

一类广义飞秒脉冲激光对纳米金属传导模型的同伦解法

谢峰 林万涛 莫嘉琪

Homotopic mapping solving method of transfers model with a class of generalized femtosecond pulse-laser for nano metal

Xie Feng Lin Wan-Tao Mo Jia-Qi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 63, 240201 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.240201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2014/V63/I24>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

(2+1) 维改进的 Zakharov-Kuznetsov 方程的无穷序列复合型类孤子新解

New infinite sequence complexion soliton-like solutions of (2+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov modified equal width equation

物理学报.2014, 63(23): 230202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.230202>

变系数 Whitham-Broer-Kaup 方程组的对称、约化及精确解

Exact solutions of Whitham-Broer-Kaup equations with variable coefficients

物理学报.2014, 63(20): 200203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200203>

Kaup-Kupershmidt 方程的非局域对称及新的精确解

Nonlocal symmetry and explicit solutions of the Kaup-Kupershmidt equation

物理学报.2014, 63(18): 180205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.180205>

$K(mnp)$  方程多-Compacton 相互作用的数值研究

Numerical investigation on the interaction between multi-Compacton of  $K(mnp)$  equation

物理学报.2014, 63(18): 180206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.180206>

一类尘埃等离子体孤波解

Solitary wave solution for a class of dusty plasma

物理学报.2014, 63(11): 110203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110203>

# 一类广义飞秒脉冲激光对纳米金属传导模型的同伦解法\*

谢峰<sup>1)†</sup> 林万涛<sup>2)</sup> 莫嘉琪<sup>3)‡</sup>

1)(东华大学理学院, 上海 201620)

2)(中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

3)(安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2014年5月28日收到; 2014年7月11日收到修改稿)

研究了一类飞秒脉冲激光对纳米金属薄膜传导模型. 首先求出一个特殊模型的精确解析解, 然后利用泛函同伦映射理论和方法, 得到了相应模型的任意次近似解析解. 最后论述了解的意义.

关键词: 脉冲, 纳米金属, 传导

PACS: 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.63.240201

## 1 引言

飞秒( $10^{-15}$  s量级)脉冲激光是激光科学发展起来的最强有力的工具之一. 飞秒脉冲脉宽超短, 功率可以做到超强. 飞秒激光脉冲技术目前已比较成熟, 它在激光控核聚变、精加工器件、存储高密度信息、医学外科手术等领域都有较广泛的应用, 关于超短激光脉冲与物质相互作用的理论与实验研究已是激光科学领域的重要课题之一. 关于超短激光与金属作用的模型可追溯到1974年前苏联学者 Anisimov 等<sup>[1]</sup>提出的电子-声子双温模型. 1983年, Eesley<sup>[2]</sup>用皮秒激光器从实验方面研究了金属铜中的非平衡导热. 1993年, Qiu 和 Tien<sup>[3]</sup>在双温模型的基础上提出了更严格的抛物两步模型. 近年来, 国内学者也做出了许多很好的工作. 例如, 马松华等<sup>[4]</sup>研究了系统孤波脉冲、飞秒孤波和时间孤子的激励, 并讨论了孤波间的弹性相互作用. 为了克服不同模型只适于描述超短脉冲激光加热金属薄膜不同阶段的局限, 马维刚等<sup>[5]</sup>基于双温度模型和傅里叶导热定律建立了一个普适模型, 用于完整

描述超短脉冲激光加热薄膜的整个热传导过程, 并在300 K采用背面抽运-表面探测飞秒激光瞬态热反射方法实验研究了金/玻璃和金/碳化硅样品的热量传递过程.

在对各种相关改进模型进行理论分析与实验对比研究的同时, 因模型中偏微分方程的复杂性, 对模型满足相应初始-边界条件解的近似研究也显得尤为必要. 而微分方程初值、边值问题解的渐近理论研究本身也是应用数学领域研究的热点之一<sup>[6-14]</sup>. 本文将利用近来发展的泛函同伦映射<sup>[15,16]</sup>方法来研究一类飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜的导热模型<sup>[5]</sup>, 并求它的近似解析解, 得到电子和声子温度关于各物理参数的显式近似依赖关系.

