

随机系统的概率密度函数形状调节

杨恒占 钱富才 高韵 谢国

The shape regulation of probability density function for stochastic systems

Yang Heng-Zhan Qian Fu-Cai Gao Yun Xie Guo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **63**, 240508 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.240508

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240508>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2014/V63/I24>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于最大流的网络结构熵

[A new network structure entropy based on maximum flow](#)

物理学报.2014, 63(6): 060504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.060504>

非高斯噪声驱动下一维双稳系统的逻辑操作

[The reliability of logical operation in a one-dimensional bistable system induced by non-Gaussian noise](#)

物理学报.2013, 62(19): 190510 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.190510>

扩展 HK 网络结构与同步能力的研究

[Extended Holme-Kim network model and synchronizability](#)

物理学报.2012, 61(22): 220511 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.220511>

基于复杂网络理论的北京公交网络拓扑性质分析

[Analysis on topological properties of Beijing urban public transit based on complex network theory](#)

物理学报.2012, 61(19): 190510 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.190510>

加权方式对网络同步能力的影响

[Effect of weighted scheme on synchronizability based on different network structures](#)

物理学报.2012, 61(17): 170513 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.170513>

随机系统的概率密度函数形状调节*

杨恒占¹⁾²⁾ 钱富才^{1)†} 高韵²⁾ 谢国¹⁾

1) (西安理工大学自动化与信息工程学院, 西安 710048)

2) (西安工业大学, 新型网络与检测控制国家地方联合工程实验室, 西安 710021)

(2014年6月15日收到; 2014年8月10日收到修改稿)

针对受高斯白噪声激励的非线性随机系统, 提出了使状态响应的概率密度函数形状跟踪期望形状的调节方法. 首先, 确立了非线性随机系统的多项式反馈机制, 同时对系统中的非线性部分进行多项式展开; 然后, 以Fokker-Planck-Kolmogorov方程为工具, 导出了与控制增益相关的各阶矩递推方程, 并根据跟踪问题的要求, 构造了矩逼近优化问题, 用梯度搜索法求解该优化问题, 获得了调节函数; 再依据特征函数与概率密度函数构成Fourier对的关系, 对状态响应的概率密度函数进行重构; 最后, 通过两个例子仿真, 验证了本文方法的有效性.

关键词: 非线性随机系统, 概率密度函数, Fokker-Planck-Kolmogorov方程, 矩

PACS: 05.90.+m, 02.50.-r, 05.10.Gg

DOI: 10.7498/aps.63.240508

1 引言

世界充满不确定性, 从量子系统到一般动态演化系统, 无一例外. 这是因为不断变化中的系统不但存在着内部元素间的关联, 而且还存在着与外界的信息交流、物质交流、能量交流, 特别是在对系统进行干预或调节的过程中, 需要与被调节对象频繁地进行信息交换. 所有这些交流或者交换必然会产生不同程度的随机不确定性, 而不确定性的存在严重影响着系统的演化轨道.

由于在随机环境下对非线性系统进行分析非常困难, 因此, 对于具有特殊结构的动态系统, 以均值、方差和概率密度函数(probability density function, PDF)等为目的的分析与调节方法在最近几十年里应运而生^[1-5]. 文献[6]利用概率密度函数解决了一类盲源信号的分离问题. 文献[7]导出了碰撞-振动系统随机能量的概率密度函数, 以此为基础, 分析了系统的随机响应分布. 文献[8]建立了超磁致伸缩材料振幅的随机模型, 获得了哈密顿函

数的概率密度函数, 有效分析了材料成型的稳定性与可靠性. 文献[9]对于加性与乘性噪声同时作用的振子, 利用蒙特卡罗方法获得了系统响应的概率密度函数, 以此为工具对系统的稳态响应给出了正确分析, 这是一种统计方法, 需要巨大的样本. 文献[10-14]对于可测分布函数的非高斯随机系统采用静态优化、方程逼近、熵准则、多节点PDF和形状控制及分析策略, 建立和开创了PDF跟踪调节理论. 文献[15, 16]对于从控制输入到输出概率分布函数的一般非高斯随机系统, 提出了两步智能优化建模和控制方法; 对于从输入概率密度函数到输出概率密度函数的非高斯泛函算子模型, 提出了统计信息集合优化方法. 文献[17]对于同时含有不确定性和非高斯变量的随机系统, 研究了非高斯随机分布控制理论的鲁棒性问题.

