初始条件开始演化, 系统会从一种高对称性的混乱无序情况下逐渐破缺到低对称性的有序结构, 建立起稳定时空斑图; 2) 从倒空间的角度研究斑图, 定量评价扩散过程中斑图中心波长以及斑点尺寸的变化, 中心波长反映出整个空间的物质分布规律, 而斑点尺寸的变化反映有序化的程度; 3) 结合上述 1), 2) 中陈述的问题, 分析给出在各种状态下调控斑图的扩散机理.

## 3 研究方法

本文研究方法包括数值模拟及振幅方程解析分析.

### 3.1 振幅方程

一维系统图灵斑图振幅方程的表达式为 [2]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - g |A|^2 A, \quad (7)$$

式中,  $A$  为复数;  $\mu, g$  为常数, 其中,  $\mu$  控制线性增长快慢, 而  $g$  则控制达到饱和的快慢. 为了能够进行求解, 对 (7) 式两边同时乘上  $A$ , 将方程化为

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A^2) = \mu A^2 - g (A^2)^2. \quad (8)$$

将  $|A|^2$  进行变量替换, 求解 (8) 式得到图灵斑图振幅方程的解析解:

$$|A| = \sqrt{\frac{\mu/g}{1 + e^{\mu C - 2\mu t}}}, \quad (9)$$

其中  $C$  为与动力学无关的常数.

### 3.2 数值模拟

本文采用商业有限元计算平台 Comsol Multiphysics 完成全部数值模拟计算. 在一矩形区域内

利用正方格子网格划分和有限差分方法, 对方程 (4), (5) 进行不同时间的演化模拟. 在整个区域内, 以平均值不为零的均匀分布随机数作为随机化初始条件, 计算中记录下若干时刻的激活子浓度分布 (斑图) 并进行后续分析, 以获得与演化相关的信息. 分析从实空间和倒空间两个方面展开.

1) 实空间

图灵系统的演化满足振幅方程 [2,3], 该方程描述了斑图的振幅随时间的演化 (方程形式参见 (7) 式, 详细介绍参见文献 [2, 3]). 由随机初始条件开始的演化过程其空间各处演化程度不同, 难以获得一个较为准确的振幅, 在本文中采用区域内所有点的浓度标准差代替振幅. 标准差反映了一系列浓度数值的分布对平均值的偏离程度, 具有良好的统计性并能在较大程度上代表振幅.

2) 倒空间

对于某一时刻以斑图的中心为原点计算关联函数,

$$F(x, y) = (u(x, y) - \bar{u})(u(x_0, y_0) - \bar{u}), \quad (10)$$

其中,  $(x_0, y_0)$  为区域中心点,  $\bar{u}$  为激活子浓度  $u$  在全区域的平均值. 下面将对空间点  $(x, y)$  的关联函数改成对  $r$  的关联函数. 以  $(x_0, y_0)$  为圆心, 做一系列同心圆. 将每一个圆弧按与半径成正比的分等分, 对同一圆上所有节点插值求相应的  $F$  值并做平均. 通过该项平均, 将各向同性二维问题简化为一维问题. 将  $F(x, y)$  化为对  $r$  的关联函数  $G(r)$ ,

$$G(r) = \left\langle F(x, y) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=r} \right\rangle, \quad (11)$$

将  $G(r)$  做快速 Fourier 变换 (FFT), 得到下式所示的相应斑图的结构因子函数  $S(q)$ ,

$$S(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i q r} G(r) dr. \quad (12)$$

式中  $q$  为波矢.  $S(q)$  函数的峰位和峰宽 (半高全宽) 分别对应斑点间距 (波长) 和斑点自身尺寸大小. 找出波数分布的中心位置和峰宽随时间的变化规律, 可以定量描述斑图形成过程中受扩散控制的机理.

## 4 结果与讨论

### 4.1 数值计算

**模型** 使用 COMSOL Multiphysics 软件, 首先建立一个矩形区域, 为使后面的 FFT 运算中信息

能够得到充分利用, 通常选用 2 的整数次方 (如  $128 \times 128$  或  $256 \times 256$ ) 作为尺寸. 相应地, 网格尺寸设置为 0.25 或 0.5.

