

导电导磁管道外任意放置线圈激励下脉冲涡流场时域解析解

陈兴乐 雷银照

Analytical solutions to pulsed eddy current field excited by a differently oriented probe coil outside a conducting ferromagnetic pipe

Chen Xing-Le Lei Yin-Zhao

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), **63**, 240301 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.240301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2014/V63/I24>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于压缩感知的目标频空电磁散射特性快速分析

Fast analysis of electromagnetic scattering characteristics in spatial and frequency domains based on compressive sensing

物理学报.2014, 63(17): 170301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.170301>

有限元/边界积分方法在海面及其上方弹体目标电磁散射中的应用

Electromagnetic scattering from missile target above sea surface with finite element/boundary integral method

物理学报.2013, 62(17): 170301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.170301>

部分 Bessel 形电磁波

Partial Bessel electromagnetic wave

物理学报.2013, 62(3): 030301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.030301>

二维泊松方程的遗传 PSOR 改进算法

An ameliorative algorithm of two-dimensional Poisson equation based on genetic parallel successive over-relaxation method

物理学报.2013, 62(2): 020301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.020301>

二维海面上舰船目标电磁散射及合成孔径雷达成像技术研究

Research on electromagnetic scattering computation and synthetic aperture radar imaging of ship located on two-dimensional ocean surface

物理学报.2012, 61(16): 160301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.160301>

导电导磁管道外任意放置线圈激励下 脉冲涡流场时域解析解*

陈兴乐[†] 雷银照

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

(2014年7月8日收到; 2014年8月8日收到修改稿)

利用二阶矢量位和洛伦兹互易定理, 解析求解了导电、导磁金属管道外任意放置线圈激励下非轴对称涡流场的频域解. 利用求频域式极点处留数的方法求解拉普拉斯反变换, 得到了脉冲电流激励下检测线圈两端感应电压以及管壁内脉冲涡流分布的时域解析式. 分析比较了不同线圈放置方式下管壁内脉冲涡流的分布和扩散过程, 以及感应电压对管壁的灵敏度. 研究表明: 当线圈轴线沿管道径向法线方向放置时, 得到的感应电压时域信号最强, 对壁厚的检测灵敏度最高.

关键词: 脉冲涡流电磁场, 二阶矢量位, 铁磁管道, 时域解析解

PACS: 03.50.De, 41.20.-q, 81.70.Ex

DOI: 10.7498/aps.63.240301

1 引言

工业领域大量使用导电导磁的铁磁金属管道来输送和存储具有高温、高压、腐蚀性强的液体或气体介质, 管道的腐蚀十分普遍. 脉冲涡流法是一种可以在包覆层外在役检测铁磁管道腐蚀的电磁无损检测方法^[1,2]. 以脉冲电流激励代替正弦激励, 使导体内感应出脉冲涡流, 在导体外产生脉冲磁场, 通过检测此脉冲涡流电磁场的衰减过程来评估管道壁厚的腐蚀程度. 求解管道外任意放置线圈激励下非轴对称脉冲涡流场的时域解, 是准确实施管道脉冲涡流检测的理论基础.

轴对称管道涡流场问题的解析求解方法已有较多的研究结果. 利用分离变量法, 文献[3, 4]解析求解了同轴穿过式线圈激励下多层圆柱导体涡流场的磁矢量. 对于非轴对称管道三维涡流场模型, 引入二阶矢量位求解是一种有效的求解方法, 文献[5—7]对穿过式偏心线圈, 计及管道端部效应, 管道内、外壁不同轴等非轴对称情况下的管道涡流问题进行了解析求解. 文献[8—10]基于电磁场叠加原理, 指出利用二阶矢量位求解非轴对称涡流场的

关键之一是求解线圈探头在空气中入射场的线圈系数. 其中文献[8]在求解无限大导体中螺栓孔内放置式线圈的涡流场阻抗时, 给出了直接法和间接法两种线圈系数的求解思路; 文献[9]利用间接法给出了实心圆柱导体外垂直放置圆柱线圈的线圈系数; 文献[10]则给出了圆柱导体外任意放置圆柱线圈的线圈系数从直角坐标系向圆柱坐标系转换的计算公式. 文献[11—13]同样引入二阶矢量位, 将求解模型扩展到空心圆柱管道, 解析求解了管道外多种放置式线圈的涡流场模型.

文献[14, 15]证明了瞬态涡流电磁场定解问题的惟一性和稳定性. 在时谐涡流场解析式的基础上, 利用拉普拉斯反变换, 可求出模型脉冲涡流场的时域表达式^[16—20]. 文献[16]在求解管状导体空腔对脉冲磁场的屏蔽模型时, 利用留数定理, 通过求磁场复频域表达式极点处的留数, 得到了脉冲磁场的时域解. 文献[17, 18, 20]也通过求极点处留数的方法, 利用赫维赛展开式得到了平板导体脉冲涡流检测模型线圈感应电压级数形式的时域表达式.

本文利用二阶矢量位解析求解导电、导磁金属管道外任意放置线圈激励下非轴对称涡流场, 并给出三种典型放置方式下圆柱线圈的线圈系数表达

* 国防技术基础科研项目(批准号: Z132013T001)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: chenxingle@yeah.net

式; 然后通过求极点处留数的方法求拉氏反变换, 得到脉冲电流激励下检测线圈两端感应电压以及管壁内涡流密度分布的时域解析式; 最后分析比较线圈探头在三种典型放置方式下管壁内脉冲涡流分布和扩散过程, 以及感应电压时域信号对壁厚的灵敏度, 以找出对铁磁管道实施脉冲涡流检测时线圈探头的最佳放置方式.

2 管道涡流场频域解析式

2.1 不同线圈放置方式下管道涡流场模型

设长直导电、导磁金属管道的内半径为 r_1 , 外半径为 r_2 , 管道壁厚 $d = r_2 - r_1$, 电导率 σ , 磁导率 $\mu = \mu_0\mu_r$ (μ_0 为真空磁导率, μ_r 为相对磁导率). 高度为 h 的空心圆柱激励线圈 (下标为 d) 和检测

线圈 (下标为 p) 以三种典型方式放置在管道外, 如图 1—3 所示, 分别使线圈轴线沿管道径向法线方向 (方式 I), 与管道轴线平行 (方式 II), 沿管道圆周方向 (方式 III). 线圈探头边缘与管道外壁之间最短距离定义为探头提离 l_0 . 本文中所用线圈探头几何尺寸见表 1. 建立圆柱坐标系 $O\rho\varphi z$, 并让 z 轴与管道轴线重合. 为便于求解, 如图 1—3 所示, 将场域划分成 3 个场区: 场区 1, $\rho < r_1$; 场区 2, $r_1 < \rho < r_2$; 场区 3, $r_2 < \rho < r_2 + l_0$. 管道外任意放置的圆柱线圈, 都可分解成此三种典型方式的矢量叠加, 因此本文中以此三种典型放置方式为研究对象, 具有普适性.