所有这些理论都局限于具有线性特点的动态系统, 对于随机非线性系统, FPK (Fokker-Planck-Kolmogorov)方程的出现极大推动了这一领域的研究进展^[18]. FPK方程精确描述了PDF在时空中的演化过程, 而PDF是对随机过程统计特性的完

* 国家自然科学基金(批准号: 61273127, 61304204)和高等学校博士点专项科研基金(批准号: 20116118110008)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fcqian@xaut.edu.cn

全刻画, 假如获得了 FPK 方程的解析解, 那么, 诸如均值、方差、熵等指标都可以通过 PDF 精确算出. 因此, FPK 远远优于这些以低阶矩近似的统计量.

FPK 方程作为随机非线性系统分析的主要工具, 受到了理论与工程界的普遍关注. 研究的主要方法分为两类: 一类是基于 FPK 方程, 得到系统响应的概率密度函数, 然后求解系统响应的统计量, 从而对系统可靠性做定性的分析^[19]; 由于一般情况下很难得到系统 FPK 方程的解析解, 因此, 另一类方法就致力于 FPK 方程近似解的研究, 代表性的有路径积分法^[20]、有限元法^[21]和矩方法等^[22,23].

本文考虑了非线性随机系统的 PDF 跟踪问题. 为克服 FPK 方程求解的固有困难, 本文的基本思想为: 1) 假设对系统施行干预的调节律为状态响应的多项式反馈, 同时把动态方程中的非线性函数进行泰勒展开; 2) 以 FPK 方程为工具导出了随机状态响应各阶矩的递推方程, 该方程的解为调节增益的函数; 3) 为使被调节的 PDF 形状具有期望的形式, 构造了一个优化问题, 通过梯度法, 搜索出了最优调节增益, 实现了 PDF 的良好跟踪. 调节律约束为响应的多项式形式, 充分发挥了非线性函数比线性函数作用更为丰富的特点.

2 问题描述

考虑处于随机环境场中的单自由度非线性系统,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \phi(x, t) + w(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}$ 是描述系统演化行为的状态响应, $w(t) \in \mathbb{R}$ 是均值为零的高斯白噪声, 其自相关函数为

$$E[w(t)w(t+\tau)] = 2\pi S_0 \delta(\tau),$$

式中 S_0 为 $w(t)$ 的谱密度, $\delta(\tau)$ 为 Dirac 函数, $\phi(x, t) \in \mathbb{R}$ 为 x 的非线性函数, x_0 为确定性初始状态.

对于动态系统(1), 由于 $\phi(x, t)$ 具有非线性形式, 而即使在 $\phi(x, t) = |x|$ 这样极其简单的非线性情况下, 文献^[10]的推导过程表明, 要获得状态 $x(t)$ 的概率密度函数也是极其困难的.

本文的目的就是确定一个状态反馈函数 $u(x)$, 使得在其调节下, 按动态系统(1)演化的状态响应

$x(t)$ 到达稳态时对应的概率密度函数 $\gamma(x)$ 具有期望的形状 $\gamma_d(x)$. 其中 $\gamma_d(x)$ 是事先给定的, 它必须是某个真实随机变量的实现.

在瞬态过程结束且系统进入稳态时, 希望通过函数 $u(x)$ 调节状态的密度函数形状 $\gamma(x)$ 使其很好地跟踪期望的形状 $\gamma_d(x)$. 为达到这一目的, $u(x)$ 应该约束为状态 $x(t)$ 的函数. 这种机制符合控制科学的基本反馈原理, 即对系统的 PDF 形状具有调节作用. 事实上本文作者之一在文献^[1—3]中采用这种机制解决具备 PDF 形状或者由 PDF 导出的以均值、方差为目的的跟踪问题, 取得了满意的调节效果. 因此, 本文做如下两个假设:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p, \quad (2)$$

$$x^q \gamma(x) [\phi(x, t) + u(x)]|_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad (3)$$

其中 $\alpha_i (i = 0, 1, \dots, p)$ 为待确定的调节参数, p 和 q 为正整数.

事实上, 文献^[10]的研究也表明, 非线性系统的 PDF 形状调节, 只能用非线性调节律, 而线性调节律即使对简单的非线性系统也很难达到期望的目的, 这是因为非线性函数往往比线性函数包含更多的系统信息, 而且不同幂次的状态变量之间具有丰富的相互作用.

到此, 本文要解决的问题可以完整地描述为确定调节律(2)中的参数 $\alpha_i (i = 0, 1, 2, \dots, p)$, 使系统

$$\dot{x}(t) = \phi(x, t) + u(x) + w(t), \quad (4)$$

$$x(t_0) = x_0$$

状态的稳态 PDF 形状 $\gamma(x)$ 跟踪期望的形状 $\gamma_d(x)$.