**参数** 与文献 [24] 基本一致, 仅在  $k$  和时间等具体需要变化的参数上不同, 其他参数如  $d, a, b$  等都完全相同. 本文只进行了  $\alpha$  点的计算, 具体计算参数见表 1.

表 1 模拟计算中所采用的参数

变量	数值	变量	数值
$\delta$	50	$d$	1.07
$a$	9.2	$b$	0.14

**初始条件** 选择平均值非零的白噪声作随机初始条件, 满足如下关系:

$$\langle \zeta(r) \rangle = \frac{a}{10}, \quad 0 < \zeta(r) < \frac{a}{5}. \quad (13)$$

**边界条件** 所有边界取无通量边界条件.

**过程控制** 系统演化时间一般为  $10^4$  无量纲时间, 系统能在演化时间约为 6000 后渐趋于稳定. 为避免浪费计算时间以及误差累积效应, 计算采用自适应步长, 用  $10^{-4}$  的相对精度进行控制. 在每一个固定的  $k$  下, 取 5 组独立的随机数作为随机初始条件进行演化, 数据处理时, 将对 5 个初始条件的结果进行分析, 得到的参数进行平均作为此  $k$  下的取值.

### 4.2 实空间处理结果

图 1 是演化完成后的斑图, 属 5 组独立计算中的一组. 从图 1 可以看出, 随着  $k$  的增加, 条对点的比例大致上呈降低趋势, 且斑点的尺寸逐渐变大.

任意选定演化斑图的两个斑点, 做一条穿过两个斑点中心的线, 观察不同演化时间后该线段上激活子浓度  $u$ , 取得  $u$  的幅度及峰宽等参数, 结果如图 2 所示. 由图 2 可见, 随演化时间的延长, 激活子斑点的浓度以类似上坡扩散的方式增加, 浓度在空间分布的差异增大, 斑点间距减小, 斑点尺寸长大. 该方法直观, 可以同时获得浓度振幅、波长和斑点大小的信息, 但结果仅限于两个斑点之间, 个体差异太大且缺乏统计精度. 此外, 演化中不时有新的斑点生成, 同时有旧的斑点消亡, 有些斑点并不能完成演化全程. 因此, 此法被以浓度标准差代替浓度并求取倒空间的结构因子方法取代.