对管道实施脉冲涡流检测时, 通过在激励线圈中通入脉冲激励电流, 使管壁内感应出脉冲涡流场, 然后采集激励电流关断后检测线圈两端感应电压时域信号, 来评估管道壁厚的腐蚀程度.

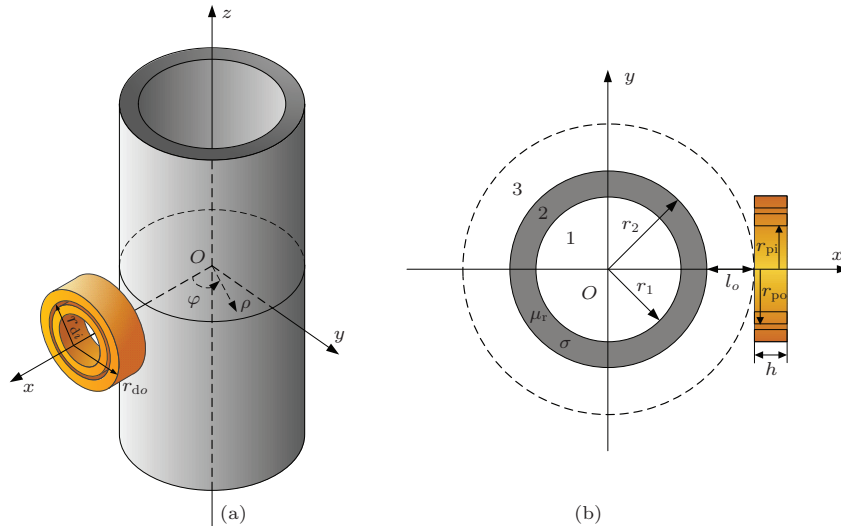


图 1 (网刊彩色) 圆柱线圈轴线沿管道径向法线方向 (方式 I) 放置时管道涡流场模型

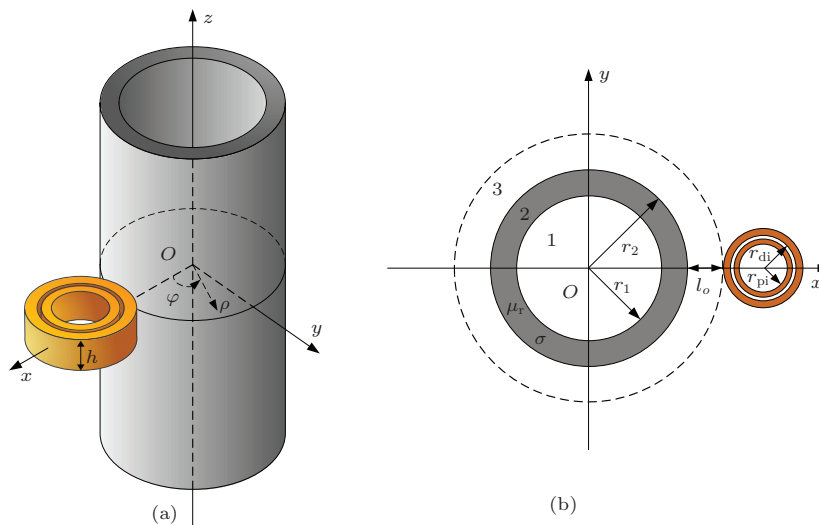


图 2 (网刊彩色) 圆柱线圈轴线与管道轴线平行 (方式 II) 放置时管道涡流场模型

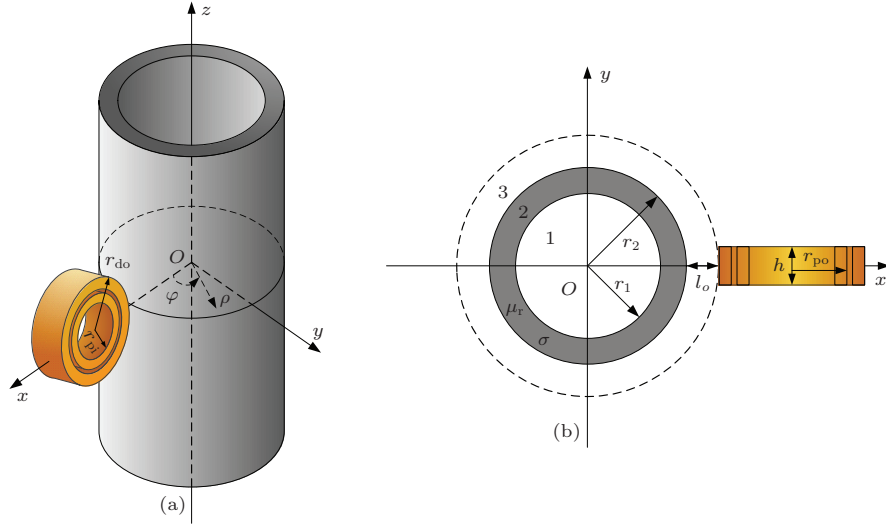


图3 (网刊彩色) 圆柱线圈轴线沿管道圆周方向(方式III)放置时管道涡流场模型

表1 激励线圈和检测线圈的几何尺寸

线圈参数	激励线圈	检测线圈
匝数 N	174	1025
高度 h/mm	25.0	25.0
内半径 r_1/mm	20.9	20.0
外半径 r_o/mm	22.2	20.8

2.2 二阶矢量位通解表达式

在图1—3所示的管道涡流检测模型中, 设激励线圈中通入激励电流的拉氏变换为 $I(s)$, 忽略模型中位移电流, 磁矢位 A 满足频域形式矢量亥姆霍兹方程^[4]

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0, \quad (1)$$

在空气场区1和3中, $k^2 = 0$; 在导体场区2中, $k^2 = -\mu\sigma s$. 对于图1—3所示的非轴对称涡流场问题, 直接求解磁矢位, 已变得困难. 此时, 依据磁矢位的洛伦兹规范引入二阶矢量位可简化求解^[21]. 引入二阶矢量位 \mathbf{W} 来表示磁矢位 \mathbf{A} , 有

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W} = \nabla \times (W_a \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \times \nabla W_b), \quad (2)$$

式中 \mathbf{e}_z 为 z 方向单位向量, W_a 和 W_b 为相互独立的标量函数, 且同时满足齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 W_a + k^2 W_a = 0, \quad (3)$$

$$\nabla^2 W_b + k^2 W_b = 0, \quad (4)$$

此时磁通密度 \mathbf{B} 可推导为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \left(\frac{\partial W_a}{\partial z} \right) + k^2 (W_a \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \times \nabla W_b). \end{aligned} \quad (5)$$