3 矩与增益参数的关系

对于非线性随机系统(4), FPK 方程完全刻画了状态 $x(t)$ 的概率密度函数 $\gamma(x)$ 在时间和空间上的演化规律, 其具体形式为

$$\frac{\partial \gamma(x)}{\partial t} = -\frac{\partial [\gamma(x)h(x, t)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\gamma(x)2\pi S_0]}{\partial x^2}, \quad (5)$$

其中 $h(x, t) = \phi(x, t) + u(x)$.

上述 FPK 方程在绝大多数情况下不能求出 $\gamma(x)$ 的解析解, 即使求出具有较高精度的数值解也非常困难. 但是, 根据概率理论, 我们知道一个随机变量的概率密度函数和它的各阶矩之间具有等价关系. 尽管 FPK 方程难以求解, 但可以用它作为工具, 求出状态变量 $x(t)$ 的各阶矩.

对于随机状态变量 $x(t)$, 假设其概率密度函数为 $\gamma(x)$, 则它在 t 时刻的 k 阶矩可以由如下公式计算:

$$\tau_k(t) = E\{x^k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k(t)\gamma(x)dx, \quad (6)$$

其中 k 是大于等于 0 的整数, 表示矩的阶次, $E\{\cdot\}$ 为期望算子. 显然, $\tau_0(t) = 1$.

为了得到被调节系统 (4) 中状态响应 $x(t)$ 在 t 时刻的各阶矩, 用 $x^k(t)$ 乘 FPK 方程 (5) 两边, 然后对两边进行积分, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x^k(t) \frac{\partial \gamma(x)}{\partial t} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x^k(t) \frac{\partial [\gamma(x)h(x,t)]}{\partial x} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S_0 x^k(t) \frac{\partial^2 [\gamma(x)]}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

由于状态 $x(t)$ 中虽然隐含时间变量 t , 但不显含, 因此方程 (7) 的左边可简化为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x^k(t) \frac{\partial \gamma(x)}{\partial t} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial [x^k(t)\gamma(x)]}{\partial t} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} x^k(t)\gamma(x) dx \\ &= \dot{\tau}_k(t). \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式的最后一个等号用到了 k 阶矩的定义. 对方程 (7) 的右边利用分部积分可得

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} x^k(t) \frac{\partial [\gamma(x)h(x,t)]}{\partial x} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S_0 x^k(t) \frac{\partial^2 \gamma(x)}{\partial x^2} dx \\ &= - x^k(t)\gamma(x)h(x,t)|_{-\infty}^{+\infty} \\ &+ k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1}(t)\gamma(x)h(x,t) dx \\ &+ \frac{1}{2} k(k-1) \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S_0 x^{k-2}(t)\gamma(x) dx \\ &= kE\{x^{k-1}(t)h(x,t)\} + Dk(k-1)\tau_{k-2}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $D = \pi S_0$, 并且在计算过程中用到了假设 (3) 式.

把 (8) 和 (9) 式代入 (7) 式, 则状态变量 x 各阶矩的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_k &= kE\{x^{k-1}(t)h(x,t)\} \\ &+ Dk(k-1)\tau_{k-2} \quad (k \geq 2), \end{aligned} \quad (10)$$

边界条件为 $\tau_0 = 1$ 和 $\dot{\tau}_1 = E\{h\} - D$.

观察方程 (10) 可以看出, 状态变量 $x(t)$ 的各阶矩方程能否建立取决于上式右边的第一项也就是非线性函数 $h(x,t)$ 的复杂程度.

将 $h(x,t) = \phi(x,t) + u(x)$ 代入 (10) 式, 则有

$$\begin{aligned} & E\{x^{k-1}(t)h(x,t)\} \\ &= E\{x^{k-1}\phi(x,t)\} + E\{x^{k-1}u(x)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

根据上节中的假设 (i), $u(x)$ 为 x 的多项式函数, 因此,

$$\begin{aligned} & E\{x^{k-1}u(x)\} \\ &= E\{x^{k-1}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p)\} \\ &= \alpha_0 \tau_{k-1} + \alpha_1 \tau_k + \dots + \alpha_p \tau_{k+p-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

如果 $\phi(x,t)$ 也是 x 的多项式函数, 这是我们期望的; 如果 $\phi(x,t)$ 不是 x 的多项式函数, 而是一般意义下的非线性函数, 那么, 一个可行的策略就是将 $\phi(x,t)$ 关于 x 进行泰勒展开, 然后用泰勒级数的有限项逼近 $\phi(x,t)$. 这样, 我们总可以认为 $\phi(x,t)$ 关于随机变量 x 具有多项式形式.