## 2 广义飞秒脉冲激光传导模型

讨论如下一类广义非线性飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜导热扰动模型<sup>[5]</sup>:

$$\gamma u \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \frac{u}{v} \frac{\partial u}{\partial x} - b(u - v)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 41275062)和中央高校基本科研业务费(批准号: 2232012D3-34)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fxie@dhu.edu.cn

‡ 通讯作者. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$+ \sqrt{\frac{4 \ln 2 (1-R) J}{\pi c \delta}} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) - 4 \ln 2 \left(\frac{t}{c}\right)^2 + F(u, v), \quad (1)$$

$$C \frac{\partial v}{\partial t} = b(u - v) + G(u, v), \quad (2)$$

其中  $u, v$  分别为电子与声子的温度,  $a$  为初始温度下电子的导热系数,  $\gamma, C$  分别为电子与声子热容,  $b$  为电子-声子间的耦合系数,  $c$  为激光脉冲宽度;  $R$  为金属表面反射率,  $J$  为激光功率密度,  $\delta$  为激光渗透厚度.  $F(u, v), G(u, v)$  为激光及导热过程中转化的非线性扰动热源项, 它们在其变量的有限区域变化的范围内是充分光滑的函数. 在本文中初始条件为

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = T_0, \quad (3)$$

其中  $T_0$  为常数, 而方程的边界 ( $x = 0, x = l$ ) 可视为绝热的:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

首先考虑一个特殊的飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜导热扰动方程:

$$\begin{aligned} & \gamma u \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \sqrt{\frac{4 \ln 2 (1-R) J}{\pi c \delta}} \exp\left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{t}{c}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$C \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

在初始-边值条件 (3), (4) 下, 不难得出模型 (3)—(6) 的解 ( $U, V$ ) 为

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \right. \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{t_p}\right)^2 + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau\right) d\tau \cos \frac{k\pi x}{l} \right) \left. \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$V(x, t) = T_0. \quad (8)$$

不妨选取参数为:  $R = 0.57, a = 2, J = 1 \text{ mW}, c = 0.96 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}, l = 2 \text{ nm}, \gamma = 0.95 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-2}, \delta = 0.1 \text{ nm}, T_0 = 1^\circ \text{C},$

$C = 1 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$ . 由 (7), (8) 式可得飞秒脉冲激光特殊系统模型 (3)—(6) 式的电子温度  $U(x, t)$  的扩散分布函数的曲面图形, 如图 1 所示.

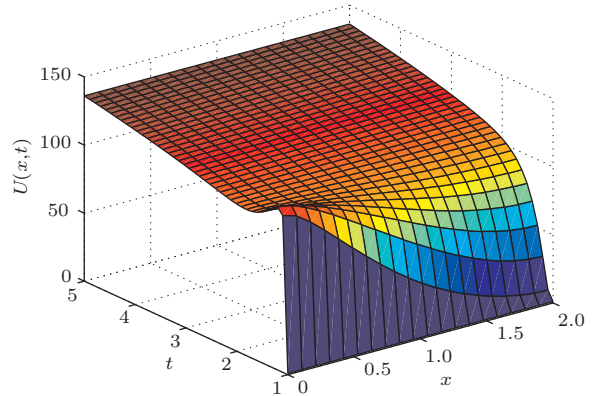


图 1 典型飞秒脉冲激光系统电子温度  $U(x, t)$  的扩散分布图

### 3 飞秒脉冲激光传导模型的同伦映射

利用泛函同伦映射方法来求广义非线性飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜导热扰动模型 (1)—(4) 式的近似解析解. 现引入一组泛函  $H_i[\bar{u}, \bar{v}, p] (i = 1, 2)$  的同伦映射<sup>[15,16]</sup>:

$$\begin{aligned} H_1[\bar{u}, \bar{v}, p] &= L_1[\bar{u}, \bar{v}] - L_1[w, \bar{w}] \\ &+ p \left[ L_1[w, \bar{w}] + b \left( \sqrt{\bar{u}} - \frac{1}{\bar{v}} \right) - \sqrt{\frac{4 \ln 2 (1-R) J}{\pi c \delta}} \right. \\ &\times \exp\left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{t}{c}\right)^2\right) - F\left(\sqrt{\bar{u}}, \frac{1}{\bar{v}}\right) \left. \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} H_2[\bar{u}, \bar{v}, p] &= L_2[\bar{u}, \bar{v}] - b(w - \bar{w}) \\ &+ p \left[ b \left( \sqrt{\bar{u}} - \frac{1}{\bar{v}} \right) - G\left(\sqrt{\bar{u}}, \frac{1}{\bar{v}}\right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $p$  为人工参数<sup>[15,16]</sup>,  $(\sqrt{\bar{w}}, \frac{1}{\bar{w}})$  为方程 (1) 的一组初始近似, 算子  $L_i[\bar{u}, \bar{v}] (i = 1, 2)$  为:

$$L_1[\bar{u}, \bar{v}] = \frac{1}{2} \left[ \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^2} \right],$$

$$L_2[\bar{u}, \bar{v}] = C \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\bar{v}} \right).$$

显然由同伦映射 (9), (10) 式知, 当  $u = \sqrt{\bar{u}},$

$v = \frac{1}{\bar{v}}$  时,  $H_2(\sqrt{\bar{u}}, \frac{1}{\bar{v}}, 1) = 0$ ,  $H_2(\sqrt{\bar{u}}, \bar{v}, 1) = 0$  是非线性飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜导热扰动方程 (1), (2). 因此问题 (1)—(4) 式的解就是对应的初始-边值条件下  $H_1(\bar{u}, \frac{1}{\bar{v}}, 1) = 0$ ,  $H_2(\sqrt{\bar{u}}, \bar{v}, 1) = 0$  的解当  $p \rightarrow 1$  的情形.

设

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{u}(x, t)} &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) p^i, \\ \bar{v}(x, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{v_i(x, t)} p^i. \end{aligned} \quad (11)$$

将 (12) 式代入同伦映射 (9), (10) 式, 展开为  $p$  的幂级数, 合并  $p^i$  的同次幂项, 并令各次幂的系数为零. 由  $p^0$  的系数为零, 得

$$\begin{aligned} L_1 \left[ u_0^2, \frac{1}{v_0} \right] &= L_1[w, \bar{w}], \\ L_2 \left[ u_0^2, \frac{1}{v_0} \right] &= L_2[w, \bar{w}]. \end{aligned} \quad (12)$$

选取一组初始函数  $(\sqrt{w}, \frac{1}{\bar{w}})$  为方程组 (3)—(6) 式的一组解 (7), (8):  $(U, V)$ . 即

$$\begin{aligned} &\sqrt{w(x, t)} \\ &= \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \right. \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp \left( -\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left( \frac{\tau}{c} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad \frac{1}{\bar{w}} = T_0. \end{aligned} \quad (13)$$

于是由 (12), (13) 得

$$u_0(x, t) = \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \right]$$

$$\begin{aligned} U_1(x, t) &= \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp \left( -\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left( \frac{\tau}{c} \right)^2 + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) d\tau \cos \frac{k\pi x}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + T_0 \left\{ \int_0^t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \int_0^1 [-b(u_0(\xi, \tau) - T_0) + F(u_0(\xi, \tau), T_0)] \cos(k\xi) d\xi \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \exp \left( \frac{a}{\gamma T_0} k^2 \pi^2 (t - \tau) \right) \cos(k\pi x) \right) \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

$$V_1(x, t) = T_0 + \frac{1}{C} \int_0^t \int_0^x [b(u_0(\xi, \tau) - T_0) + G(u_0(\xi, \tau), T_0)] d\xi \exp \left( -\frac{b}{C} (\tau - t) \right) d\tau. \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp \left( -\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left( \frac{\tau}{c} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$v_0(x, t) = T_0. \quad (15)$$

将 (11), (14), (15) 式代入同伦映射 (9), (10), 展开为  $p^i$  的同次幂项. 由  $p^1$  的系数为零, 得

$$L_1 \left[ u_1^2, \frac{1}{v_1} \right] = [-b(u_0 - T_0) + F(u_0, T_0)], \quad (16)$$

$$L_2 \left[ u_1^2, \frac{1}{v_1} \right] = b(u_0 - T_0) + G(u_0, T_0). \quad (17)$$