可见, 在无电流的自由空间, 三维磁场可用一个标量函数 W_a 来描述, 在导体区域, 可用2个标量函数 W_a 和 W_b 来描述. 利用圆柱坐标系下分离变量法求解方程(3)和(4), 并考虑 $\rho \rightarrow 0$ 处场量的有界性, 可得到各场区二阶矢量位标量函数的通解表达式^[11,12]:

$$\begin{aligned} W_{a1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{a1} I_m(|\lambda|\rho) \\ &\times e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} W_{a2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [C_{a2} I_m(\lambda_2 \rho) \\ &+ D_{a2} K_m(\lambda_2 \rho)] e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} W_{b2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [C_{b2} I_m(\lambda_2 \rho) \\ &+ D_{b2} K_m(\lambda_2 \rho)] e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} W_{a3} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_d I_m(|\lambda|\rho) \\ &\times e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_{a3} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_{ec} K_m(|\lambda|\rho) \\ &\times e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu\sigma s}$; $I_m(x)$ 和 $K_m(x)$ 分别为第1类和第2类 m 阶修正贝塞尔函数; C_{a1} , C_{a2} , D_{a2} , C_{b2} , D_{b2} , C_d 以及 D_{ec} 均是待定系数. 根据叠加原理, 场区3中二阶矢量位 W_{a3} 是入射场和涡流散射场两部分的叠加, 即 $W_{a3} = W_{as3} + W_{aec3}$, 其中用 W_{as3} 描述激励线圈单独作用时, 在空气中激发的

入射场; 用 W_{aec3} 描述管壁内涡流单独作用时, 在场区 3 中激发的散射场.

在图 1—3 划分的 3 个待求场区中, 包含 2 个内边界: 柱面 $\rho = r_1$ 和柱面 $\rho = r_2$. 这 2 个内边界面上没有外源分布, 所以内边界面上磁场满足边界条件 $\mathbf{e}_\rho \cdot (\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_i) = 0$ 和 $\mathbf{e}_\rho \times (\mathbf{H}_j - \mathbf{H}_i) = 0$, 式中 $i < j$, $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$ 和 $\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_j$ 分别为场区 i 和场区 j 中靠近边界的磁通密度和磁场强度. 将二阶矢量位的通解表达式 (6)—(10) 式代入 (5) 式中, 求出各场区的磁通密度后, 由这 2 个内边界面上 3 个方向的磁场边界条件, 列出 6 个线性无关的方程. 再利用之前研究工作 [11] 中提到的分块矩阵法求解此管道模型边值问题的线性方程组, 可得到 (6)—(10) 式中各待定系数的表达式:

$$\begin{bmatrix} D_{\text{ec}} I_m(|\lambda| r_2) \\ C_{\text{a1}} I_m(|\lambda| r_1) \end{bmatrix} = \frac{-C_d}{\lambda K_m(|\lambda| r_2)} \times \left((\beta \mathbf{P} \mathbf{Q}^{-1} + \alpha \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{R})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} C_{\text{a2}} \\ D_{\text{a2}} \end{bmatrix} = \frac{\alpha C_d}{\lambda_2 K_m(|\lambda| r_2)} \times \left((\beta \mathbf{P} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} + \alpha \mathbf{Q} - \mathbf{R} \mathbf{P})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} C_{\text{b2}} \\ D_{\text{b2}} \end{bmatrix} = \frac{m \alpha C_d}{\lambda \lambda_2^2 K_m(|\lambda| r_2)} \times \left((\alpha \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{R} \mathbf{Q} + \beta \mathbf{P})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\lambda \mu_r}{\lambda_2}, \\ \beta &= \frac{m^2 \mu_r}{\lambda_2^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda} \right), \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} K_m(\lambda_2 r_2) & I_m(\lambda_2 r_2) \\ K_m(\lambda_2 r_1) & I_m(\lambda_2 r_1) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} K'_m(\lambda_2 r_2) r_2 & I'_m(\lambda_2 r_2) r_2 \\ K'_m(\lambda_2 r_1) r_1 & I'_m(\lambda_2 r_1) r_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}, \\ r_{11} &= \frac{|\lambda| K_{m+1}(|\lambda| r_2)}{\lambda K_m(|\lambda| r_2)} r_2 - \frac{m}{\lambda}, \end{aligned}$$

$$r_{22} = -\frac{|\lambda| I_{m+1}(|\lambda| r_1)}{\lambda I_m(|\lambda| r_1)} r_1 - \frac{m}{\lambda}.$$

其中 $I'_m(x)$ 和 $K'_m(x)$ 分别表示第 1 类和第 2 类 m 阶修正贝塞尔函数对 x 的导数. 与文献 [12, 13] 的研究结果相比, 本文中利用分块矩阵法解得的待定系数 (11)—(13) 式, 形式更简单, 便于在下文中通过求频域解析式极点处留数的方法来求解拉式反变换.

由 (11)—(13) 式可知, 只要解出场区 3 中入射场二阶矢量位函数 W_{as3} 中的激励线圈系数 $C_d(\lambda, m)$, 就能确定通解 (6)—(10) 中其他的待定系数. 可见, 求解不同放置方式下线圈探头在空气中入射场的线圈系数, 是求解图 1—3 所示非轴对称管道涡流场的关键.

2.3 线圈探头不同放置方式下的线圈系数

文献 [8] 给出了直接法和间接法两种线圈系数的求解思路, 直接法利用毕奥-萨伐尔定律求解出激励线圈在空气中的磁场, 然后通过距离倒数的贝塞尔函数展开, 将磁场表达式化成与二阶矢量位 W_{as3} 通解表达式 (9) 式相同的形式, 最后通过比较两表达式得到线圈系数 $C_d(\lambda, m)$; 间接法则是通过解析法或数值计算法求出空气中激励线圈在边界面 $\rho = r_2 + l_0$ 上入射场磁通密度的一个分量后, 利用傅里叶级数展开, 得到线圈系数. 本文将从洛伦兹互易定理和法拉第电磁感应定律出发, 通过推导检测线圈系数 $C_p(\lambda, m)$, 来求解管道外任意形状、任意放置线圈探头的线圈系数通用表达式. 由洛伦兹互易定理, 检测线圈两端由管壁内涡流引起的涡流场感应电压可写为 [8,9]

$$U_{\text{ec}}(s) = \frac{4\pi^2 s}{\mu_0 I(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda^2 C_p(-\lambda, -m) \times D_{\text{ec}}(\lambda, m) d\lambda, \quad (14)$$

式中检测线圈系数 $C_p(\lambda, m)$ 与 (9) 式中激励线圈系数 $C_d(\lambda, m)$ 有相同的形式, 只需将表达式中检测线圈的几何参数换成激励线圈的几何参数. 因此, 我们也可以通过求解检测线圈系数 $C_p(\lambda, m)$, 来确定 (11)—(13) 式中待求的激励线圈系数 $C_d(\lambda, m)$. 由 (5) 式可知, 管壁内涡流在场区 3 中激发的涡流散射场磁通密度 \mathbf{B}_{ec3} 为

$$\mathbf{B}_{\text{ec3}} = \nabla \left(\frac{\partial W_{\text{aec3}}}{\partial z} \right). \quad (15)$$