令

$$\phi(x,t) = c_0 + c_1 x + \dots + c_q x^q + r_q(x),$$

其中 $r_q(x)$ 为用 q 次多项式逼近非线性函数 $\phi(x,t)$ 所产生的误差, 忽略掉该误差, 则有

$$\begin{aligned} & E\{x^{k-1}\phi(x,t)\} \\ &= E\{x^{k-1}(c_0 + c_1 x + \dots + c_q x^q)\} \\ &= c_0 \tau_{k-1} + c_1 \tau_k + \dots + c_q \tau_{k+q-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

把 (12) 和 (13) 式代入 (11) 式,

$$\begin{aligned} & E\{x^{k-1}(t)h(x,t)\} \\ &= \sum_{i=0}^q c_i \tau_{k-1+i} + \sum_{i=0}^p \alpha_i \tau_{k-1+i}; \end{aligned} \quad (14)$$

再把 (14) 式代入矩方程 (10), 则

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_k &= \sum_{i=0}^q c_i \tau_{k-1+i} + \sum_{i=0}^p \alpha_i \tau_{k-1+i} \\ &+ Dk(k-1)\tau_{k-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

本文的目的是通过对 $u(x)$ 调节, 使状态 $x(t)$ 的稳态概率密度函数 $\gamma(x)$ 逼近期望的密度函数 $\gamma_d(x)$. 据此, 对方程 (15) 可做如下简化:

1) 由于关注的是稳态意义下的密度函数形状逼近问题, 可以认为当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统的瞬态过程已经结束, 即 $\tau_k(t) \rightarrow 0$. 这表明在方程 (15) 中, 左边的 $\dot{\tau}_k = 0$;

2) 当 $\dot{\tau}_k = 0$ 时, 让 k 依次取正整数, 则由 (15) 式可以产生关于各阶矩 τ_k 的线性代数方程组. 要使其成为递推方程, 即在低于 k 的所有矩已知的条件下, 能够求出当前的 k 阶矩. 不幸的是, 在方程 (15) 中不仅包含比 k 低的低阶矩, 同时也包含比 k 高的高阶矩. 为使递推方程成立, 本文在计算大于 k 的各阶矩时, 用已知的概率密度函数 $\gamma_d(x)$ 代替 x 的未知概率密度函数 $\gamma(x, t)$. 具体计算如下:

$$\tau_{rd} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \gamma(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \gamma_d(x) dx, \quad (16)$$

其中 $r > k$.

将 (16) 式代入方程 (15) 中, 视 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ 为参数, 即可得到以 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ 为变量的线性方程组, 解该方程组, 其解可以为 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ 的函数, 即

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_1(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p), \\ \tau_2 = \tau_2(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p), \\ \vdots \\ \tau_k = \tau_k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p). \end{cases}$$

4 密度函数形状逼近

调节律 $u(x)$ 在以形式 (2) 假定的机制下, 尽管我们不能求出状态变量 $x(t)$ 对应的概率密度函数 $\gamma(x)$ 的 FPK 方程, 但在第 3 节中已经求出了随机状态变量的前 k 阶矩 $\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha), \dots, \tau_k(\alpha)$ 与调节函数 $u(x)$ 中增益向量 α 的解析表达式, 其中 $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p]^T$, 所谓的增益向量就是 $u(x)$ 的多项式系数.

另外, 由于期望的密度函数 $\gamma_d(x)$ 是已知的, 因此, 可以根据矩定义求出它的前 k 阶矩 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$. 期望的概率密度函数对应的矩定义为期望矩, 即

$$\eta_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \gamma_d(x) dx, \quad (17)$$

其中, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

任意一个随机变量的分布函数与它的各阶矩之间存在等价关系, 这是概率论中一个基本结论. 因此, 如果对任意的正整数 i , 我们能够求出一组系数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$, 使得

$$\tau_i(\alpha) = \eta_i, \quad (18)$$

则对于由随机演化系统 (4) 确定的状态 x , 在稳态时其对应的 PDF 与期望的 PDF 形状完全相等, 即

$$\gamma(x) = \gamma_d(x),$$

这就达到了本文的目的.

