物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

复合函数算符的微商法则及其在量子物理中的应用

徐世民 徐兴磊 李洪奇 王继锁

Differential quotient rules of operator in composite function and its applications in quantum physics

Xu Shi-Min Xu Xing-Lei Li Hong-Qi Wang Ji-Suo

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, **63**, 240302 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.240302
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240302
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2014/V63/I24

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 24 (2014) 240302

复合函数算符的微商法则及其在量子物理中的应用*

徐世民[1)2)] 徐兴磊[1)2)†] 李洪奇[1)2)] 王继锁[3)]

1) (菏泽学院物理与电子工程系, 菏泽 274015)

2) (菏泽学院量子信息与物理计算重点实验室, 菏泽 274015)

3) (曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

(2014 年 7 月 9 日收到; 2014 年 8 月 19 日收到修改稿)

给出了在量子物理学、量子统计学、算符排序理论、矩阵论以及控制理论中有着重要用途的复合函数算符的一般微分法则, 利用这一法则研究了 Wigner 算符和 Weyl 对应规则中的积分问题, 证明了两类典型的算符恒等公式. 给出了 Wigner 算符的有序算符内的微分形式, 并得到了一些重要函数的新的微分式. 最后, 引入了一个参数型的 Wigner 算符来统一正规序、Weyl 编序以及反正规序三种算符排序.

关键词: 复合函数算符, 微商法则, Wigner 算符, 有序算符

PACS: 03.65.–w, 42.50.Dv, 05.30.–d **DOI:** 10.7498/aps.63.240302

1 引 言

在量子物理学理论中, 力学量用厄米算符 (通过其本征值) 表示. 一般的经典力学量可表为经典坐标和动量的函数, 所以表示一般力学量的量子算符 (狄拉克称之为 q 数) 则是坐标算符和动量算符的函数. 譬如 Weyl 对应规则 [1]

$$H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}p h(q,p)\Delta(q,p), \tag{1}$$

式中

$$\Delta(q,p) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q) + \mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2}$$

是 Wigner 算符 [2]. 其中 $\boldsymbol{f} = \mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)$ 和 $\boldsymbol{F} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{f}} = \exp[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)]$ 就是笛卡尔坐标系中坐标算符 $\boldsymbol{Q}$ 和动量算符 $\boldsymbol{P}$ 的函数, 同时还含有实变量 q 和 p (称为 c 数). 形如 $\boldsymbol{f} = \mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)$ 的算符称为函数算符, 形如 $\boldsymbol{F} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{f}}$ 的算符称为复合函数算符. 由于算符的不对易性 (如 $[\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{QP}-\boldsymbol{PQ} = \mathrm{i}\hbar$), 函数算符 (尤其是复合函数算符) 的运算规则与普通函数 (c 数函数) 有着很大不同, 必须考虑算符的次序. 对普通函数显然成立的运算规则, 对函数算符来说则未必适用, 如牛顿-莱布尼兹积分法则、复合函数的求导法则以及乘法交换律等. 函数矩阵 (也是一种 q 数) 的微商也是矩阵理论 [3−5] 的一个重要内容, 而矩阵理论又是自动控制理论和现代控制理论 [6,7] 基本的数学工具, 函数矩阵的微分与积分是一个必须面对的数学问题. 但是据我们所知, 现有的矩阵理论文献还没有很好地解决一般的复合函数矩阵的微商问题, 所涉及的都是一些特殊情况. 例如, $A(t)$ 是函数矩阵, $t = f(x)$ 是 x 的实值函数而非函数矩阵, 则有 $\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}x = [\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}t]f'(x)$ 或者 $\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}x = f'(x)[\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}t]$[3], 但未给出当 $t = f(x)$ 也是一个函数矩阵时 $\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}x$ 的值. 再如文献 [3—5], A 是一个常量方阵, 则有 $\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{At}/\mathrm{d}t = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A$, 但未给出当 A 和 B 是

* 国家自然科学基金 (批准号: 11244005) 和山东省自然科学基金 (批准号: Y2008A16) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xxlwlx@126.com

两个不可交换的同阶方阵时 $\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{At+B}/\mathrm{d}t$ 的值.

函数算符的微商包括两种, 一种是参数微商, 其定义为

$$\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)}{\Delta\lambda},$$

式中 λ 是一个参数. 这与普通函数的微商定义是相同的, 区别在于 $\boldsymbol{F}(\lambda)\equiv F(\lambda;\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots)$ 是算符. 另一种则是一个算符函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n,\cdots)$ 对另一个算符 $\boldsymbol{A}_n$ 的微商, 其定义为

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}_n}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n+\lambda,\cdots)}{\partial\lambda},$$

亦即一个算符对另一个算符的微商也是通过参数微商定义的, 易见 $\partial_{\boldsymbol{A}_n}\partial_{\boldsymbol{A}_m}=\partial_{\boldsymbol{A}_m}\partial_{\boldsymbol{A}_n}$.

一方面, 有序算符内的积分 (IWOP) 技术的发明 [8–10] 极大地发展了作为量子物理学数理基础的狄拉克符号法, 使得形如 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|kx\rangle\langle x|$ 的积分和 (2) 式中的积分能够顺利实现, 使得狄拉克符号法更完美、更具体、能更多更好地表达物理规律. IWOP 技术不但具有物理上直观、内涵丰富、数学简捷的特点, 因而能够解决一些悬而未决的问题, 开拓一些新的研究课题, 而且又能强烈而深刻地体现量子论数理结构内在的美. IWOP 技术很好地解决了被积函数中含有坐标算符 $\boldsymbol{Q}$ 和动量算符 $\boldsymbol{P}$ (或产生算符 $\boldsymbol{a}^\dagger$ 和湮灭算符 $\boldsymbol{a}$) 的函数算符的积分问题.

另一方面, 对于复合函数算符的微商问题, 尽管文献 [11] 有所讨论, 但未能给出实质性的解决方案. 文献 [12] 也涉及此问题, 指出对于指数算符 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{f}(\lambda)}$, 一般来说 $\partial\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{f}(\lambda)}/\partial\lambda\neq\mathrm{e}^{\boldsymbol{f}(\lambda)}f'(\lambda)$, 但没能给出 $\partial\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{f}(\lambda)}/\partial\lambda$ 的值. 也就是说, 复合函数算符的微分问题还没有得到很好的解决.