由法拉第电磁感应定律, 此涡流散射场会在检测线圈两端感应出电压

$$U_{\text{ec}}(s) = -s \iint_{S_Q} \mathbf{B}_{\text{ec3}} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= -s \iint_{S_Q} \nabla \left(\frac{\partial W_{\text{aec3}}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (16)$$

式中, S_Q 表示检测线圈内所有闭合回路张成的曲面, 单位向量 \mathbf{n} 为曲面的正方向. 将(10)式所示 W_{aec3} 代入(16)式中, 再与(14)式对比, 可得检测线圈系数为

$$C_p(\lambda, m) = j \frac{\mu_0 I(s)}{4\pi^2 \lambda} \iint_{S_Q} \nabla [K_m(|\lambda|\rho) \times e^{-jm\varphi} e^{-j\lambda z}] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (17)$$

此通用表达式可求解管道外任意形状、任意放置线圈的线圈系数, 只与线圈的几何形状和放置方位有关, 与被检管道参数无关. (17)式与文献[8]中直接法求解得到的表达式一致, 推导过程简单, 思路容易理解.

对图1所示线圈轴线沿管道径向法线方向放置的情况, 有 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$, 代入(17)式中, 可解得图1所示管道涡流场的检测线圈系数

$$\begin{aligned} C_p^I(\lambda, m) &= \frac{j\mu_0 I(s)n_p}{\pi^2 \lambda^2} \\ &\times \int_{r_2+l_o}^{r_2+l_o+h_p} dx \int_{r_{pi}}^{r_{po}} dr_0 \int_0^{r_0} (C_{sa}^I + C_{sb}^I) \\ &\times \sin(\lambda \sqrt{r_0^2 - y^2}) dy, \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} C_{sa}^I &= \frac{|\lambda|x}{\sqrt{x^2 + y^2}} K'_m(|\lambda|\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &\times \cos\left(m \arctan \frac{y}{x}\right), \\ C_{sb}^I &= \frac{my}{x^2 + y^2} K_m(|\lambda|\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &\times \sin\left(m \arctan \frac{y}{x}\right), \\ n_p &= \frac{N_p}{(r_{po} - r_{pi})h_p}. \end{aligned}$$

将上式中检测线圈的几何参数换成激励线圈的参数, 即激励线圈系数 $C_d(\lambda, m)$, 将其代入(11)式中, 求出待定系数 D_{ec} 后, 再代入(14)式中, 即可求得检测线圈两端由管道内涡流引起的感应电压频域表达式.

对于图2所示圆柱线圈轴线与管道轴线平行的情况, 有 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, 同样利用(17)式求出线圈系数后, 再利用修正贝塞尔函数加法定理, 将圆柱坐标系的 z 轴从管道轴线移至线圈轴线, 可对线圈系数

的表达式进行化简得[13]

$$\begin{aligned} C_p^{II}(\lambda, m) &= \frac{\mu_0 I(s)n_p}{\pi \lambda |\lambda|} \sin(\lambda h_p/2) \\ &\times K_m(|\lambda|x_0) \int_{r_{pi}}^{r_{po}} I_1(|\lambda|r) r dr, \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $x_0 = r_2 + l_o + r_{do}$.

对于图3所示圆柱线圈轴线沿管道圆周方法放置的情况, 有 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$, 由(17)式同理可求得

$$\begin{aligned} C_p^{III}(\lambda, m) &= \frac{\mu_0 I(s)n_p}{\pi^2 \lambda^2} \int_0^{h_p/2} dy \\ &\times \int_{r_{pi}}^{r_{po}} dr_0 \int_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} (C_{sa}^{III} + C_{sb}^{III}) \\ &\times \sin(\lambda \sqrt{r_0^2 - (x - x_0)^2}) dx, \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} C_{sa}^{III} &= \frac{|\lambda|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} K'_m(|\lambda|\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &\times \sin\left(m \arctan \frac{y}{x}\right), \\ C_{sb}^{III} &= \frac{mx}{x^2 + y^2} K_m(|\lambda|\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &\times \cos\left(m \arctan \frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

为了后文中计算方便, 将线圈系数对激励电流归一化, 记 $C_{pu}(\lambda, m) = C_p(\lambda, m)/I(s)$.

3 导电导磁管道脉冲涡流场时域解析式

3.1 变量代换

得到场量在复频域中的表达式后, 可通过计算频域式极点处留数的方法来实现拉氏反变换. 然而, 与文献[17—19]中平板导体模型相比, 图1—3所示管道模型涡流场的复频域表达式更复杂, 找出其极点的难度更大. 为了便于计算场量在复频域中的极点, 将(11)式解得的系数 D_{ec} 代入感应电压频域(14)式中, 然后进行变量代换

$$\xi = j\lambda_2 = j\sqrt{\lambda^2 + \mu\sigma s}, \quad (21)$$

则涡流场感应电压复频域表达式可化为

$$\begin{aligned} U_{ec}(s) &= \frac{4\pi^2 I(s)s}{\mu_0} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_{du}(\lambda, m)C_{pu}(-\lambda, -m)\lambda}{K_m^2(|\lambda|r_2)} \end{aligned}$$

$$\times \frac{F_{N1}(\xi)}{F_D(\xi)} d\lambda, \quad (22)$$

式中

$$F_{N1}(\xi) = \beta_\xi A_m D_m - \alpha_\xi B_m C_m - A_m B_m r_{22}, \quad (23)$$

$$F_D(\xi) = (\beta_\xi A_m + \alpha_\xi B_m)^2 - \alpha_\xi \beta_\xi (C_m + D_m)^2 - \beta_\xi A_m (C_m r_{22} + D_m r_{11}) + \alpha_\xi B_m (D_m r_{22} + C_m r_{11}) + A_m B_m r_{11} r_{22}, \quad (24)$$

式中

$$\alpha_\xi = -\frac{\lambda \mu_r}{\xi}, \quad \beta_\xi = -\frac{m^2 \mu_r}{\xi^2} \left(\frac{\lambda}{\xi} + \frac{\xi}{\lambda} \right),$$