注意到方程组 (18) 中方程的个数 i 表示密度函数的 i 阶矩, i 越大, 选择的矩越多, 逼近精度自然就高. 然而, 方程组中自变量 α 的个数 p 是待定调节律的最高阶数, 一旦调节律给定, p 就是确定的正整数. 显然, 当 i 超过 p 时, 导致方程组中方程的个数会超过自变量的个数, 这就是所谓的超定方程组, 使得求解产生了困难, 甚至解会不存在.

为解决上述超定问题, 我们构造如下优化问题:

$$(P) \min e = \sum_{i=1}^k w_i [\tau_i(\alpha) - \eta_i]^2, \quad (19)$$

其中, w_i 权系数. w_i 的引入, 可以强化个别矩的物理意义, 如: 若需要方差较小, w_1 和 w_2 可以选的大些, 因为方差和一、二阶矩有关; 若考虑到密度函数的峭度、扭度, 则相关矩的权系数可以选大. 另外, 在优化问题 (P) 中, 无论 k 选多么大, 对优化问题解的存在性没有任何影响.

理论上两个密度函数具有完全相同的形状, 则它们对应的各阶矩相等, 反之亦然. 但实际上均值、方差、峭度、扭度等几个有限矩的信息就能近似密度函数的形状, 因此, 在优化问题 (P) 中, 实际取矩为有限个.

本文采用梯度法, 解决优化问题 (P).

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial \alpha_0} = 2 \sum_{i=1}^k w_i [\tau_i(\alpha) - \eta_i] \frac{\partial \tau_i(\alpha)}{\partial \alpha_0}, \\ \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} = 2 \sum_{i=1}^k w_i [\tau_i(\alpha) - \eta_i] \frac{\partial \tau_i(\alpha)}{\partial \alpha_1}, \\ \vdots \\ \frac{\partial e}{\partial \alpha_p} = 2 \sum_{i=1}^k w_i [\tau_i(\alpha) - \eta_i] \frac{\partial \tau_i(\alpha)}{\partial \alpha_p}. \end{cases}$$

假设第 s 次迭代结束时, 变量 α 的取值为 α^s , 则第 $s+1$ 次的迭代公式为

$$\alpha_i^{s+1} = \alpha_i^s - \beta_i \frac{\partial e}{\partial \alpha_i} \quad (i = 0, 1, \dots, p), \quad (20)$$

其中, β_i 为给定的搜索步长.

调节律 $u(x)$ 的求取, 在于确定待定系数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$; 这些系数可以由最优化问题 (P) 的解来产生. 可以看出: 优化问题中不涉及系统的实时

状态 $x(t)$, 因此可以离线事先求出, 然后在线与状态变量 $x(t)$ 的各次方相乘. 该特点大大简化了动态系统调节过程的复杂性, 使得调节律更为实用.

获得了最优的 α^* , 就可计算出 $\tau_i(\alpha^*)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 根据这组矩可以近似地构造出被调节的 PDF.

在概率论中, 一个随机变量的特征函数与密度函数构成了 Fourier 变换对, 即知道特征函数用 Fourier 逆变换就可以求出密度函数, 而特征函数与各阶矩间存在等价关系. 利用这些关系, 就可以根据已知矩重构 x 的 PDF. 具体做法如下:

随机变量 x 的特征函数定义为

$$f(t) = E\{\exp(tx)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx)\gamma(x)dx, \quad (21)$$

显然,

$$f^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \gamma(x)dx = E\{x^k\} = \tau_k;$$

将特征函数 $f(t)$ 在 0 点展成幂级数

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_k}{k!} t^k, \quad (22)$$

因此, 当 $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ 已知时, 特征函数完全被确定.

由 (21) 式可以看出, $f(t)$ 是概率密度函数 $\gamma(x)$ 的 Fourier 变换, 那么, $\gamma(x)$ 就是特征函数 $f(t)$ 的逆变换, 即

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tx)f(t)dt, \quad (23)$$

这样, 就完成了 PDF 的重构. 为了测试本文推导的调节律性质, 我们选择下面的一个例子来说明 $u(x)$ 的求取步骤和调节效果.

5 数值算例及仿真

考虑如下受白噪声激励的一阶非线性随机系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x - x^3 + u(x, t) + w(t), \quad (24) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

其中 $w(t)$ 的谱密度 $S_0 = \pi$, $x_0 = 1$ 是系统的初始状态, 期望的概率密度函数为

$$\gamma_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (25)$$

假设非线性调节律 $u(x)$ 的结构为

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3,$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为待定参数. 可以看出, 非线性系统 $\phi(x, t)$ 为 3 阶多项式, 因此, $u(x)$ 也取为 3 阶多项式. 尽管在数学上对 p 大小的选定还没有一个肯定的定量结论, 但如果 $\phi(x, t)$ 为多项式, 那么, 一般取 p 不超过多项式 $\phi(x, t)$ 的次数.