我们的研究表明, 复合函数算符的微分也有着规范的法则, 这种法则是高于普通复合函数微商法则的一种法则. 当复合函数算符中所含算符都两两对易时, 该法则也就退化为普通复合函数的微商法则, 或者说普通复合函数的微分法则仅是复合函数算符微分法则的一种特殊情况. 一旦找到复合函数算符的微分法则, 原则上复合函数算符的积分问题便迎刃而解, 其方法是把被积函数算符展开为幂级数再逐项进行积分. 本文给出了复合函数算符的一般微商法则, 并利用这一法则证明在量子力学、量子光学、量子统计学以及算符排序理论中有着重要用途的算符恒等式. 进一步利用这一法则研究 Wigner 算符和 Weyl 对应规则中的积分问题. 最后, 给出 Wigner 算符的有序算符内的微分形式, 并引入一个实参数型的 Wigner 算符来统一正规序、Weyl 编序以及反正规序三种算符排序.

依据表象理论, 量子算符在具体量子力学表象中的表示就是方阵 (有限阶或无限阶的), 所以这一复合函数算符的微商法则也适用于复合函数矩阵.

2 复合函数算符的微商法则

设 F 是参数 t 的普通函数, 即 $F=F(t)$. 算符 $\boldsymbol{f}$ 是参数 λ 的函数, 即 $\boldsymbol{f}=f(\lambda;\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots)$, 式中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 是算符. 因此我们说 $F(\boldsymbol{f})$ 是一个以 λ 为宗量的复合函数算符. 为了得到 $F(\boldsymbol{f})$ 对 λ 的导数, 不失一般性地假定 $F(\boldsymbol{f})$ 对 $\boldsymbol{f}$ 的各阶导数都存在, 并且级数

$$F(\boldsymbol{f})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^nF(\boldsymbol{f})}{\mathrm{d}\boldsymbol{f}^n}\right|_{f=0}f^n \tag{3}$$

收敛. 于是, 该式就是 $F(\boldsymbol{f})$ 的泰勒展开式. 经过一番深入的分析和研究, 我们发现复合函数算符的微商法则可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}F(\boldsymbol{f})}{\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{m+1}}\\&\times[f'(\lambda),\boldsymbol{f}^{(m)}],\end{aligned} \tag{4}$$

或表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}[\boldsymbol{f}^{(m)},\boldsymbol{f}'(\lambda)]\\&\times\frac{\mathrm{d}^{m+1}F(\boldsymbol{f})}{\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{m+1}},\end{aligned} \tag{5}$$

式中多重对易式括号的定义为

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(0)}]=\boldsymbol{A},\quad[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(1)}]=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],\\&[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(m+1)}]=[[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(m)}],\boldsymbol{B}],\\&[\boldsymbol{A}^{(0)},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{B},\quad[\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],\\&[\boldsymbol{A}^{(m+1)},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{A}^{(m)},\boldsymbol{B}]].\end{aligned}$$

(4) 和 (5) 式就是复合函数算符的一般微商法则, 其正确性的证明见附录 A. 特别地, 如果 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{f}'$ 可对易或 $\boldsymbol{f}$ 是一个普通函数, 则求和中除了 $m=0$ 这一项外其余项全为零, 故有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{f})}{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}f'(\lambda)=f'(\lambda)\frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{f})}{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}, \tag{6}$$

这就是为人们所熟知的普通复合函数的微商法则. 复合函数算符的微商法则不仅丰富了函数矩阵微

积分理论, 也将在量子物理学和现代控制理论等领域有着重要用途.

特别地, 若 $F(\boldsymbol{f}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{f}}$, 则 (4) 和 (5) 式退化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{f}}}{\mathrm{d}\lambda} &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{f}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}[f'(\lambda),\boldsymbol{f}^{(m)}] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}[\boldsymbol{f}^{(m)},\boldsymbol{f}'(\lambda)]\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{f}},\end{aligned} \tag{7}$$

这就是指数函数算符的微商法则, 明显不同于普通指数函数的微商法则.

3 研究Weyl对应规则

作为复合函数算符微商法则的一个应用, 我们来研究Wigner算符和Weyl对应规则. 为了能够完成 (2) 式中的积分, 首先计算双变量复合函数算符 $\exp[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)]$ 的各阶偏微商. 令 $F(\boldsymbol{f}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{f}(u,v)}$ 和 $\boldsymbol{f}(u,v) = \mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)$, 利用 (7) 式可得

$$\begin{aligned}
F_{00} &= F|_{u=0,v=0} = 1,\\
F_{10} &= \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=0,v=0} = \mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q),\\
F_{01} &= \frac{\partial F}{\partial v}\Big|_{u=0,v=0} = \mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p),\\
F_{20} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\Big|_{u=0,v=0} = [\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)]^2,\\
F_{02} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\Big|_{u=0,v=0} = [\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)]^2,\\
F_{11} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\Big|_{u=0,v=0} = \frac{1}{2}[\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)\\
&\quad +\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)],\cdots,
\end{aligned}$$

经过一番计算与整理发现 F_{mn} 可以表示成

$$\begin{aligned}F_{mn} &= \frac{\partial^{m+n}F}{\partial u^m\partial v^n}\Big|_{u=0,v=0}\\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{l!(m-l)!}[\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)]^{m-l}\\ &\quad\times[\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)]^n[\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)]^l,\end{aligned} \tag{8}$$

或者

$$\begin{aligned}F_{mn} &= \frac{\partial^{m+n}F}{\partial u^m\partial v^n}\Big|_{u=0,v=0}\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}[\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)]^{n-l}\\ &\quad\times[\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)]^m[\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)]^l.\end{aligned} \tag{9}$$

由于 q, p 是 c 数, 所以可把 (8) 与 (9) 式右端视为一种关于算符 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的一种特定排序, 称之为Weyl编序[13], 并用符号 $\vdots\ \vdots$ 标记, 约定在 $\vdots\ \vdots$ 内玻色算符可对易. 于是

$$\begin{aligned}F_{mn} &= \frac{\partial^{m+n}F}{\partial u^m\partial v^n}\Big|_{u=0,v=0}\\ &= \frac{1}{2^n}\vdots\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}[\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)]^{n-l}\\ &\quad\times[\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)]^m[\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)]^l\vdots\\ &= \vdots[\mathrm{i}(\boldsymbol{Q}-q)]^m[\mathrm{i}(\boldsymbol{P}-p)]^n\vdots.\end{aligned}$$