A_m, B_m, C_m 和 D_m 分别为贝塞尔函数的多项式:

$$A_m(r_1, r_2, \xi)$$

$$\begin{aligned} &= J_m(r_1 \xi) Y_m(r_2 \xi) - J_m(r_2 \xi) Y_m(r_1 \xi), \\ &B_m(r_1, r_2, \xi) \\ &= [J'_m(r_1 \xi) Y'_m(r_2 \xi) - J'_m(r_2 \xi) Y'_m(r_1 \xi)] r_1 r_2, \\ &C_m(r_1, r_2, \xi) \\ &= [J'_m(r_1 \xi) Y_m(r_2 \xi) - J_m(r_2 \xi) Y'_m(r_1 \xi)] r_1, \\ &D_m(r_1, r_2, \xi) \\ &= [J_m(r_1 \xi) Y'_m(r_2 \xi) - J'_m(r_2 \xi) Y_m(r_1 \xi)] r_2, \end{aligned}$$

其中 $J_m(x)$ 和 $Y_m(x)$ 分别为第 1 类和第 2 类 m 阶贝塞尔函数, $J'_m(x)$ 和 $Y'_m(x)$ 分别表示其对 x 的导数. 下文中, $A_m(r_1, r_2, \xi), B_m(r_1, r_2, \xi), C_m(r_1, r_2, \xi)$ 和 $D_m(r_1, r_2, \xi)$ 默认简写为 $A_m(\xi), B_m(\xi), C_m(\xi)$ 和 $D_m(\xi)$. 将 2.3 节中求得的三种线圈放置方式下线圈系数表达式 (18)—(20) 式代入 (12) 和 (13) 式中, 解得待定系数 C_{a2}, D_{a2}, C_{b2} 和 D_{b2} 后, 代入二阶矢量位 (7) 和 (8) 式中, 并进行 (21) 式所示变量代换, 得到导体场区 2 中二阶矢量位标量函数的复频域解:

$$W_{a2}(s) = \mu_r I(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_{du}(\lambda, m) \lambda}{\xi^2 K_m(|\lambda| r_2)} \frac{A_m(r_1, \rho, \xi) F_{N1}(\xi) + A_m(\rho, r_2, \xi) F_{N2}(\xi)}{A_m(\xi) F_D(\xi)} e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \quad (25)$$

$$W_{b2}(s) = \mu_r I(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_{du}(\lambda, m) m}{\xi^3 K_m(|\lambda| r_2)} \frac{C_m(r_1, \rho, \xi) F_{N1}(\xi) + D_m(\rho, r_2, \xi) F_{N2}(\xi)}{B_m(\xi) F_D(\xi)} e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \quad (26)$$

式中 $F_{N2}(\xi) = \frac{2}{\pi \xi} (\beta_\xi A_m(\xi) + \alpha_\xi B_m(\xi))$.

3.2 脉冲涡流场时域解析式

求出复频域中像函数 $F(s)$ 后, 可通过留数法来求解 $F(s)$ 的拉氏反变换 [22]:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_k] \quad (27)$$

式中 s_k 是像函数 $F(s)$ 的第 k 个极点, $\text{Res}[F(s) e^{st}, s_k]$ 表示 $F(s) e^{st}$ 在极点 s_k 处的留数. 据此, 我们可通过计算 $\frac{F_{N1}(\xi)}{F_D(\xi)} e^{st}$ 在分母 $F_D(\xi)$ 零点处的留数来求解 (22) 式所示感应电压的单位阶跃响应. 并用激励电流对时间的导数 $i'(t)$ 与模型单位阶跃响应作卷积, 来得到激励线圈通入脉冲电流 $i(t)$ 时, 检测线圈两端涡流场感应电压的时域解

$$u_{ec}(t) = i'(t) * \frac{8\pi^2}{\mu_0 \mu \sigma} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_{du}(\lambda, m) C_{pu}(-\lambda, -m) \lambda}{K_m^2(|\lambda| r_2)}$$

$$\times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{F_{N1}(\xi_{Dk})}{F'_D(\xi_{Dk})} \xi_{Dk} e^{-\frac{\xi_{Dk}^2 + \lambda^2}{\mu \sigma} t} d\lambda, \quad (28)$$

式中 “*” 表示对时间的卷积运算

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau,$$

ξ_{Dk} 是 (24) 式所示分母表达式 $F_D(\xi) = 0$ 的第 k 个正实根, $F'_D(\xi)$ 表示对变量 ξ 的导数. 极点 ξ_{Dk} 可通过数值计算方法获得.

4 不同线圈放置方式下管道脉冲涡流场的分布

在图 1—3 所示金属管道涡流检测模型中, 管壁内涡流密度与磁矢位 \mathbf{A}_2 的关系为

$$\mathbf{J}(\rho, \varphi, z) = -\sigma s \mathbf{A}_2(\rho, \varphi, z), \quad (29)$$

由二阶矢量位的定义 (2) 式, 可将圆柱坐标系下管壁内磁矢位 \mathbf{A}_2 用 (25) 和 (26) 式求出的二阶矢量位 $W_{a2}(s)$ 和 $W_{b2}(s)$ 表出, 再代入 (29) 式, 即可求得管壁内涡流密度在复频域中的解析式. 然后利用 3.2

节中同样的拉普拉斯反变换, 得到激励线圈中通入脉冲电流 $i(t)$ 时, 管壁内涡流密度各分量的时域表达式:

$$J_\rho = i'(t) * \frac{2j}{\mu_0 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_{du}(\lambda, m)m\lambda}{K_m(|\lambda|r_2)} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma_\rho(\rho, \xi_k)}{\xi_k \Lambda'(\xi_k)} \times e^{-\frac{\xi_k^2 + \lambda^2}{\mu\sigma} t} e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \quad (30)$$

$$J_\varphi = i'(t) * \frac{2}{\mu_0 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_{du}(\lambda, m)\lambda}{K_m(|\lambda|r_2)} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma_\varphi(\rho, \xi_k)}{\Lambda'(\xi_k)} \times e^{-\frac{\xi_k^2 + \lambda^2}{\mu\sigma} t} e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \quad (31)$$

$$J_z = i'(t) * \frac{2}{\mu_0} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_{du}(\lambda, m)m}{K_m(|\lambda|r_2)} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma_z(\rho, \xi_k)}{\Lambda'(\xi_k)} \times e^{-\frac{\xi_k^2 + \lambda^2}{\mu\sigma} t} e^{jm\varphi} e^{j\lambda z} d\lambda, \quad (32)$$

式中

$$\Gamma_\rho(\rho, \xi) = [A_m(r_1, \rho, \xi)F_{N1}(\xi) + A_m(\rho, r_2, \xi)F_{N2}(\xi)]B_m(\xi)$$

$$- [B_m(r_1, \rho, \xi)F_{N1}(\xi) + B_m(\rho, r_2, \xi)F_{N2}(\xi)]A_m(\xi),$$

$$\Gamma_\varphi(\rho, \xi) = [D_m(r_1, \rho, \xi)F_{N1}(\xi) + C_m(\rho, r_2, \xi)F_{N2}(\xi)]B_m(\xi) - m^2/\xi^2 [C_m(r_1, \rho, \xi)F_{N1}(\xi) + D_m(\rho, r_2, \xi)F_{N2}(\xi)]A_m(\xi),$$

$$\Gamma_z(\rho, \xi) = [C_m(r_1, \rho, \xi)F_{N1}(\xi) + D_m(\rho, r_2, \xi)F_{N2}(\xi)]A_m(\xi),$$

式中 $\Lambda(\xi) = A_m(\xi)B_m(\xi)F_D(\xi)$, ξ_k 是 $\Lambda(\xi) = 0$ 的第 k 个正实根, $\Lambda'(\xi)$ 表示 $\Lambda(\xi)$ 对变量 ξ 的导数, 极点 ξ_k 可通过数值计算方法求得.