不难得到方程组 (16), (17) 在零初始-边值下的解为

$$\begin{aligned} &u_1(x, t) \\ &= T_0 \left\{ \int_0^t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \int_0^1 [-b(u_0(\xi, \tau) - T_0) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + F(u_0(\xi, \tau), T_0)] \cos(k\xi) d\xi \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp \left( \frac{a}{\gamma T_0} k^2 \pi^2 (t - \tau) \right) \cos(k\pi x) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \times d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &v_1(x, t) \\ &= \frac{1}{C} \int_0^t \int_0^x [b(u_0(\xi, \tau) - T_0) + G(u_0(\xi, \tau), T_0)] \\ &\quad \times d\xi \cdot \exp \left( -\frac{b}{C} (\tau - t) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

于是, 得到了广义非线性飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜导热扰动模型 (1)—(4) 式的第一次近似解析解  $U_1(x, t), V_1(x, t)$  为

将 (11), (14), (15), (20), (21) 式代入同伦映射 (9), (10), 展开为  $p$  的幂级数, 合并  $p^i$  的同次幂项. 由  $p^1$  的系数为零, 得

$$L_1 \left[ u_2^2, \frac{1}{v_2} \right] = [-b(u_1 - v_1) + F(u_1, v_1)], \quad (22)$$

$$L_2 \left[ u_1^2, \frac{1}{v_2} \right] = [b(u_1 - v_1) + G(u_1, v_1)]. \quad (23)$$

不难得到方程 (22), (23) 在零初始-边值下的解为

$$u_2(x, t) = T_0 \left\{ \int_0^t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \int_0^1 [-b(u_1(\xi, \tau) - v_1(\xi, \tau)) + F(u_1(\xi, \tau), v_1(\xi, \tau))] \times \cos(k\xi) d\xi \times \exp \left( \frac{a}{\gamma v_1} k^2 \pi^2 \times (t - \tau) \cos(k\pi x) \right) \right) \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{C} \int_0^t \int_0^x [b(u_1(\xi, \tau) - v_1(\xi, \tau)) - G(u_1(\xi, \tau), v_1(\xi, \tau))] d\xi \times \exp \left( -\frac{b}{C}(\tau - t) \right) d\tau. \quad (25)$$

于是, 我们得到了广义非线性飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜导热扰动模型 (1)–(4) 式的第二次近似解析解  $U_2(x, t), V_2(x, t)$ :

$$U_2(x, t) = \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp \left( -\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left( \frac{\tau}{c} \right)^2 + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} + T_0 \left\{ \int_0^t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \times \int_0^1 [-b(u_0(\xi, \tau) + u_1(\xi, \tau) - T_0 - v_1(\xi, \tau)) + F(u_0(\xi, \tau), T_0) + F(u_1(\xi, \tau), v_1(\xi, \tau))] \cos(k\xi) d\xi \times \exp \left( \frac{a}{\gamma T_0} k^2 \pi^2 (t - \tau) \right) \times \cos(k\pi x) \right) \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

$$V_2(x, t) = T_0 + \frac{1}{C} \int_0^t \int_0^x [b(u_0(\xi, \tau)$$

$$+ u_1(\xi, \tau) - T_0 - v_1(\xi, \tau)) - G(u_0(\xi, \tau), T_0) - G(u_1(\xi, \tau), v_1(\xi, \tau))] d\xi \times \exp \left( -\frac{b}{C}(\tau - t) \right) d\tau. \quad (27)$$

继续将 (11) 式代入同伦映射 (9), (10) 式, 用同样的方法, 可以依次得到  $U_n(x, t), V_n(x, t)$ , ( $n = 3, 4, \dots$ ).

我们能够利用泛函同伦映射理论和不动点定理证明 [6,7,15,16] 函数序列  $\{U_n(x, t), V_n(x, t)\}$  是一致收敛的. 其极限函数就是广义非线性飞秒脉冲激光电子和声子控制金属薄膜导热扰动模型 (1)–(4) 式的精确解, 而  $(U_n(x, t), V_n(x, t))$  就是模型的一组第  $n$  次近似解析解.