那么, 有

$$\begin{aligned}&\exp[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)]\\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}F}{\partial u^m\partial v^n}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}u^m v^n\\ &= \vdots\exp[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)]\vdots.\end{aligned} \tag{10}$$

把 (10) 式代入 (2) 式, 得

$$\begin{aligned}\Delta(q,p) &= \vdots\delta(\boldsymbol{Q}-q)\delta(\boldsymbol{P}-p)\vdots\\ &= \frac{1}{2}\vdots\delta(\boldsymbol{a}-\alpha)\delta(\boldsymbol{a}^{\dagger}-\alpha^{*})\vdots\\ &\equiv \Delta(\alpha,\alpha^{*}),\end{aligned} \tag{11}$$

这就是Wigner算符的Weyl编序形式. 把 (11) 式代入 (1) 式, 便得到

$$\begin{aligned}&H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}) = \vdots h(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\vdots\\ \text{或}\quad &H(\boldsymbol{a}^{\dagger},\boldsymbol{a}) = \vdots h(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{\dagger})\vdots,\end{aligned} \tag{12}$$

这意味着一个经典函数 $h(q,p)$ 或 $h(\alpha,\alpha^*)$ 的Weyl量子对应可以直接通过在 $\vdots\ \vdots$ 内替换 $q\to\boldsymbol{Q}$, $p\to\boldsymbol{P}$ 或 $\alpha\to\boldsymbol{a}$, $\alpha^*\to\boldsymbol{a}^{\dagger}$ 得到, 以及一个Weyl编序好的算符 $\vdots h(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\vdots$ 或者 $\vdots h(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{\dagger})\vdots$ 之经典对应可以直接通过替换 $\boldsymbol{Q}\to q$, $\boldsymbol{P}\to p$ 或 $\boldsymbol{a}\to\alpha$, $\boldsymbol{a}^{\dagger}\to\alpha^*$ 而得到. 特别地, 经典函数 $q^m p^n$ 的Weyl量子对应为

$$\begin{aligned}q^m p^n &\to \vdots\boldsymbol{Q}^m\boldsymbol{P}^n\vdots\\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{l!(m-l)!}\boldsymbol{Q}^{m-l}\boldsymbol{P}^n\boldsymbol{Q}^l\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\boldsymbol{P}^{n-l}\boldsymbol{Q}^m\boldsymbol{P}^l.\end{aligned} \tag{13}$$

另外, (10) 式表明算符 $\exp[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)]$ 本身就是Weyl编序好的, 这在算符排序理论中是

非常重要和有用的, 能够帮助我们得到很多新的算符恒等公式. 这一应用实例表明复合函数算符微商法则也可用来处理复合函数算符的积分问题.

4 证明算符恒等公式

在量子力学、量子光学、算符排序理论以及矩阵理论中, 经常需要把 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ 分解为 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 与 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ 的乘积形式, 或者把 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 与 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ 合并成 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ 的形式. 较早研究这一问题的有 Baker, Campbell, Hausdorff 等[14], 其方法、方式也有多种. 作为复合函数算符微商法则的又一个应用, 我们来证明这类算符(包括矩阵) 恒等公式.

构造算符恒等式如下:

$$\mathrm{e}^{\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})} = \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{f(\lambda)}, \tag{14}$$

式中 λ 是一个参数, $f(\lambda)$ 是一个待定算符, 显然 $f(0)=0$. 用 $\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}$ 左乘上式两端, 得

$$\mathrm{e}^{f(\lambda)} = \mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}, \tag{15}$$

两边对 λ 求导, 得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{f(\lambda)}}{\mathrm{d}\lambda} =& -\boldsymbol{B}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}\\
& - \mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}\\
& + \mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,\mathrm{e}^{\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}\\
=& [-\boldsymbol{B} - \mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}\\
& + \mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}]\,\mathrm{e}^{f}\\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\\
& \times [[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{(n)}],\boldsymbol{B}^{(m)}]\lambda^{n+m}\,\mathrm{e}^{f}.
\end{aligned} \tag{16}$$

在上面的计算中已经使用了算符公式 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}\,\mathrm{e}^{-\boldsymbol{X}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\boldsymbol{X}^{(n)},\boldsymbol{Y}]$. 比较 (7) 式和 (16) 式, 得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}[f^{(m)},f'(\lambda)]\\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}[[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{(n)}],\boldsymbol{B}^{(m)}]\lambda^{m+n}.
\end{aligned} \tag{17}$$

注意到 $f(0)=0$, (17) 式要求 $f'(0)=0$. 所以 $f(\lambda)$ 和 $f'(\lambda)$ 的幂级数形式为

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \sum_{k=2}^{\infty}\boldsymbol{c}_k\lambda^k,\\
f'(\lambda) &= \sum_{k=2}^{\infty}k\boldsymbol{c}_k\lambda^{k-1},
\end{aligned} \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{c}_k$ 是算符. 把 (18) 式代入 (17) 式会得到一个对任意 λ 都成立的恒等式, 这意味着等式两端 λ 同次幂的系数必须相等. 于是有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_2 =& -\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],\\
\boldsymbol{c}_3 =& \frac{1}{6}[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}] - \frac{1}{3}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(2)}],\\
\boldsymbol{c}_4 =& -\frac{1}{24}[\boldsymbol{A}^{(3)},\boldsymbol{B}] + \frac{1}{8}[[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}]\\
& -\frac{1}{8}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(3)}],\\
\boldsymbol{c}_5 =& \frac{1}{120}[\boldsymbol{A}^{(4)},\boldsymbol{B}] - \frac{1}{30}[[\boldsymbol{A}^{(3)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}]\\
& + \frac{1}{20}[[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}^{(2)}]\\
& + \frac{1}{120}[[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}]]\\
& - \frac{1}{60}[[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(2)}]]\\
& - \frac{1}{30}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(4)}]\cdots,
\end{aligned}$$

原则上可以得到所有的 $\boldsymbol{c}_k$. 把 $\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3,\boldsymbol{c}_4,\boldsymbol{c}_5,\cdots$ 代入 (18) 式并在 (14) 式中令 $\lambda=1$, 便得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} =& \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\\
& + \frac{1}{6}[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}] - \frac{1}{3}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(2)}]\\
& - \frac{1}{24}[\boldsymbol{A}^{(3)},\boldsymbol{B}] + \frac{1}{8}[[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}]\\
& - \frac{1}{8}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(3)}] + \frac{1}{120}[\boldsymbol{A}^{(4)},\boldsymbol{B}]\\
& - \frac{1}{30}[[\boldsymbol{A}^{(3)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}]\\
& + \frac{1}{20}[[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}^{(2)}]\\
& + \frac{1}{120}[[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}]]\\
& - \frac{1}{60}[[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(2)}]]\\
& - \frac{1}{30}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(4)}] + \cdots\Big\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