设图 1—3 所示管道模型中被检管道为 180 mm 外直径、7 mm 壁厚的钢管, 其电导率 σ 为 $4 \text{ MS}\cdot\text{m}^{-1}$, 相对磁导率 μ_r 设为典型值 250. 线圈探头的尺寸如表 1 所示, 线圈距管道外壁的提高为 5 mm, 设激励电流为单位阶跃的下降沿. 由 (30)—(32) 式可计算出激励电流关断后, 管壁内涡流密度的三维分布, 为了观察涡流随时间的扩散过程, 求得场点 (ρ, φ, z) 处的涡流密度模为

$$J = \sqrt{J_\rho^2 + J_\varphi^2 + J_z^2}. \quad (33)$$

将 2.3 节中求得的三种线圈放置方式下线圈系数 (18)—(20) 式代入 (30)—(32) 式, 再代入 (33) 式中, 计算出不同线圈放置方式下管道外表面 ($\rho = r_2$) 在 $t = 10 \text{ ms}$ 时刻, 涡流密度的分布如图 4 所示. 计算

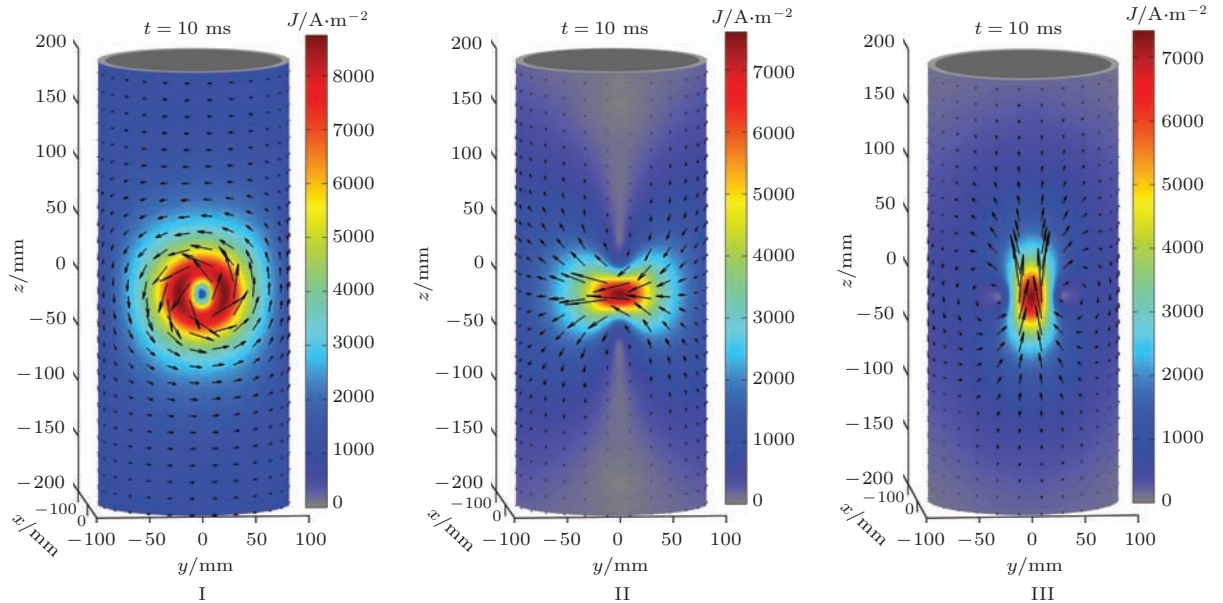


图 4 (网刊彩色) 不同线圈放置方式下管道外表面 ($\rho = r_2$) 在 $t = 10 \text{ ms}$ 时刻涡流密度的分布 (线圈轴线沿管道径向法线方向 (I)、与管道轴线平行 (II)、沿管道圆周方向 (III))

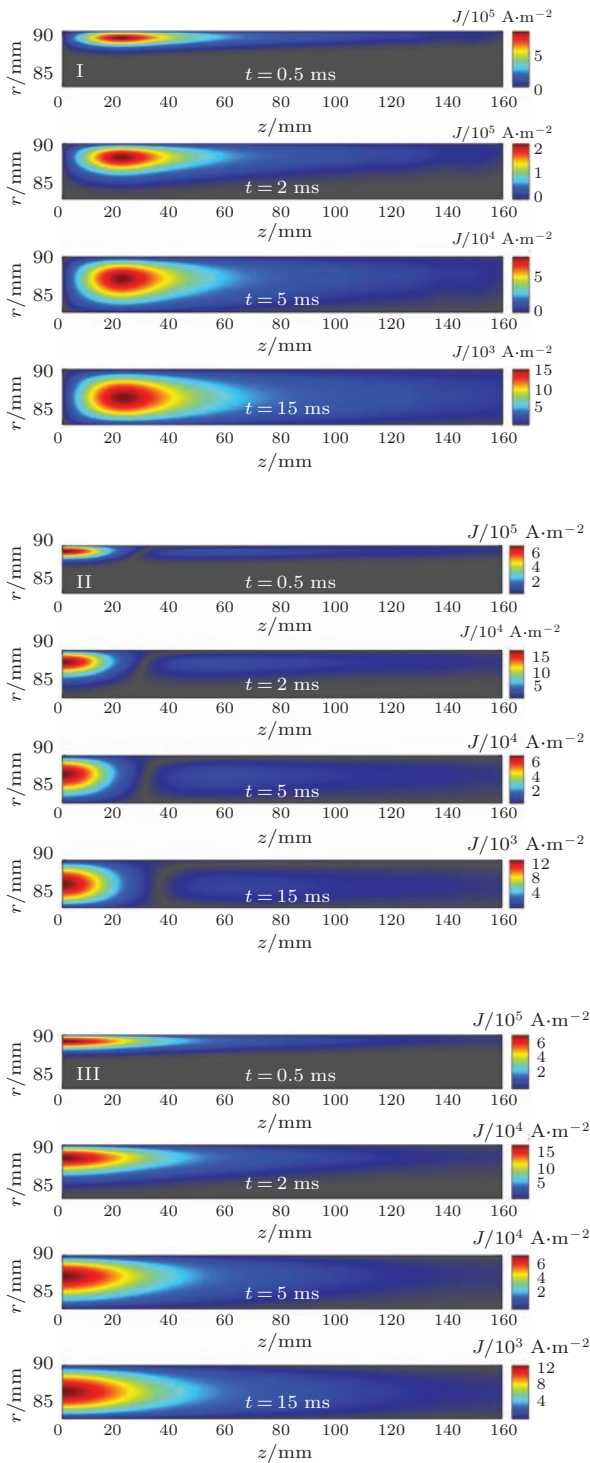


图5 (网刊彩色) 不同线圈放置方式下管道横截面 ($\varphi = 0, z \geq 0$) 内脉冲涡流的扩散过程(线圈轴线沿管道径向法线方向(I)、与管道轴线平行(II)、沿管道圆周方向(III))