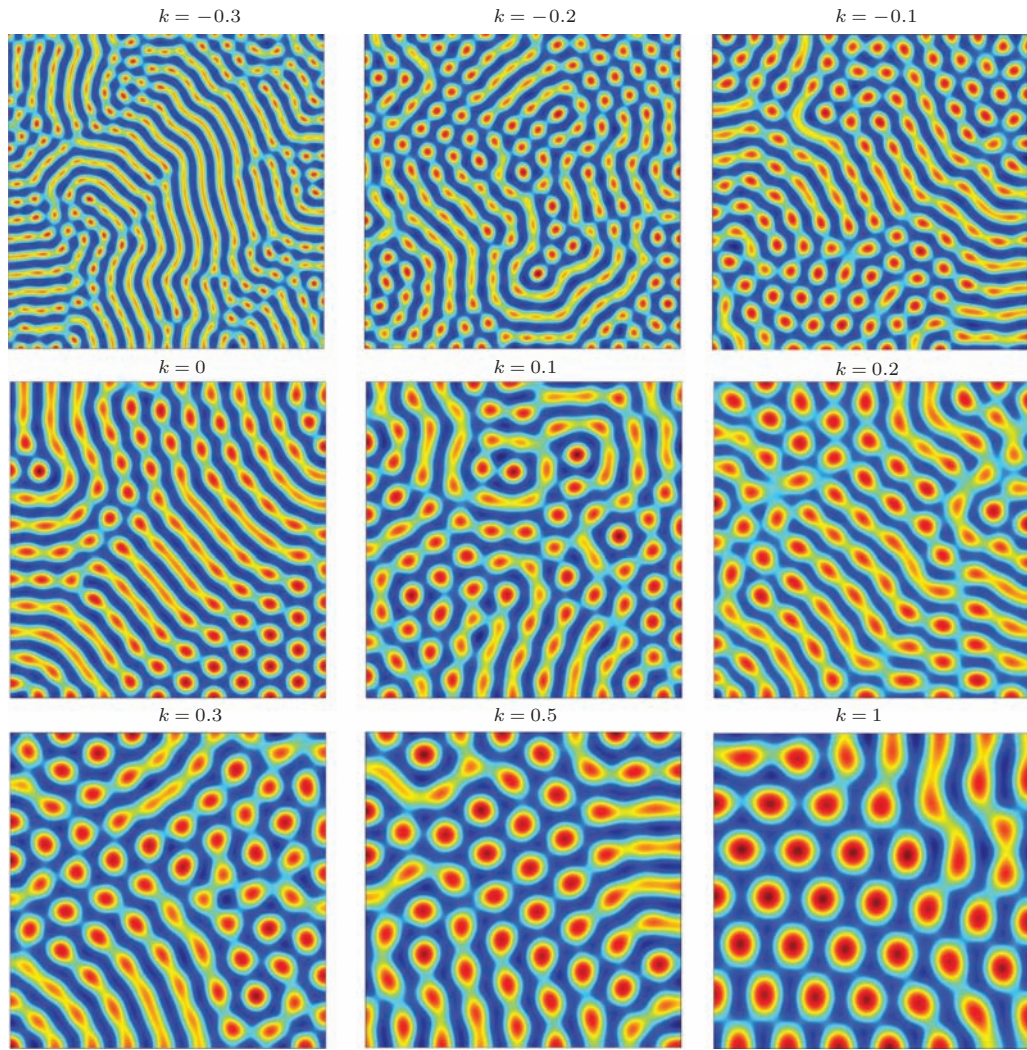


图1 不同  $k$  值下系统演化稳定后 ( $t = 10000$ ) 的斑图

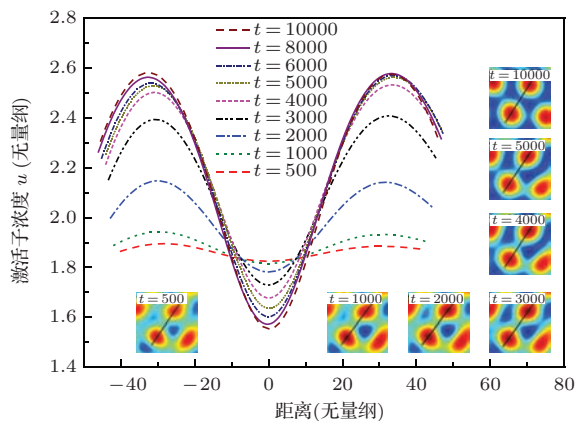


图2 (网刊彩色) 不同演化时间的激活子浓度  $u$  沿任意选定的两个斑点之间黑线的分布, 图例中把斑点的中间位置坐标设定为 0

如前所述, 因系统以大幅度的随机初始条件开始, 故在不太长的时间内, 各处的演化程度不尽相等, 难以精确获得斑图浓度波的幅度值. 为保证兼

具统计性和可操作性, 以区域内所有点的浓度标准差作为 (9) 式中的  $|A|$ , 并将此浓度标准差对时间的变化进行拟合. 图 3 给出了不同  $k$  值下激活子浓度  $u$  的标准差随时间变化的拟合结果. 由图 3 可见, 所有的拟合都具有高的精度和相似的拟合参数. 最为重要的是拟合关系式与振幅方程的解析解 (9) 式具有相同的数学表达形式. 比较二者可以得到如下参数替代关系:

$$\begin{aligned} \mu &= h/2, \\ g &= h/2f^2, \\ \mu/g &= f^2. \end{aligned} \quad (14)$$

根据图灵斑图振幅方程的解析解  $A$  ((9) 式), 当时间趋近于无穷大时, 稳态振幅具有如下关系:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |A| = \sqrt{\frac{\mu}{g}}. \quad (15)$$