特别地, 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都与它们的对易式 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 对易, 即

$$[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]] = [[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}] = 0,$$

则上式简化成大家熟知的算符公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}\text{和}\\
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}.
\end{aligned}$$

若构造算符恒等式

$$\mathrm{e}^{g(\lambda)} = \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}, \tag{20}$$

式中 λ 是一个参数，$g(\lambda)$ 是一个待定算符，显然 $g(0)=0$. 两边对 λ 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{g(\lambda)}}{\mathrm{d}\lambda} &= \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}} + \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}\\ &= [\boldsymbol{A}+\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}\,\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}]\,\mathrm{e}^{g(\lambda)}\\ &= \Big\{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &\quad\times[\boldsymbol{A}^{(n)},\boldsymbol{B}]\lambda^n\Big\}\,\mathrm{e}^{g(\lambda)}. \qquad (21)\end{aligned}$$

比较 (7) 式和 (21) 式，便得到

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}[g^{(m)},g'(\lambda)]\\ &=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[\boldsymbol{A}^{(n)},\boldsymbol{B}]\lambda^n. \qquad (22)\end{aligned}$$

从 $g(0)=0$ 和 (22) 式可知 $g'(0)=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以 $g(\lambda)$ 和 $g'(\lambda)$ 的幂级数形式为

$$\begin{aligned}g(\lambda)&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\lambda+\sum_{j=2}^{\infty}\boldsymbol{b}_j\lambda^j,\\ g'(\lambda)&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\sum_{j=2}^{\infty}j\boldsymbol{b}_j\lambda^{j-1}, \qquad (23)\end{aligned}$$

式中 b_j 是算符. 把 (23) 式代入 (22) 式得到一个对任意 λ 都成立的恒等式，这意味着等式两端 λ 同次幂的系数必须相等. 于是可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_2&=\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],\\ \boldsymbol{b}_3&=\frac{1}{12}[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}]+\frac{1}{12}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(2)}],\\ \boldsymbol{b}_4&=\frac{1}{24}[[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}],\\ \boldsymbol{b}_5&=-\frac{1}{720}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(4)}]-\frac{1}{720}[\boldsymbol{A}^{(4)},\boldsymbol{B}],\cdots,\end{aligned}$$

把 $b_2,b_3,b_4,b_5,\cdots$ 代入 (23) 式并在 (20) 式中令 $\lambda=1$，便得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\exp\Big\{&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\\ &+\frac{1}{12}[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}]+\frac{1}{12}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(2)}]\\ &+\frac{1}{24}[[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{B}]+\cdots\Big\}. \qquad (24)\end{aligned}$$

同样道理，还可以通过构造算符恒等式

$$\exp[\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})]=\exp(\lambda\boldsymbol{A})\cdot\exp[f(\lambda)]\cdot\exp(\lambda\boldsymbol{B})$$

得到

$$\begin{aligned}&\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\ &=\exp(\boldsymbol{A})\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\\ &\quad+\frac{1}{6}[\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{B}]+\frac{1}{6}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(2)}]+\cdots\Big\}\cdot\exp(\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

形式的算符公式. 这类应用实例表明复合函数算符微商法则能够帮助我们得到或证明有着重要用途的诸多算符 (包括矩阵) 恒等公式.

5 Wigner 算符的微分形式与参数型 Wigner 算符

算符排序、量子算符与经典函数的对应以及相空间分布函数 (Wigner 函数) 已成为量子光学、量子统计学的热门课题[1,2,15,16]，并且相互关联. 一个量子态 $|\psi\rangle$ 的 Wigner 函数由 $\langle\psi|\Delta(q,p)|\psi\rangle$ 来定义，它的两个边缘分布跟概率密度 $|\langle q|\psi\rangle|^2$ 与 $|\langle p|\psi\rangle|^2$ 成正比. Wigner 算符有多种形式，如坐标表象、动量表象、相干态表象以及正规序内的纯高斯函数形式等.

基于 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{\dagger})/\sqrt{2}$ 与 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^{\dagger})/(\mathrm{i}\sqrt{2})$，把 Wigner 算符改写成正规序形式 (所有产生算符 $\boldsymbol{a}^{\dagger}$ 排列在所有湮灭算符 $\boldsymbol{a}$ 左边)，则有

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)=\frac{1}{4\pi^2}:\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[&\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)\\ &+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)-\frac{1}{4}u^2\\ &-\frac{1}{4}v^2\Big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v:, \qquad (25)\end{aligned}$$

式中符号 $::$ 表示正规序. 依据一个算符函数对另一个算符的微商定义，我们可以把 (25) 式改写成

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)&=\frac{1}{4\pi^2}:\exp\Big[\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{P}^2}\Big)\Big]\\ &\quad\times\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)\\ &\quad+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v:\\ &=\ :\exp\Big[\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{P}^2}\Big)\Big]\\ &\quad\times\delta(\boldsymbol{Q}-q)\delta(\boldsymbol{P}-p):\\ &=\frac{1}{2}:\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^{\dagger}}\Big)\\ &\quad\times\delta(\boldsymbol{a}-\alpha)\delta(\boldsymbol{a}^{\dagger}-\alpha^*):\\ &=\frac{1}{2}\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^{\dagger}}\Big)\\ &\quad\times\delta(\boldsymbol{a}^{\dagger}-\alpha^*)\delta(\boldsymbol{a}-\alpha), \qquad (26)\end{aligned}$$

这是Wigner算符的正规序微分形式, 一种新的表示式, 式中$\alpha=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}$. 于是Weyl对应规则(1)式可表示成

$$\begin{aligned}&H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\\&=:\exp\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{P}^2}\right)\right]h(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}):\\&=:\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^\dagger}\right)h(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger):,\end{aligned}\tag{27}$$

这样, 我们就把积分型的Weyl对应规则转变成了微分型, 这使得计算方便很多.