出不同线圈放置方式下管道横截面 ($\varphi = 0, z \geq 0$) 分别在 0.5, 2, 5 和 15 ms 时刻, 涡流密度的分布如图 5 所示. 由图 4 可知, 不同线圈放置方式下, 在管壁内激励出的涡流分布不同: 当线圈轴线沿管道径向法线方向放置时, 在线圈正下方管壁内感应出

旋涡状涡流; 当线圈轴线与管道轴线平行放置时, 线圈下方管壁内涡流以周向分布为主; 当线圈轴线沿管道圆周方向放置时, 管壁内涡流以轴向分布为主. 由图 5 所示管壁内脉冲涡流的扩散过程可看出, 随着激励电流的关断, 在线圈下方管道外壁感应出涡流, 并向内壁扩散, 扩散的同时, 强度逐渐衰减; 不同的线圈放置方式, 管壁内涡流向内壁的扩散速度基本一致, 说明管壁内脉冲涡流的扩散速度与管道外线圈的放置方式关系不大.

5 不同线圈放置方式下感应电压对壁厚灵敏度的灵敏度

为了考察感应电压时域信号对壁厚 d 的检测灵敏度, 可用离散的方法近似计算感应电压检测信号 $u(t)$ 对壁厚 d 的偏导:

$$\frac{\partial u}{\partial d} \approx \frac{u(t, d + \Delta d) - u(t, d)}{\Delta d}, \quad (34)$$

当 Δd 取得足够小时, 上式右边趋近于左边偏导数. 采用第 4 节中相同的模型参数, 并利用 (28) 式计算时域感应电压的理论曲线, 由离散 (34) 式计算出不同线圈放置方式下, 感应电压时域信号对管道壁厚的灵敏度曲线如图 6 所示.

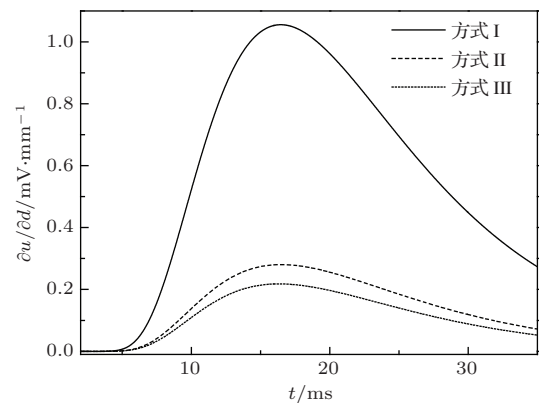


图6 不同线圈放置方式下感应电压时域信号对壁厚的灵敏度曲线(线圈轴线沿管道径向法线方向(I)、与管道轴线平行(II)、沿管道圆周方向(III))

结合图 5 中对管壁内脉冲涡流扩散过程的观察和图 6 中感应电压对壁厚的灵敏度曲线可看出, 在涡流扩散前期, 涡流扩散至管道内壁之前, 扩散过程受管道壁厚的影响小, 所以感应电压信号在前期段 (0—5 ms), 对壁厚 d 的变化不灵敏. 随着时间 t 的增长, 壁厚变化引起的感应电压变化量会先增大后减小, 不同线圈放置方式下, 灵敏度曲线到达

峰值的时间基本一致, 进一步说明管壁内脉冲涡流的扩散速度与管道外线圈的放置方式关系不大. 此外, 对比图 6 中 3 条曲线可知, 模型参数一致时, 当线圈轴线沿管道径向法线方向放置时 (方式 I), 感应电压对壁厚变化最灵敏, 放置方式 I 的灵敏度曲线峰值约为放置方式 II 的 5.6 倍, 是放置方式 III 的 7.2 倍.

6 实验结果

实验对象是外直径为 180.0 mm, 壁厚为 7.0 mm 的 20# 钢管. 实验钢管被切割成 1.5 m 的长度, 当线圈探头放置在管道中间位置时, 管道两端的边缘效应可忽略不计, 可当成无限长管道模型求解. 实验中采用直线等距排列, 探针间距为 1.0 mm 的四探针探头 FT-202 来测量钢管的电导率, 直流激励电流幅值为 2.5 A, 测得实验所用钢管的电导率 σ 为 $4.22 \text{ MS}\cdot\text{m}^{-1}$.

自制的空心圆柱激励线圈和检测线圈尺寸如表 1 所示, 用 WK6500 B 阻抗分析仪测得激励线圈在空气中的电感 $L_d = 1.21 \text{ mH}$, 电阻 $R_d = 5.81 \Omega$. 将线圈探头分别以图 1—3 所示三种典型方式放置在管道外靠近中间的位置, 并使线圈探头外沿与管道外壁之间的距离 l_0 为 6.0 mm. 在激励线圈中通入幅值为 5.0 A 的稳定电流, 并在 $t = 0$ 时刻迅速关断, 此时会在激励线圈中得到下降沿时间为 0.62 ms 的脉冲激励电流. 然后通过 16 位分辨率的数据采集卡采集激励电流关断后检测线圈两端的感应电压时域信号, 不同线圈探头放置方式下, 得到的感应电压实验曲线见图 7.

采用文献 [13] 中类似的方法, 将脉冲磁场激励下钢管的磁化曲线做线性化近似处理, 将钢管的相对磁导率设为一个未知常数, 其值大小受铁磁管道材料微观结构、管道内剩磁、脉冲激励磁场强度等因素影响. 实验中, 相对磁导率的取值采用试算的方法确定, 即通过不断调整相对磁导率的取值, 使感应电压理论计算曲线与实验测量曲线之间的均方根误差最小. 线圈的放置方式不同, 透入管壁内脉冲激励磁场的方向和强度不同, 钢管相对磁导率的取值不同. 本文实验条件下, 通过试算法确定的三种线圈放置方式下钢管相对磁导率 μ_r 依次为 298, 283 和 256. 不同线圈放置方式下, 检测线圈两端感应电压的实验测量曲线与 (28) 式计算得到的

理论曲线对比如图 7 所示. 图中理论曲线与计算曲线符合, 验证了本文中理论推导得到的解析式.