### 4 举 例

为简单起见, 现设广义激光及导热过程转化的非线性扰动热源项  $F = u^2, G = 0$ . 这时扰动模型 (1)–(4) 式为

$$\gamma u \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - b(u - v) + \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi} \frac{(1-R)J}{c\delta}} \times \exp \left( -\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left( \frac{t}{c} \right)^2 \right) + u^2, \quad (28)$$

$$C \frac{\partial v}{\partial t} = b(u - v), \quad (29)$$

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = T_0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (31)$$

利用泛函同伦映射方法, 不难得到飞秒脉冲激光电子和声子控制导热模型 (28)–(31) 式的第一近似解析解  $(U_1, V_1)$  为

$$U_1(x, t) = \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp \left( -\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left( \frac{\tau}{c} \right)^2 + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} + T_0 \left\{ \int_0^t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \right. \right. \right.$$



$$\begin{aligned} & \times \int_0^1 [-b(u_0(\xi, \tau) - T_0) \\ & + u_0^2(\xi, \tau)] \cos(k\xi) d\xi \\ & \times \exp\left(\frac{a}{\gamma T_0} k^2 \pi^2 (t - \tau)\right) \\ & \times \cos(k\pi x) \Big] d\tau \Big\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} V_1(x, t) = T_0 + \frac{1}{C} \int_0^t \int_0^x b(u_0(\xi, \tau) - T_0) d\xi \\ \times \exp\left(-\frac{b}{C}(\tau - t)\right) d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

选取相应的参数:  $R = 0.57$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $J = 1 \text{ mW}$ ,  $c = 0.96 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}$ ,  $l = 2 \text{ nm}$ ,  $\gamma = 0.95 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-2}$ ,  $\delta = 0.1 \text{ nm}$ ,  $T_0 = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $C = 1 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$ , 由 (32), (33) 式得飞秒脉冲激光系统电子和声子控制导热模型 (1)—(4) 式的电子温度的第一次近似解析解  $U_1$  的扩散分布函数的曲面图形由图 2 所示 (同样也可得到声子温度的  $V_1$  近似解析解的扩散分布函数的曲面图形).

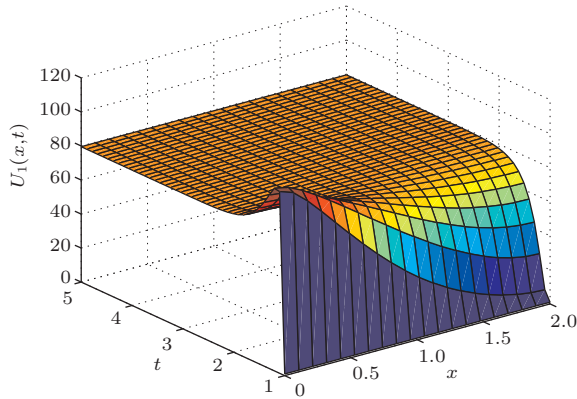


图 2 飞秒脉冲激光系统电子温度一次近似解  $U_1(x, t)$  的扩散分布图

继续用泛函同伦映射方法, 可以得到广义飞秒脉冲激光电子和声子控制导热模型 (28)—(31) 式的第二近似解析解 ( $U_2, V_2$ ) 为

$$\begin{aligned} U_2(x, t) = & \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{c}\right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau\right) d\tau \cdot \cos\frac{k\pi x}{l} \right) \Big] \Bigg]^{\frac{1}{2}} \\ & + T_0 \left\{ \int_0^t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^1 [-b(u_0(\xi, \tau) + u_1(\xi, \tau) \\ & - T_0 - v_1(\xi, \tau)) + u_0^2(\xi, \tau) \\ & + u_1^2(\xi, \tau)] \cos(k\xi) d\xi \\ & \times \exp\left(\frac{a}{\gamma T_0} k^2 \pi^2 (t - \tau)\right) \\ & \times \cos(k\pi x) \Big] d\tau \Big\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} V_2(x, t) = T_0 + \frac{1}{C} \int_0^t \int_0^x b(u_0(\xi, \tau) \\ + u_1(\xi, \tau) - T_0 - v_1(\xi, \tau)) d\xi \\ \times \exp\left(-\frac{b}{C}(\tau - t)\right) d\tau. \end{aligned} \quad (35)$$