若把$\Delta(q,p)$正规序内的微分式与$\Delta(q,p)$正规序内的纯高斯函数形式

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)&=\pi^{-1}:\exp[-(\boldsymbol{Q}-q)^2-(\boldsymbol{P}-p)^2]:\\&=\pi^{-1}:\exp[-2(\boldsymbol{a}-\alpha)(\boldsymbol{a}^\dagger-\alpha^*)]:\end{aligned}$$

进行比较, 可得到

$$\begin{aligned}&\exp\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta(x-x')\\&=\frac{1}{\pi}\exp[-(x-x')^2],\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\exp[-(x-x')^2]\\&=\delta(x-x'),\end{aligned}\tag{29}$$

以及

$$\begin{aligned}&\exp\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right)\delta(\alpha-\alpha')\delta(\alpha^*-\alpha'^*)\\&=\frac{1}{\pi}\exp[-(\alpha-\alpha')(\alpha^*-\alpha'^*)],\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right)\exp[-(\alpha-\alpha')(\alpha^*-\alpha'^*)]\\&=\delta(\alpha-\alpha')\delta(\alpha^*-\alpha'^*).\end{aligned}\tag{31}$$

我们还发现, 微分算子$\exp[-(1/4)\partial^2/\partial x^2]$和$\exp(-\partial^2/\partial t\partial s)$能够通过作用于单项式分别生成厄米特多项式和双变量厄米特多项式[17], 即

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(2x)^n=\mathrm{H}_n(x),\\&\exp\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{H}_n(x)=(2x)^n,\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right)t^ms^n=\mathrm{H}_{mn}(t,s),\\&\exp\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right)\mathrm{H}_{mn}(t,s)=t^ms^n.\end{aligned}\tag{33}$$

以上结论以及文献[18—20]表明正规乘积内的积分技术与算符微分法不仅能够有效地处理函数算符的积分问题, 而且可以帮助人们发现一些特殊函数的微分形式.

若把Wigner算符改写成反正规序形式(所有湮灭算符$\boldsymbol{a}$排列在产生算符$\boldsymbol{a}^\dagger$左边), 则有

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)=&\frac{1}{4\pi^2}\vdots\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[\mathrm{i}u(\boldsymbol{Q}-q)\\&+\mathrm{i}v(\boldsymbol{P}-p)+\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}v^2\Big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\vdots,\end{aligned}\tag{34}$$

式中符号$\vdots\ \vdots$表示反正规序. 显然该积分是发散的. 正是因为这种积分发散的数学困难, 一直未曾见到利用反正规乘积内的积分技术研究Wigner算符和处理Weyl对应规则的有关报道. 但是, 通过研究我们发现, 可以利用反正规序的微分式方法克服这种积分发散的数学困难. 也就是说, 采用把(25)式改写成(26)式的方法改写(34)式为

$$\begin{aligned}&\Delta(q,p)\\&=\vdots\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{P}^2}\right)\right]\delta(\boldsymbol{Q}-q)\delta(\boldsymbol{P}-p)\vdots\\&=\frac{1}{2}\vdots\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^\dagger}\right)\delta(\boldsymbol{a}-\alpha)\delta(\boldsymbol{a}^\dagger-\alpha^*)\vdots\\&=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^\dagger}\right)\delta(\boldsymbol{a}-\alpha)\delta(\boldsymbol{a}^\dagger-\alpha^*)\\&=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|,\end{aligned}\tag{35}$$

式中$|\alpha\rangle$是Glauber相干态, 它是湮灭算符$\boldsymbol{a}$的本征态, 即$\boldsymbol{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$. 于是, Weyl对应规则可表示成反正规序内的微分形式为

$$\begin{aligned}&H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\\&=\vdots\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{P}^2}\right)\right]h(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\vdots\\&=\vdots\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^\dagger}\right)h(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger)\vdots,\end{aligned}\tag{36}$$

(35)和(36)式分别是Wigner算符和Weyl对应规则的反正规序内的微分式, 是一种崭新形式. 这种积分变微分的方法, 不仅计算方便, 还避免了积分发散的困难.

对两个不同的Wigner算符的乘积$\Delta(\alpha,\alpha^*)\Delta(\alpha',\alpha'^*)$求迹, 得到(见附录B)

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^*)\Delta(\alpha',\alpha'^*)]\\&=\frac{1}{4\pi}\delta(\alpha-\alpha')\delta(\alpha^*-\alpha'^*)\\&=\frac{1}{2\pi}\delta(q-q')\delta(p-p').\end{aligned}\tag{37}$$

利用(37)式, 用$2\pi\Delta(\alpha',\alpha'^*)$乘以(1)式并求迹, 便得到

$$h(q,p)=2\pi\mathrm{tr}[\Delta(q,p)H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})]\text{或}$$
$$h(\alpha,\alpha^*)=2\pi\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^*)H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger)], \tag{38}$$

这就是Weyl对应规则的逆规则, 它给出了求已知量子算符之Weyl经典对应的方法.

观察(26)和(35)式, 并考虑到Wigner算符的Weyl编序形式(11)式, 定义一个带有参数θ的算符如下

$$\begin{aligned}&\Delta_\theta(q,p)\\&=\varTheta\exp\left[\frac{\theta}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{P}^2}\right)\right]\delta(\boldsymbol{Q}-q)\delta(\boldsymbol{P}-p)\varTheta\\&=\frac{1}{2}\varTheta\exp\left[\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^\dagger}\right]\delta(\boldsymbol{a}-\alpha)\delta(\boldsymbol{a}^\dagger-\alpha^*)\varTheta,\end{aligned} \tag{39}$$

其中$\theta\in\{1,0,-1\}$, $\varTheta\cdots\varTheta$叫作θ排序符号. 约定在$\varTheta\cdots\varTheta$内玻色算符可对易, 并规定: 当$\theta=1$时, $\varTheta\cdots\varTheta$变为$\vdots\ \vdots$, 当$\theta=0$时, $\varTheta\cdots\varTheta$变为$\vdots\ \vdots$, 当$\theta=-1$时, $\varTheta\cdots\varTheta$变为$\vdots\,\vdots$. 于是可知$\Delta_\theta(q,p)$就是Wigner算符正规序、Weyl编序以及反正规序三种排序的统一表达式. 这样, Weyl对应规则的三种排序形式可统一表达为

$$\begin{aligned}&H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\\&=\varTheta\exp\left[\frac{\theta}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{P}^2}\right)\right]h(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\varTheta\\&=\varTheta\exp\left(\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^\dagger}\right)h(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger)\varTheta.\end{aligned} \tag{40}$$