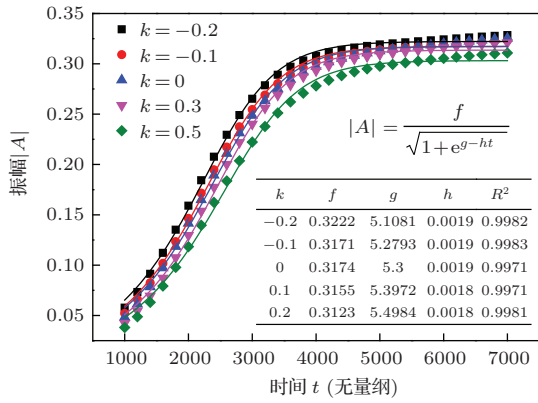


图3 (网刊彩色) 不同局域浓度扩散调控系数  $k$  值下, 激活子浓度  $u$  标准差随时间变化的拟合结果

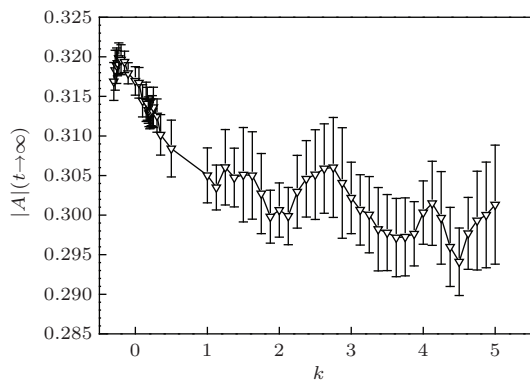


图4 稳定斑图激活子浓度幅值  $(\mu/g)^{1/2}$  随着局域浓度扩散调控系数  $k$  的变化, 误差棒为采用随机初始条件的 5 次计算结果统计平均得到

图3所示的数值解结果也表明: 当系统演化时间超过4000以后, 无论对扩散系数进行正向还是负向调节, 受局域扩散系数控制的图灵系统的浓度振幅也基本达到稳态. 图4进一步展示了对局域扩散系数进行大范围调节 ( $-0.2 < k < 5$ ) 后图灵系统的浓度稳态振幅对扩散调控系数  $k$  的依赖关系. 值得注意的是, 图灵系统的浓度稳态振幅随局域浓度扩散调控系数  $k$  的增加呈现规律性起伏, 而非单调变化. 稳态图灵斑图波长与  $k$  的关系在文献[24]已给出, 但未探讨稳态振幅  $A(t \rightarrow \infty)$  的建立及其与  $k$  的关系. 整体上,  $A$  随  $k$  的增加而下降, 这是因为  $k$  增加导致扩散加快, 使得斑图有序(振幅  $A$ ) 的建立被削弱. 出现起伏是因为随  $k$  的增加, 抑制子与激活子的扩散都得到增强, 由于它们的非线性生长项不同, 在某些  $k$  值时, 抑制子与激活子的扩散速度之比又达到有利于斑图的形成, 造成斑图振幅的升高. 抑制子扩散速度超过激活子的扩散速度是斑图产生的必要条件[3]. 此外, 由图4可见, 误差棒的大小随局域浓度扩散调控系数  $k$  的增加而增加,

表明随着  $k$  的增加, 图灵系统的浓度稳态振幅对随机初始条件差异越发敏感.

### 4.3 倒空间处理结果

根据(2)式计算整个区域结构因子  $S(q)$ , 可以准确地量化描述激活子浓度振幅随演化时间的建立过程, 它比实空间方法能更好地定量描绘系统从无序向有序状态转化. 结构因子  $S(q)$  包含峰位及峰宽两种信息, 其中, 峰位倒数和峰宽(半高全宽)倒数分别对应斑点间距(波长)和斑点自身尺寸大小. 结构因子  $S(q)$  强度反映不同波长成分在斑图中的比重, 也是斑图有序程度的另一种体现, 波长分布越集中, 则演化程度越高. 确定不同时刻的峰宽并进行幂指数拟合, 根据幂指数的取值确定系统演化过程中扩散的性质, 即属于正常扩散(幂指数 = 0.5)、欠扩散(幂指数 < 0.5)还是超扩散(幂指数 > 0.5). 因为  $\alpha$  点为斑点条纹混合共存态[24], 通过结构因子区分六角斑点及条纹斑的周期性. 图5给出了不同演化时间下的结构因子函数. 由图5可见, 随演化时间的增加, 在波数  $q = 18, 22, 25$  时分别出现了3个结构因子峰值, 其中  $q = 22$  的主峰对应占主导的六角斑点, 而  $q = 18, 25$  峰分别对应条纹与径向大致平行和垂直的两种周期波数. 这是因为条状斑图的取向会影响结构因子. 如果条纹斑沿着径向分布, 则小波数大周期的基波成分被抬高, 反之如垂直于切线方向则大波数短周期的基波受益.