用上述结构的调节函数 $u(x)$, 则系统 (24) 变为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha_0 + (\alpha_1 - 1)x + \alpha_2 x^2 \\ &\quad + (\alpha_3 - 1)x^3 + w(t). \end{aligned} \quad (26)$$

这样, 利用矩微分方程 (15), 则有

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_k &= Dk(k-1)\tau_{k-2} + \alpha_0\tau_{k-1} + (\alpha_1 - 1)\tau_k \\ &\quad + \alpha_2\tau_{k+1} + (\alpha_3 - 1)\tau_{k+2}. \end{aligned} \quad (27)$$

由 (27) 式及其边界条件可以得到 x 的前四阶矩微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_1 &= \alpha_0 + (\alpha_1 - 1)\tau_1 + \alpha_2\tau_2 \\ &\quad + (\alpha_3 - 1)\tau_3 - D, \\ \dot{\tau}_2 &= \alpha_0\tau_1 + (\alpha_1 - 1)\tau_2 + \alpha_2\tau_3 \\ &\quad + (\alpha_3 - 1)\tau_4 + 2D, \\ \dot{\tau}_3 &= 6D\tau_1 + \alpha_0\tau_2 + (\alpha_1 - 1)\tau_3 \\ &\quad + \alpha_2\tau_4 + (\alpha_3 - 1)\tau_5, \\ \dot{\tau}_4 &= 12D\tau_2 + \alpha_0\tau_3 + (\alpha_1 - 1)\tau_4 \\ &\quad + \alpha_2\tau_5 + (\alpha_3 - 1)\tau_6. \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{\tau}_k \rightarrow 0$, 则上述方程组变为如下形式:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + (\alpha_1 - 1)\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + (\alpha_3 - 1)\tau_3 - D &= 0, \\ \alpha_0\tau_1 + (\alpha_1 - 1)\tau_2 + \alpha_2\tau_3 + (\alpha_3 - 1)\tau_4 + 2D &= 0, \\ \alpha_0\tau_2 + (\alpha_1 - 1)\tau_3 + \alpha_2\tau_4 + (\alpha_3 - 1)\tau_5 + 6D\tau_1 &= 0, \\ \alpha_0\tau_3 + (\alpha_1 - 1)\tau_4 + \alpha_2\tau_5 + (\alpha_3 - 1)\tau_6 + 12D\tau_2 &= 0. \end{aligned}$$

上述方程组中含有高阶矩 τ_5 和 τ_6 , 为使其成为递推方程组, 用 (16) 式中定义的 τ_{5d} 和 τ_{6d} 替代 τ_5 和 τ_6 . 然后, 视 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为参数, $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ 为变量, 可以获得方程组的解:

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \tau_2 = \tau_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \tau_3 = \tau_3(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \tau_4 = \tau_4(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{cases}$$

对于期望的概率密度函数, 前4阶矩为

$$\begin{cases} \eta_1 = \mu, \\ \eta_2 = \sigma^2 + \mu^2, \\ \eta_3 = (3\sigma^2 + \mu^2)\mu, \\ \eta_4 = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4. \end{cases}$$

优化问题(P)为

$$\begin{aligned} \min e = & w_1(\tau_1 - \eta_1)^2 + w_2(\tau_2 - \eta_2)^2 \\ & + w_3(\tau_3 - \eta_3)^2 + w_4(\tau_4 - \eta_4)^2, \end{aligned}$$

为简单起见, 取 $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$.

然后, 给定期望密度函数 $\gamma_d(x)$ 中的 σ 和 μ , 再通过梯度算法搜索最优的 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 就可以获得调节律.