作为θ排序的应用, 我们来计算几个典型算符的θ排序式. 为得到相干态投影算符$|z\rangle\langle z|$的θ排序式, 首先利用(35)和(38)式得到其Weyl经典对应, 即

$$\begin{aligned}&|z\rangle\langle z|\to2\pi\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^*)|z\rangle\langle z|]\\&=2\,\mathrm{e}^{-2(\alpha-z)(\alpha^*-z^*)}.\end{aligned} \tag{41}$$

所以

$$\begin{aligned}|z\rangle\langle z|=&\frac{2}{1+\theta}\varTheta\\&\times\exp\left[-\frac{2(\boldsymbol{a}-z)(\boldsymbol{a}^\dagger-z^*)}{1+\theta}\right]\varTheta,\end{aligned} \tag{42}$$

这就是$|z\rangle\langle z|$的θ排序式. (41)和(42)式的计算过程详见附录C. 当$\theta=1$时, 便得到$|z\rangle\langle z|$的正规序形式

$$|z\rangle\langle z|=\,:\exp[-(\boldsymbol{a}-z)(\boldsymbol{a}^\dagger-z^*)]:. \tag{43}$$

当$\theta=0$时, 便得到$|z\rangle\langle z|$的Weyl编序形式

$$|z\rangle\langle z|=\,\vdots\,2\exp[-2(\boldsymbol{a}-z)(\boldsymbol{a}^\dagger-z^*)]\,\vdots. \tag{44}$$

当$\theta=-1$时, 便得到$|z\rangle\langle z|$的反正规序形式

$$|z\rangle\langle z|=\pi\vdots\delta(\boldsymbol{a}-z)\delta(\boldsymbol{a}^\dagger-z^*)\vdots. \tag{45}$$

在上述计算中已经使用了$\lim\limits_{\sigma\to0^+}\frac{1}{\pi\sigma}\mathrm{e}^{-\alpha\alpha^*/\sigma}=\delta(\alpha)\delta(\alpha^*)$. 特别地, 取$z=0$, 便得到

$$\begin{aligned}|0\rangle\langle0|&=:\exp(-\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}):\\&=\pi\vdots\delta(\boldsymbol{a})\delta(\boldsymbol{a}^\dagger)\vdots\\&=\vdots\,2\exp(-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger)\,\vdots\\&=\vdots\,2\exp(-\boldsymbol{Q}^2-\boldsymbol{P})\,\vdots.\end{aligned} \tag{46}$$

同样方法, 还可以得到

$$|q\rangle\langle q|=\varTheta\exp\left(\frac{\theta}{4}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{Q}^2}\right)\delta(\boldsymbol{Q}-q)\varTheta, \tag{47}$$

式中$|q\rangle=\pi^{-1/4}\exp(-q^2/2+\sqrt{2}q\boldsymbol{a}^\dagger-\boldsymbol{a}^{\dagger2}/2)|0\rangle$是坐标本征态, 以及$\boldsymbol{Q}^n$的$\theta$排序式为

$$\boldsymbol{Q}^n=\left(\frac{\sqrt{-\theta}}{2}\right)^n\varTheta H_n\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{\sqrt{-\theta}}\right)\varTheta. \tag{48}$$

当$\theta=1$时, $\boldsymbol{Q}^n=(\mathrm{i}/2)^n:H_n(-\mathrm{i}\hat{Q})$:; 当$\theta=-1$时, $\boldsymbol{Q}^n=(1/2)^n\vdots\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q})\vdots$; 当$\theta=0$时,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^n&=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sqrt{-\theta}}{2}\right)^n\vdots\,\mathrm{H}_n\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{\sqrt{-\theta}}\right)\vdots\\&=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sqrt{-\theta}}{2}\right)^n\vdots\sum_{l=0}^{[n/2]}\frac{(-)^ln!}{l!(n-2l)!}\\&\quad\times\left(\frac{2\boldsymbol{Q}}{\sqrt{-\theta}}\right)^{n-2l}\vdots\\&=\lim_{\theta\to0}\vdots\sum_{l=0}^{[n/2]}\frac{(-)^ln!}{l!(n-2l)!}\boldsymbol{Q}^{n-2l}\left(\frac{\sqrt{-\theta}}{2}\right)^{2l}\vdots\\&=\vdots\,\boldsymbol{Q}^n\,\vdots=\boldsymbol{Q}^n.\end{aligned} \tag{49}$$

作为最后一个例子, 我们求经典函数$\alpha^m\alpha^{*n}$的θ排序Weyl量子对应, 即

$$\begin{aligned}&\alpha^m\alpha^{*n}\to\varTheta\exp\left(\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^\dagger}\right)\boldsymbol{a}^m\boldsymbol{a}^{\dagger n}\varTheta\\&=\left(\frac{-\theta}{2}\right)^m\varTheta\mathrm{H}_{m,n}\left(-\frac{2\boldsymbol{a}}{\theta},\boldsymbol{a}^\dagger\right)\varTheta\\&=\left(\frac{-\theta}{2}\right)^m\varTheta\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!}(-1)^l\\&\quad\times\left(-\frac{2\boldsymbol{a}}{\theta}\right)^{m-l}\boldsymbol{a}^{\dagger n-l}\varTheta\end{aligned}$$

$$
= \Theta \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!} \times \left(\frac{\theta}{2}\right)^{l} \boldsymbol{a}^{m-l}\boldsymbol{a}^{\dagger n-l}\Theta. \tag{50}
$$

6 结 论

总之, 我们解析地给出了在量子物理学、量子统计学、算符排序理论、矩阵论以及控制理论中有着重要用途的算符型复合函数的一般微分法则, 利用这一法则研究了Wigner算符和Weyl对应规则中的积分问题, 证明了两类典型的算符恒等公式. 给出了Wigner算符的有序算符内的微分形式, 并得到了一些重要函数的新的微分形式. 最后, 引入了一个参数型的Wigner算符来统一正规序、Weyl编序以及反正规序三种算符排序, 丰富了量子物理学的数理基础.