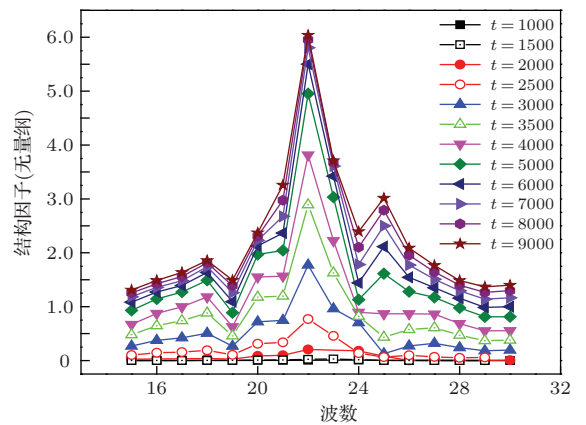


图5 (网刊彩色)  $k = 0.5$  时不同演化时间下的结构因子频谱

主结构因子峰 ( $q = 22$ ) 的半高全宽随演化时间的变化可以揭示从高对称的无序状态中借助反应扩散而破缺形成有序六角斑点的动力学过程. 图6给出了局域负扩散调节、零扩散调节及正扩散

调节下结构因子半高全宽随时间的变化. 数值计算的结果表明, 六角斑点尺度随演化时间增加按幂律增大. 其中, 在局域零扩散调节下幂指数为0.46, 非常接近正常菲克扩散的0.5; 局域负扩散调节下幂指数为0.11, 为典型的欠扩散; 正局域扩散调节下幂指数为0.69, 为典型的超扩散.

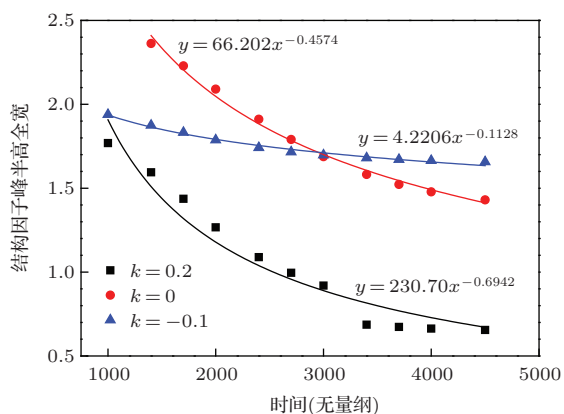


图6 结构因子峰半高全宽(斑点尺度倒数)随时间的演化

## 5 结 论

本文通过在CIMA反应扩散系统中引入扩散系数的局域浓度的线性依赖, 研究了这种依赖行为对系统演化的影响. 结果表明:

- 1) 基于CIMA反应扩散系统的图灵斑图演化受局域浓度控制的扩散机理的调控, 六角斑图和条纹斑共存且二者比例受局域浓度扩散调控系数 $k$ 调节.
- 2) 局域浓度扩散调控系数 $k$ 分别为负扩散调节、零扩散调节及正扩散调节下, 六角斑图形成的扩散机理分别为欠扩散、正常扩散和超扩散.
- 3) 随局域浓度扩散调控系数 $k$ 的增加, 图灵系统的浓度稳态振幅对随机初始条件差异越发敏感.

## 参考文献

- [1] Lengyel I, Epstein I R 1991 *Science* **251** 650
- [2] Rudovics B, Barillot E, Davies P D, Dulos E, Boissonade J, Kepper D P 1999 *J. Phys. Chem. A* **103** 1790
- [3] Ouyang Q 2000 *Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) pp1-4 (in Chinese) [欧阳颀 2000 反应扩散系统中的斑图动力学 (上海: 上海科技教育出版社) 第1—4页]
- [4] Ouyang Q, Swinney H L 1991 *Nature* **352** 610
- [5] Muñuzuri A P, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 1999 *J. Am. Chem. Soc.* **121** 8065
- [6] Horváth A K, Dolnik M, Muñuzuri A P, Zhabotinsky A M, Epstein I R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2950
- [7] Chen J X, Zhang H, Li Y Q 2009 *J. Chem. Phys.* **130** 124510
- [8] Chen W Q, Zhang H, Ying H P, Li B W, Chen J X 2007 *J. Chem. Phys.* **127** 154708
- [9] Lesmes F, Hochberg D, Morán F, Pérez-Mercader J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 238301
- [10] Alonso S, Sagués F 2009 *Phys. Rev. E* **80** 035203(R)
- [11] Wang W M, Liu H Y, Cai Y L, Li Z Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 074702
- [12] He Y F, Liu F C, Fan W L, Dong L F 2012 *Chin. Phys. B* **21** 034701
- [13] Sun G Q, Jin Z, Liu Q X, Li L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3936
- [14] Yang L F, Epstein I R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 178303
- [15] Woolley T E, Baker R E, Gaffney E A, Maini P K 2011 *Phys. Rev. E* **84** 041905
- [16] Catllá A J, McNamara A, Topaz C M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026215
- [17] Shoji H, Iwasa Y, Mochizuki A, Kondo S 2002 *J. Theor. Biol.* **214** 549
- [18] Shoji H, Mochizuki A, Iwasa Y, Hirata M, Watanabe T, Hioki S, Kondo S 2003 *Dev. Dyn.* **226** 627
- [19] Shoji H, Iwasa Y, Kondo S 2003 *J. Theor. Biol.* **224** 339
- [20] Roussel M R, Wang J 2004 *J. Chem. Phys.* **120** 8079
- [21] Roussel M R, Wang J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 188302
- [22] Kuntz M, Lavalée P 2003 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **36** 1135
- [23] Kuntz M, Lavalée P 2004 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **37** L5
- [24] Li W S, Hu W Y, Pang Y C, Liu T R, Zhong W R, Shao Y Z 2012 *Phys. Rev. E* **85** 066132

# Anomalous diffusion in the formation of Turing pattern for the chlorine-iodine-malonic-acid system with a local concentration depended diffusivity\*

Hu Wen-Yong Shao Yuan-Zhi<sup>†</sup>

(School of Physics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

( Received 16 May 2014; revised manuscript received 14 July 2014 )

## Abstract

We have addressed numerically and analytically the diffusion mechanism of Turing pattern formation for the chlorine-iodine-malonic-acid system with a local concentration depended diffusivity (LCDD) in a two-dimensional space as well as its reciprocal counterpart. It is found that the Turing pattern develops in a normal way of Fickian diffusion when LCDD is not involved, namely with a zero LCDD adjusting parameter. The formation of a Turing pattern evolves in an abnormal way of either subdiffusion or superdiffusion when a non-zero LCDD adjusting parameter is taken into account, and a negative or a positive value of LCDD parameter corresponds to a subdiffusion or a superdiffusion. The sensitivity of the steady amplitude of the activator concentration of a Turing system to a random initial condition increases with increasing LCDD parameter.

**Keywords:** reaction diffusion system, pattern, diffusion mechanism

**PACS:** 82.40.Ck, 47.54.-r, 64.60.an, 89.75.Da

**DOI:** 10.7498/aps.63.238202

---

\* Projected supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11274394), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. S2012010010542), the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. 11lgjc12), and the Specialized Research Foundation for the Doctoral Program of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20110171110023).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [stssyz@mail.sysu.edu.cn](mailto:stssyz@mail.sysu.edu.cn)