当线圈轴线沿管道径向法线方向放置时 (方式 I), 线圈与管道之间的耦合程度最好, 激励线圈激化的入射磁场能更多地透入到管壁内, 同时管壁内涡流激化的散射场, 能更多地穿过检测线圈. 因此, 如图 6 和图 7 所示, 线圈探头采用方式 I 放置时, 得到的感应电压时域信号最强, 对铁磁管道壁厚的检测灵敏度最高.

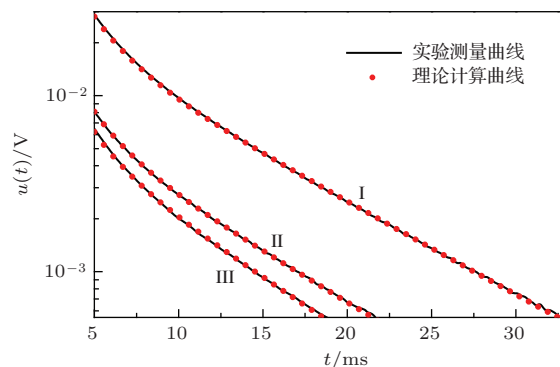


图 7 (网刊彩色) 不同线圈放置方式下感应电压实验测量曲线与理论计算曲线对比 (线圈轴线沿管道径向法线方向 (I)、与管道轴线平行 (II)、沿管道圆周方向 (III))

7 结 论

引入二阶矢量位, 结合洛伦兹互易定理和法拉第电磁感应定律, 可有效求解管道外任意形状、任意放置线圈探头激励下非轴对称涡流场问题. 在涡流场频域解的基础上, 通过留数法求解拉普拉斯反变换, 可得到激励线圈中激励电流关断后检测线圈两端感应电压以及管壁内涡流密度的时域解析式. 通过研究管壁内脉冲涡流扩散过程以及感应电压信号对壁厚的灵敏度曲线得出: 不同线圈放置方式下, 管壁内感应涡流的分布差别较大, 但脉冲涡流向管道内壁的扩散速度与线圈的放置方式无关; 涡流扩散至管道内壁之前, 扩散过程受管道壁厚的影响小, 前期感应电压信号对壁厚不灵敏; 当线圈轴线沿管道径向法线方向放置时, 得到的感应电压时域信号最强, 对壁厚的检测灵敏度最高. 本文研究结果丰富了非轴对称瞬态涡流场的解析求解方法, 可为铁磁管道的脉冲涡流检测提供理论支撑.

参考文献

- [1] RTD-INCO TEST for the Detection of Corrosion under Insulation, Cameron W <http://www.applusrtd.com>.

- au/files/brochure/40_INCOEST Technical Paper. pdf [2014-06-10]
- [2] Cheng W 2012 *J. Nondestr. Eval.* **31** 215
- [3] Dodd C V, Deeds W E 1968 *J. Appl. Phys.* **39** 2829
- [4] Lei Y Z 2000 *Analytical Methods for Time-Harmonic Electromagnetic Fields* (Beijing: Science Press) p178 (in Chinese) [雷银照 2000 时谐电磁场解析方法 (北京: 科学出版社) 第 178 页]
- [5] Theodoulidis T P 2002 *Res. Nondestruct. Eval.* **14** 111
- [6] Theodoulidis T P 2004 *Int. J. Appl. Electromagn. Mech.* **19** 207
- [7] Skarlatos A, Theodoulidis T P 2010 *IEEE Trans. Magn.* **46** 3885
- [8] Burke S K, Theodoulidis T P 2004 *J. Phys. D* **37** 485
- [9] Theodoulidis T P, Burke S K 2004 *Electromagn. Nondestr. Eval. VIII* **24** 11
- [10] Theodoulidis T, Skarlatos A 2012 *IEEE Trans. Magn.* **48** 2392
- [11] Chen X L, Lei Y Z 2012 *Proc. CSEE* **32** 176 (in Chinese) [陈兴乐, 雷银照 2012 中国电机工程学报 **32** 176]
- [12] Mao X F, Lei Y Z 2013 *NDT & E Int.* **54** 69
- [13] Mao X F, Lei Y Z 2013 *NDT & E Int.* **60** 121
- [14] Xie L, Lei Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4397 (in Chinese) [谢莉, 雷银照 2006 物理学报 **55** 4397]
- [15] Xie L, Lei Y Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 2523
- [16] Jaeger J C 1940 *Philos. Mag. Ser.* **29** 18
- [17] Theodoulidis T 2008 *IEEE Trans. Magn.* **44** 1894
- [18] Fan M B, Cao B H, Yang X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7570 (in Chinese) [范孟豹, 曹丙花, 杨雪峰 2010 物理学报 **59** 7570]
- [19] Xiao C Y, Zhang J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120302
- [20] Chen X L, Lei Y Z 2013 *Trans. China Electrotech. Soc.* **28** 1 (in Chinese) [陈兴乐, 雷银照 2013 电工技术学报 **28** 1]
- [21] Smythe W R 1950 *Static and Dynamic Electricity* (2nd Ed.) (New York: McGraw-Hill)
- [22] Bronshtein I N, Semendyayev K A, Musiol G, Muehlig H 2007 *Handbook of Mathematics* (5th Ed.) (Berlin: Springer) p718

Analytical solutions to pulsed eddy current field excited by a differently oriented probe coil outside a conducting ferromagnetic pipe*

Chen Xing-Le[†] Lei Yin-Zhao

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

(Received 8 July 2014; revised manuscript received 8 August 2014)

Abstract

Using the second-order vector potential and Lorentz reciprocity theorem, the non-axisymmetric eddy current field induced by a probe coil outside a conducting ferromagnetic pipe is obtained analytically, where the probe coil is differently oriented: its axis being along the pipe radial direction, parallel to the pipe axis, along the pipe circumferential direction. Then, the time-domain expressions of induced voltage and eddy current density in the pipe are obtained through the Laplace inverse transformation, by calculating the residues of poles. Furthermore, the diffusion process of pulsed eddy current in the pipe, and the detection sensitivity of the time-domain induced voltage signal to the wall thickness are studied. Finally, the analytical solutions are verified through the experimental results of a steel pipe. It is found that when the probe coil is positioned such that its axis is perpendicular to the pipe axis, the strongest and the most sensitive induction voltage signal for detecting the wall thickness of a ferromagnetic pipe is obtained.

Keywords: pulsed eddy current electromagnetic field, second-order vector potential, ferromagnetic pipe, time-domain analytical solutions

PACS: 03.50.De, 41.20.-q, 81.70.Ex

DOI: 10.7498/aps.63.240301

* Project supported by the National Defense Basic Technologic Research Program of China (Grant No. Z132013T001).

† Corresponding author. E-mail: chenxingle@yeah.net