下面是当 $\mu = 0.3, \sigma = 1$ 时得到的调节律的参数:

$$\begin{aligned} \alpha_0^* &= 0.296, \quad \alpha_1^* = -0.040, \\ \alpha_2^* &= -0.075, \quad \alpha_3^* = 0.992. \end{aligned}$$

调节函数为

$$u(x) = 0.296 - 0.04x - 0.075x^2 + 0.992x^3. \quad (28)$$

另外, 根据 α^* 可以求出 $\tau_1(\alpha^*), \tau_2(\alpha^*), \tau_3(\alpha^*), \tau_4(\alpha^*)$, 根据 (22) 式, 特征函数 $f(t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} f(t) = & \tau_0 + \tau_1(\alpha^*)t + \frac{1}{2!}\tau_2(\alpha^*)t^2 \\ & + \frac{1}{3!}\tau_3(\alpha^*)t^3 + \frac{1}{4!}\tau_4(\alpha^*)t^4. \end{aligned}$$

利用 (23) 式对特征函数进行 Fourier 逆变换, 就可获得概率密度函数 $\gamma(x)$.

注意到 $u(x)$ 的参数为固定常数, 一旦通过测量获得了状态变量 x , 代入 (28) 式就可得到当前调节量的大小 u . 用 u 调节演化方程, 稳态时状态 x 的 PDF 形状如图 1 的实线, 点线是目标 PDF 的形状, 可以看出调节效果较好.

在上面的 PDF 形状跟踪过程中, 期望的 PDF 形状取为高斯正态密度函数. 高斯正态概率密度函数只有一个最大值, 称为单峰函数. 而很多实际系统的概率密度函数是非高斯的, 具有多个最大值点, 称为多峰函数.

下面我们考虑目标 PDF 具有非高斯形状, 假如期望的非高斯概率密度函数为

$$\gamma_d(x) = 0.24 \exp(0.25x^2 - 0.125x^4). \quad (29)$$

利用本文的方法得到的调节函数为

$$u(x) = -0.041 + 0.306x - 0.006x^2 + 0.728x^3,$$

调节效果如图 2. 在图 2 中, 点线表示期望的 PDF 形状, 实线表示被调节的 PDF 形状.

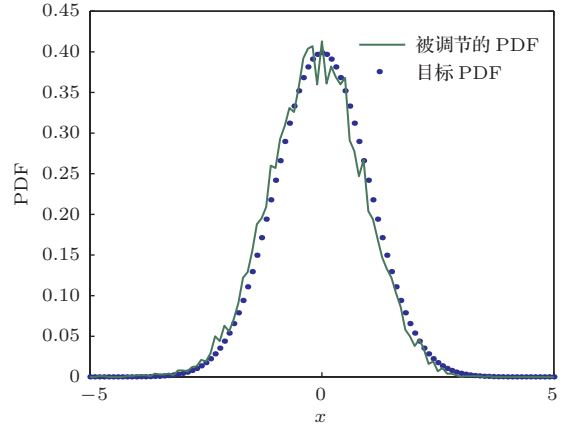


图1 被调节的 PDF 与目标 PDF

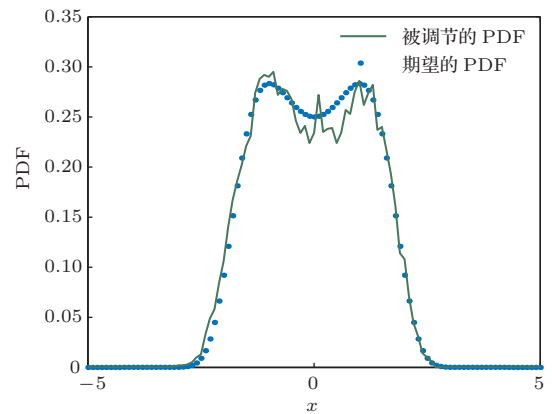


图2 被调节的 PDF 与具有多峰的目标 PDF

图 1 与图 2 表明, 用本文提出的方法, 对单峰或者多峰目标函数, 都有良好的调节效果.

6 结 论

对于非线性随机系统, 状态变量必然具有随机不确定性. 而随机变量的 PDF 形状完全刻画了不确定性的统计特征, 动态系统随时间的演化过程中遵从 FPK 方程, 但 FPK 方程在绝大多数情况下无法获得解析解, 即使获得数值解也存在很大困难. 本文首先假定了调节函数 $u(x)$ 的反馈机制, 利用 FPK 方程求出了稳态时各阶矩的递推方程, 然后将密度函数逼近 (跟踪) 问题转化为优化问题, 用梯度法搜索出优化问题的最优解, 从而获得了演化系统 PDF 的各阶矩, 进而给出了稳态时状态响应

的PDF, 仿真验证了本文方法对单峰和多峰目标PDF的有效性.