附录A 复合函数算符微商法的证明

(3)式两边对λ求导, 则有

$$
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}f^n}\bigg|_{f=0} \frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{A1}
$$

由于未知f是否与$\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda \equiv f'$对易, 所以在一般情况下

$$
\frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}\lambda} = f'f^{n-1} + ff'f^{n-2} + \cdots + f^{n-2}f'f + f^{n-1}f'
$$

不能简化为$nf'f^{n-1}$. 经过一番深入的分析和研究, 我们发现上式可表示成

$$
\frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^n}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f', f^{(m)}], \tag{A2}
$$

或

$$
\frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(m+1)!}[f^{(m)}, f'] \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^n}{\mathrm{d}f^{m+1}}. \tag{A3}
$$

注意到当$m \geqslant n$时, $\mathrm{d}^{m+1}f^n/\mathrm{d}f^{m+1} = 0$, 于是(A2)式和(A3)式右端求和号的上限可改成正无穷大∞, 即

$$
\frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^n}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f', f^{(m)}], \tag{A4}
$$

或

$$
\frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!}[f^{(m)}, f'] \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^n}{\mathrm{d}f^{m+1}}. \tag{A5}
$$

(A4)式的归纳法证明如下: 当$n = 0, 1, 2$时, 易见命题成立. 假设当$n = N$时命题成立, 即

$$
\frac{\mathrm{d}f^N}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^N}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f', f^{(m)}]. \tag{A6}
$$

则当$n = N+1$时,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f^{N+1}}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}(ff^N)}{\mathrm{d}\lambda} = f'f^N + f\frac{\mathrm{d}f^N}{\mathrm{d}\lambda} \\
&= f'f^N + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} f \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^N}{\mathrm{d}f^{m+1}} \times [f', f^{(m)}].
\end{aligned} \tag{A7}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}} \\
&= \frac{\mathrm{d}^{m+1}(ff^N)}{\mathrm{d}f^{m+1}} \\
&= \sum_{l=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{l!(m+1-l)!} \frac{\mathrm{d}^l f}{\mathrm{d}f^l} \frac{\mathrm{d}^{m+1-l}f^N}{\mathrm{d}f^{m+1-l}} \\
&= f\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^N}{\mathrm{d}f^{m+1}} + (m+1)\frac{\mathrm{d}^m f^N}{\mathrm{d}f^m},
\end{aligned} \tag{A8}
$$

故

$$
f\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^N}{\mathrm{d}f^{m+1}} = \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}} - (m+1)\frac{\mathrm{d}^m f^N}{\mathrm{d}f^m}. \tag{A9}
$$

把(A9)式代入(A7)式, 便有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f^{N+1}}{\mathrm{d}\lambda} &= f'f^N + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \times \left[\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}} - (m+1)\frac{\mathrm{d}^m f^N}{\mathrm{d}f^m}\right] \times [f', f^{(m)}] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f', f^{(m)}] + f'f^N - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\mathrm{d}^m f^N}{\mathrm{d}f^m}[f', f^{(m)}] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}} \times [f', f^{(m)}] + f'f^N - f^N f' - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\mathrm{d}^m f^N}{\mathrm{d}f^m}[f', f^{(m)}] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}} \times [f', f^{(m)}] + f'f^N - f^N f' - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^N}{\mathrm{d}f^{m+1}} \times [[f', f^{(m)}], f] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}} \times [f', f^{(m)}] + f'f^N - f^N f' + f\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1}f^N}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f', f^{(m)}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N}}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f',f^{(m)}]f\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f',f^{(m)}]\\
&+f'f^{N}-f^{N}f'+f\frac{\mathrm{d}f^{N}}{\mathrm{d}\lambda}-\frac{\mathrm{d}f^{N}}{\mathrm{d}\lambda}f\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f',f^{(m)}]\\
&+\left(f'f^{N}+f\frac{\mathrm{d}f^{N}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\\
&-\left(f^{N}f'+\frac{\mathrm{d}f^{N}}{\mathrm{d}\lambda}f\right)\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f',f^{(m)}]\\
&+\frac{\mathrm{d}f^{N+1}}{\mathrm{d}\lambda}-\frac{\mathrm{d}f^{N+1}}{\mathrm{d}\lambda}\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{N+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}}\\
&\times[f',f^{(m)}].
\end{aligned}
\tag{A10}
$$

故知 (A4) 式成立. 同理可证 (A5) 式也成立. 把 (A4) 式代入 (A1) 式, 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n}F}{\mathrm{d}f^{n}}\bigg|_{f=0}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\\
&\times\frac{\mathrm{d}^{m+1}f^{n}}{\mathrm{d}f^{m+1}}[f',f^{(m)}]\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}f^{m+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right.\\
&\left.\times\frac{\mathrm{d}^{n}F}{\mathrm{d}f^{n}}\bigg|_{f=0}f^{n}\right)[f',f^{(m)}]\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}F(f)}{\mathrm{d}f^{m+1}}\\
&\times[f'(\lambda),f^{(m)}].
\end{aligned}
\tag{A11}
$$

即 (4) 式成立. 同样方法, 把 (A5) 式代入 (A1) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}=&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}[f^{(m)},f'(\lambda)]\\
&\times\frac{\mathrm{d}^{m+1}F(f)}{\mathrm{d}f^{m+1}}.
\end{aligned}
\tag{A12}
$$

附录B(37) 式的证明

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^{*})\Delta(\alpha',\alpha'^{*})]\\
=&\frac{1}{4\pi^{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha'\partial\alpha'^{*}}\right)\\
&\times\langle\alpha'|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha'\rangle\\
=&\frac{1}{4\pi^{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha'\partial\alpha'^{*}}\right)\\
&\times\exp[-(\alpha-\alpha')(\alpha^{*}-\alpha'^{*})]\\
=&\frac{1}{4\pi^{2}}\exp\left(-\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\\
&\times\exp[-(\alpha-\alpha')(\alpha^{*}-\alpha'^{*})].
\end{aligned}
\tag{B1}
$$

利用 (31) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^{*})\Delta(\alpha',\alpha'^{*})]\\
=&\frac{1}{4\pi}\delta(\alpha-\alpha')\delta(\alpha^{*}-\alpha'^{*})\\
=&\frac{1}{2\pi}\delta(q-q')\delta(p-p').
\end{aligned}
\tag{B2}
$$

在上面的计算中, 我们充分利用了 (31) 和 (32) 式.

附录C(41) 和 (42) 式的计算

$$
\begin{aligned}
&2\pi\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^{*})|z\rangle\langle z|]\\
=&\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\langle z|\alpha\rangle\langle\alpha|z\rangle\\
=&\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\exp[-(z-\alpha)(z^{*}-\alpha^{*})]\\
=&\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\exp\left(-\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\\
&\times\exp[-(z-\alpha)(z^{*}-\alpha^{*})],
\end{aligned}
\tag{C1}
$$

注意到 (31) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\exp[-(z-\alpha)(z^{*}-\alpha^{*})]\\
=&\pi\delta(z-\alpha)\delta(z^{*}-\alpha^{*}).
\end{aligned}
\tag{C2}
$$

代入 (C1) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&2\pi\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^{*})|z\rangle\langle z|]\\
=&\pi\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\delta(z-\alpha)\delta(z^{*}-\alpha^{*}).
\end{aligned}
\tag{C3}
$$

注意到 (30) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&2\pi\mathrm{tr}[\Delta(\alpha,\alpha^{*})|z\rangle\langle z|]\\
=&\pi\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right)\delta(z-\alpha)\delta(z^{*}-\alpha^{*})\\
=&2\pi\exp\left(\frac{\partial^{2}}{\partial(\sqrt{2}\alpha)\partial(\sqrt{2}\alpha)^{*}}\right)\\
&\times\delta(\sqrt{2}z-\sqrt{2}\alpha)\delta(\sqrt{2}z^{*}-\sqrt{2}\alpha^{*})\\
=&2\,\mathrm{e}^{-2(\alpha-z)(\alpha^{*}-z^{*})},
\end{aligned}
\tag{C4}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|z\rangle\langle z|=&2\varTheta\exp\left(\frac{\theta}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^{\dagger}}\right)\mathrm{e}^{-2(\boldsymbol{a}-z)(\boldsymbol{a}^{\dagger}-z^{*})}\varTheta\\
=&2\varTheta\exp\left(\frac{1+\theta}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^{\dagger}}\right)\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^{\dagger}}\right)\mathrm{e}^{-2(\boldsymbol{a}-z)(\boldsymbol{a}^{\dagger}-z^{*})}\varTheta\\
=&\pi\varTheta\exp\left(\frac{1+\theta}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\boldsymbol{a}\partial\boldsymbol{a}^{\dagger}}\right)\\
&\times\delta(\boldsymbol{a}-z)\delta(\boldsymbol{a}^{\dagger}-z^{*})\varTheta
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{1+\theta}\Theta \times \exp\left[-\frac{2(\boldsymbol{a}-z)(\boldsymbol{a}^{\dagger}-z^{*})}{1+\theta}\right]\Theta. \tag{C5}$$

在上面的计算中, 我们再次充分利用了 (30) 和 (31) 式.

参考文献

[1] Weyl H 1931 *The Theory of Group and Quantum Mechanics* (New York: Dover Publisher) p272

[2] Wigner E 1932 *Phys. Rev.* **40** 749

[3] Fang B R, Zhou J D, Li Y M 2005 *Matrix Theory* (Beijing: Tsinghua University Press) p218 (in Chinese) [方保镕, 周继东, 李医民 2005 矩阵论 (北京: 清华大学出版社) 第 218 页]

[4] Zhang K Y, Xu Z 2013 *Matrix Theory* (Beijing: Science Press) p114 (in Chinese) [张凯院, 徐仲 2013 矩阵论 (北京: 科学出版社) 第 114 页]

[5] Cheng Y P, Zhang K Y, Xu Z 2006 *Matrix Theory* (Xian: Northwestern Polytechnical University Press) p164 (in Chinese) [程云鹏, 张凯院, 徐仲 2006 矩阵论 (西安: 西北工业大学出版社) 第 164 页]

[6] Tian W H 2012 *Modern Control Theory* (Beijing: People's Posts and Telecommunications Press) p27 (in Chinese) [田卫华 2012 现代控制理论 (北京: 人民邮电出版社) 第 27 页]

[7] Zou B M 2007 *Automatic Control Theory* (Chengdu: Mechanical Industry Press) (in Chinese) p19 (in Chinese) [邹伯敏 2007 自动控制理论 (成都: 机械工业出版社) 第 19 页]

[8] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev. D* **35** 1831

[9] Fan H Y 2003 *J. Opt. B: Quantum Semicl Opt.* **5** R147

[10] Wünsche A 1999 *J. Opt. B: Quantum Semicl Opt.* **1** R11

[11] Gasiorowicz S 2006 Quantum Mechanics (3rd Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p119 [加西欧洛维茨 2006 量子物理 (第三版, 影印版) (北京: 高等教育出版社) 第 119 页]

[12] Kardar M 2010 *Statistical Physics of Particles* (Cambridge: Cambridge University Press) p293

[13] Fan H Y 1992 *J. Phys. A* **25** 3443

[14] Achilles R, Bonfiglioli A 2012 *Arch. Hist. Exact. Sci.* **66** 295

[15] Fan H Y, Zaidi H R 1987 *Phys. Lett. A* **124** 303

[16] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Phys. Rev. A* **80** 022115

[17] Eldelyi A 1953 *Higher Transcendental Functions* (Bateman Manuscript Project) (New York: McGraw-Hill) p1

[18] Xu S M, Jiang J J, Li H Q, Xu X L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7430 (in Chinese) [徐世民, 蒋继健, 李洪奇, 徐兴磊 2008 物理学报 **57** 7430]

[19] Xu S M, Xu X L, Li H Q, Wang J S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2174 (in Chinese) [徐世民, 徐兴磊, 李洪奇, 王继锁 2009 物理学报 **58** 2174]

[20] Xu S M, Xu X L, Li H Q, Wang J S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2129

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 24 (2014) 240302

Differential quotient rules of operator in composite function and its applications in quantum physics*

Xu Shi-Min[1)2)] Xu Xing-Lei[1)2)†] Li Hong-Qi[1)2)] Wang Ji-Suo[3)]

1) (*Department of Physics and Electronic Engineering, Heze University, Heze 274015, China*)

2) (*Key Laboratory of Quantum Communication and Calculation, Heze University, Heze 274015, China*)

3) (*College of Physics and Engineering Qufu Normal University, Qufu 273165, China*)

(Received 9 July 2014; revised manuscript received 19 August 2014)

Abstract

Differential quotient rule of composite function operator and its applications in quantum physics, quantum statistics, operator ordering theory, matrix theory and control theory are given. The integration problem of Wigner operator and Weyl corresponding rules are studied. Two kinds of typical operator identity formulas are proved. The differential form of Wigner operator in ordered product of operators and new differential form of important functions are obtained. Finally, a Wigner operator with parameter for unifying regular order, Weyl sequencing and abnormal order is introduced.

Keywords: composite function operator, differential quotient rule, Wigner operator, ordered product of operators

PACS: 03.65.–w, 42.50.Dv, 05.30.–d **DOI:** 10.7498/aps.63.240302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11244005) and the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y2008A16).

† Corresponding author. E-mail: xxlwlx@126.com