同样, 选取相应的参数, 由 (34), (35) 式可得广义飞秒脉冲激光系统电子和声子控制导热模型 (1)—(4) 式的电子和声子温度的第二次近似解 ( $U_2, V_2$ ) 的扩散分布函数图. 其曲面图形在此从略.

## 5 近似解析解的意义

用近似解析解和得到的模拟图可以看出脉冲激光电子和声子温度的通量、峰值和其他有关的物理量的趋势等性态, 并且可以通过调整飞秒速度及脉冲激光强度和其他有关参数, 使得导热模型达到最佳状态. 用解析的方法来获得模型解的解析表达式, 便于对模型的各物理量性态可作更深入的数学分析.

由上述提供的方法还可继续得到更高次的近似解析解, 以便得到更精确的结果, 使得与模型的实际情况更接近.

## 6 泛函同伦映射方法讨论

用泛函同伦映射方法来求非线性方程的物理问题的近似解析解是本世纪初发展起来的一种方法 [15,16], 其方法和理论还在不断地改进中. 本文通过适当改进的方法来讨论广义飞秒脉冲激光系统电子和声子控制导热模型, 并取得了良好的结果.

首先, 本方法用数学解析式来表述对应问题的近似解, 因此对所得的各次近似式还可进行微分、积分等解析运算, 进而得到待求物理量关于模型中相应物理参数的变化趋势. 这是比较于通常数值方法的优点之一. 特别地, 泛函同伦映射方法可以较简便地得到具有某种“突变”型的物理量模型解的

近似表达式. 传统的数值方法尽管也可处理此类问题, 但因其需较细的网格剖分而使得计算过程十分复杂, 而且在转移层、转向点等附近, 解的某些突变特性也易被忽略.

对非线性问题, 近来已经有一些研究利用解析式来表达问题的解, 例如 Jacobi 椭圆函数法、双曲函数法、 $G'/G$  展开法、修正的 CK 方法、非经典李群方法、齐次平衡法等, 这些方法在一定的场合下, 能得到很好的结果. 但是这些方法的求解往往只适用于具体的特殊非线性方程. 求解会受到一定的限制. 然而, 本文所涉及的泛函同伦映射方法求近似解的面比较广, 方程中非线性项的表示式不必很具体.

此外, 泛函同伦映射方法还有一个与其他求近似解析解的方法不同的特点, 就是泛函同伦映射方法是在泛函分析的函数空间下进行的, 因此讨论的对象无论是模型的结构还是近似解及其性态都是在泛函分析的广义函数空间意义下进行的. 在弹性力学、热力学、量子力学、激波理论等物理学中, 许多问题都涉及广义函数的概念, 譬如“点源  $\delta(x)$  函数”就是在许多现代物理学中出现的一个广义函数.

本文得到的广义飞秒脉冲激光对纳米金属传导模型的近似解析解, 是采用泛函同伦方法与其他方法相结合的情况下得出的近似解. 首先, 用其他相应的方法求出非线性的退化问题精确解, 以此解析精确解为泛函同伦映射关系式的初始近似, 再利用同伦迭代式依次地得到各次近似解析式.

用泛函同伦方法求解纳米金属传导模型的近似解析解, 一般具有快速逼近原问题解的特点. 因为我们选用了相应的退化问题作为迭代表达式的初始近似, 因此在某种情况下较大地减少了相关的迭代步骤.