尽管本文设计的调节函数 $u(x)$ 具有分离性特点, 即计算 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ 时与状态 x 无关, 但调节函数中多项式最高阶数 p 的选取还有待解决; 同时优化问题(P) 如果具有凸结构, 则用梯度搜索算法从任一初始点都可搜索出全局最优解. 但当优化问题(P) 具有非凸结构时, 就有可能搜索到局部最优解. 如何判断优化问题是否具有凸结构? 如果非凸, 如何对其凸化? 这些问题都有待进一步研究.

参考文献

- [1] Li D, Qian F C, Fu P L 2002 *IEEE Trans. Autom. Control* **47** 2010
- [2] Li D, Qian F C, Fu P L 2008 *Automatica* **44** 119
- [3] Li D, Qian F C, Gao J J 2009 *IEEE Trans. Autom. Control* **54** 2225
- [4] Sain M K 1966 *IEEE Trans. Autom. Control* **11** 118
- [5] Sain M K, Liberty S R 1971 *IEEE Trans. Autom. Control* **16** 431
- [6] Huang J W, Feng J C, Lü S X 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 050502 (in Chinese) [黄锦旺, 冯久超, 吕善翔 2014 物理学报 **63** 050502]
- [7] Li C, Xu W, Wang L, Li D X 2013 *Chin. Phys. B* **22** 110205
- [8] Zhu Z W, Zhang Q X, Xu J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 088201
- [9] Yue X L, Xu W, Zhang Y, Wang L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 060502 (in Chinese) [岳晓乐, 徐伟, 张莹, 王亮 2014 物理学报 **63** 060502]
- [10] Forbes M G, Guay M, Forbes J F 2004 *J. Process Contr.* **14** 399
- [11] Karny M 1996 *Automatica* **32** 1719
- [12] Liu F, Ouyang Z C 2014 *Chin. Phys. B* **23** 070512
- [13] Yeontaek C, Sang G J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050501
- [14] Hu H B, Du P, Huang S H, Wang Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 074703
- [15] Guo L, Wang H 2010 *Stochastic Distribution Control System Design: A Convex Optimization Approach* (London: Springer)
- [16] Guo L, Wang H 2005 *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B: Cybern.* **35** 65
- [17] Guo L, Yin L 2009 *IET Control Theory Appl.* **3** 575
- [18] Fuller A T 1969 *Int. J. Control* **9** 603
- [19] Zhuang B Z, Chen N L, Gao Z 1986 *The Random Vibration Theory of the Nonlinear and Application* (Hangzhou: Zhejiang University Press) (in Chinese) [庄表中, 陈乃立, 高瞻 1986 非线性随机振动理论及应用 (浙江大学出版社)]
- [20] Xie W X, Xu W, Lei Y M, Cai L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1105 (in Chinese) [谢文贤, 徐伟, 雷佑铭, 蔡力 2005 物理学报 **54** 1105]
- [21] Langley R 1985 *J. Sound Vibr.* **101** 41
- [22] Paola M D, Ricciardi G, Vasta M 1995 *Probab. Eng. Mech.* **10** 1
- [23] Zhu C X, Zhu W Q 2011 *Automatica* **47** 539

The shape regulation of probability density function for stochastic systems*

Yang Heng-Zhan¹⁾²⁾ Qian Fu-Cai^{1)†} Gao Yun²⁾ Xie Guo¹⁾

1) (School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

2) (The National-Local Joint Engineering Laboratory for New Network and Detection Control, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China)

(Received 15 June 2014; revised manuscript received 10 August 2014)

Abstract

For nonlinear stochastic systems which are excited by Gaussian white noise, an innovational regulation method is proposed to control the shape of the probability density function of state response to track a desired shape. Firstly, a polynomial feedback scheme is established, and the nonlinear part is replaced by polynomials expansion. Then the recursive equations of the moments which are related to control gain are derived under Fokker-Planck-Kolmogorov theory framework. Meanwhile, regarding the tracking requirement, an optimization problem about the moment approximation is constructed, and the gain of regulation function is obtained by solving this optimization problem using the gradient method. Furthermore, the probability density function of state response is reconstructed from the relationship of the Fourier transform pairs between the characteristic function and probability density function. Finally, two examples are given to demonstrate the effectiveness of the method developed in this paper.

Keywords: nonlinear stochastic systems, probability density function, Fokker-Planck-Kolmogorov equation, moment

PACS: 05.90.+m, 02.50.-r, 05.10.Gg

DOI: [10.7498/aps.63.240508](https://doi.org/10.7498/aps.63.240508)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61273127, 61304204), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20116118110008).

† Corresponding author. E-mail: fcqian@xaut.edu.cn