同时, 用泛函同伦方法求解广义飞秒脉冲激光对纳米金属传导模型的近似解析解, 在一定意义下还可以较快地得到近似解析解所要求的精度. 例如, 在本文第 4 节中, 若非线性扰动项为微扰的:  $F = \varepsilon u^2$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 这时可得到的电子温度的一次近似解析解  $U_1(x, t)$  为

$$U_1(x, t) = \left[ T_0 + \frac{8(1-R)J}{c\delta\pi} \sqrt{\frac{T_0 \ln 2}{\gamma a \pi}} \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - 4 \ln 2 \left( \frac{\tau}{c} \right)^2 + \frac{-ak^2\pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) \right. \\ \left. \times d\tau \cos \frac{k\pi x}{l} \right]^{\frac{1}{2}} \\ + T_0 \left\{ \int_0^t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^1 [-b(u_0(\xi, \tau) - T_0) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon u_0^2(\xi, \tau)] \cos(k\xi) d\xi \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(\frac{a}{\gamma T_0} k^2 \pi^2 (t - \tau)\right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(k\pi x) \right] \right\} d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

可以利用泛函分析的不动点定理证明由 (36) 式决定的电子温度的一次近似解析解  $U_1(x, t)$  与对应的原广义飞秒脉冲激光对纳米金属传导模型的解  $u_{\text{exact}}(x, t)$  之间有以下的关系式:

$$U_1(x, t) = u_{\text{exact}}(x, t) + O(\varepsilon) \quad (0 < \varepsilon \ll 1).$$

由上式知, 用泛函同伦方法求解纳米金属传导模型的一次近似解析解已具有良好的精度.

用泛函同伦方法求解物理问题, 也有其欠缺之处. 首先, 得到解的迭代序列必须是收敛的, 否则得到的各次“近似”解就无意义. 其次, 在用同伦迭代式依次得到的近似序列函数解时, 初始近似必须选择得当, 这样才能使各次近似较快地达到所要求的精度. 因此, 退化问题解的性态应与原问题解的性态基本相符. 否则还要用其他途径选择初始近似. 泛函同伦方法如何克服这些不足, 需要我们在今后进行更深入的探讨.

## 7 结 论

本文用有关数学理论和方法来得到广义飞秒脉冲激光对纳米金属薄膜导热模型的一次和二次近似解析解. 所得结果显式地给出了电子温度和声子温度对导热系数、电子与声子热容等物理参数的依赖关系, 便于与实验结果比较, 以此作为改进加工技术的根据. 结果表明, 泛函同伦方法是研究此类问题简便而有效的方法.

## 参考文献

- [1] Anisimov S, Kapeliovich B, Perelman T 1974 *Sov. Phys. JETP* **39** 375

- [2] Eesley G L 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2140
- [3] Qiu T Q, Tien C L 1993 *J. Heat Transf. Trans. ASME* **115** 835
- [4] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华, 方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [5] Ma W G, Wang H D, Zhang X, Wang W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064401 (in Chinese) [马维刚, 王海东, 张兴, 王玮 2011 物理学报 **60** 064401]
- [6] de Jager E M, Jiang Furu 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)
- [7] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problem* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)
- [8] Xie F 2012 *J. Differ. Equations* **252** 2370
- [9] Lin W T, Zhang Y, Mo J Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030205
- [10] Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 010204
- [11] Mo J Q 1989 *Sci. China A* **32** 1306
- [12] Mo J Q 2009 *Sci. China G* **52** 1007
- [13] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
- [14] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202
- [15] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co.)
- [16] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]

# Homotopic mapping solving method of transfers model with a class of generalized femtosecond pulse laser for nano metal\*

Xie Feng<sup>1)†</sup> Lin Wan-Tao<sup>2)</sup> Mo Jia-Qi<sup>3)‡</sup>

1) (College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China)

2) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

3) (Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

( Received 28 May 2014; revised manuscript received 11 July 2014 )

## Abstract

A class of transfer model for femtosecond pulse laser nano metal film is investigated. Firstly, the exact solution of a typical model is obtained. And then, the arbitrary order approximate analytic solution of corresponding model is obtained by using the functional homotopic mapping method. Finally, the meaning of solution is discussed.

**Keywords:** pulse, nano metal, transmission

**PACS:** 02.30.Jr

**DOI:** 10.7498/aps.63.240201

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 41275062) and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. 2232012D3-34).

† Corresponding author. E-mail: [fxie@dhu.edu.cn](mailto:fxie@dhu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn](mailto:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn)