

一类量子等离子体类孤波的近似解析解*

韩祥临^{1)†} 陈贤峰²⁾ 莫嘉琪^{3)‡}

1) (湖州师范学院数学系, 湖州 313000)

2) (上海交通大学数学系, 上海 200240)

3) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241001)

(2013年9月11日收到; 2013年10月14日收到修改稿)

本文探讨了在一类量子等离子体系统, 研究了该系统的非线性动力学扰动方程. 利用改进的广义泛函变分迭代方法, 求得了对应系统的类孤波近似解析解.

关键词: 等离子体, 类孤波, 近似方法

PACS: 02.30.Sa

DOI: 10.7498/aps.63.030202

1 引言

近来, 对量子等离子体的讨论, 如在致密的天体等离子体和激光等离子体, 尘埃磁等离子体等情况下的非线性特性方面已有研究^[1-11]. 不同情况下的量子等离子体声波与量子相关的特性也得到了较深的探讨^[12,13].

当前许多学者研究并改进、优化了非线性问题的一些近似方法, 如平均法, 边界层法, 匹配渐近展开法和多重尺度法等^[14-18]. 作者等也利用一些渐近等方法讨论了一类非线性问题^[19-24].

本文是在含有离子和电子的情况下, 研究了温度梯度和密度的非均匀量子等离子体系统, 在量子间的碰撞频率较小的情况下, 非均匀量子等离子体非线性方程. 利用近代数学理论和方法, 来求其非线性模型类孤波的近似解析解.

2 一类量子等离子体动力学模型

根据等离子体和无惯性电子的动力学理论, 在量子的碰撞频率较低的情况下, 一类量子等离子体

二维非线性动力学模型可简化为^[25,26]

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t^2} + (H^2 - \lambda^2 - \rho^2) \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^2 \partial y^2} \\ & - \omega \rho^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial t \partial y^2} + \frac{3v}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} \\ & - D \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t \partial y} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = f(\phi), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ϕ 为静电势, $a = -3e/4kT$, e 为电子的电量, k 为玻尔兹曼常数, T 为电子的费米温度, H 是量子参量, λ 是电子的费米波长, $\rho = \sqrt{kT/m\Omega^2}$ 是电子的费米温度下的拉莫尔半径, m 为离子的质量, Ω 为离子回旋频率, ω 是量子的碰撞频率, v 量子离子的漂移速度, D 是温度梯度, c 是量子离子的声速, f 为充分光滑有界的扰动函数.

模型 (1) 是一个非线性偏微分方程. 它一般不能用初等方法来求出其初等函数的解析解. 我们将采用改进的广义泛函变分迭代方法来求得方程 (1) 的近似解.

为了方便计算, 对上述方程 (1) 作归一化处理. 引入无量纲量变换, 这时方程 (1) 为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - a_1 \frac{\partial^2 u^2}{\partial t_1^2} - a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial t_1^2 \partial y_1^2} - a_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial y_1^2}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202106, 11371248) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LY13A010005) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xlhan@hutc.zj.cn

‡ 通讯作者. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$-a_4 \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} - a_5 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial y_1} - a_6 \frac{\partial^2 u^2}{\partial t_1 \partial y_1} = g(u), \quad (2)$$

其中 $u = \frac{e\phi}{kT}$, $y_1 = \frac{y}{\rho}$, $z_1 = \frac{z}{\rho}$, $t_1 = \Omega t$, 而已知的无量纲系数 $a_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 和扰动项 $g(u)$ 的表示式在此从略.

现在我们来求非线性扰动无量纲方程 (2) 的类孤波解. 作行波变换

$$x = k_1 y_1 + k_2 z_1 - k_3 t_1, \quad (3)$$

其中 k_1 和 k_2 为非线性波数, k_3 为波频. 将 (3) 式代入方程 (2), 得

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \alpha \frac{d^3 u}{dx^3} + \beta \frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma u \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \frac{d^2 u^2}{dx^2} = h(u), \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_3}{a_2 k_3}, \\ \beta &= \frac{k_3^2 - a_4 k_2^2 + a_5 k_1 k_3}{a_2 k_1^2 k_3}, \\ \gamma &= \frac{2(a_6 k_1 - a_1 k_3)}{a_2 k_1^2}, \\ \kappa &= \frac{2(a_6 k_1 - a_1 k_3)}{a_2 k_1^2}, \\ h(u) &= -\frac{g(u)}{a_2 k_1^2 k_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

首先考虑无扰动项 $h(u) = 0$ 的情形. 即研究方程

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \alpha \frac{d^3 u}{dx^3} + \beta \frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma u \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \frac{d^2 u^2}{dx^2} = 0. \quad (7)$$

用双曲超越函数待定系数法. 设无扰动方程 (7) 有如下形式的类孤波解 [26]:

$$u(x) = A_0 + A_1 \tanh x + A_2 \tanh^2 x + \frac{B_1}{\tanh x} + \frac{B_2}{\tanh^2 x}, \quad (8)$$

其中 $A_i (i = 0, 1, 2)$, B_i 为待定常数.

将 (8) 式代入方程 (7), 合并 $\tanh z$ 及其各次幂同类项的系数, 令其为零, 可分别决定 A_i 和 B_i :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{12k_1^2 a_2 a_3^2 + 10k_1 a_1 a_3 a_5 - 100k_2^2 a_2^2 a_4 + a_3^2}{2a_3(a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6)}, \\ A_1 &= -\frac{12k_1^2 a_2 a_3}{a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6}, \\ A_2 &= \frac{6k_1^2 a_2 a_3}{a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6}, \quad B_1 = B_2 = 0 \end{aligned}$$

及

$$A_0 = -\frac{12k_1^2 a_2 a_3^2 + 10k_1 a_1 a_3 a_5 - 100k_2^2 a_2^2 a_4 + a_3^2}{2a_3(a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6)},$$

$$B_1 = -\frac{12k_1^2 a_2 a_3}{a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6},$$

$$B_2 = \frac{6k_1^2 a_2 a_3}{a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6}, \quad A_1 = A_2 = 0.$$

将上述参数代回 (8) 式, 可得如下两个类孤波解:

$$U_1(x) = C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x, \quad (9)$$

$$U_2(x) = C_0 + C_1 \frac{(2 \tanh x + 1)}{\tanh^2 x}, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{12k_1^2 a_2 a_3^2 + 10k_1 a_1 a_3 a_5 - 100k_2^2 a_2^2 a_4 + a_3^2}{2a_3(a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6)}, \\ C_1 &= \frac{6k_1^2 a_2 a_3}{a_1 a_3 - 10k_1 a_2 a_6}. \end{aligned} \quad (11)$$

作为 (7) 式的两个类孤波解 (9) 和 (10) 例子, 取 $C_0 = 6.5$, $C_1 = 6$. 这时类孤波解 (9) 和 (10) 式分别描述了两个不同性态的类孤波解. 如图 1 (这里对应于 (9) 式的解称电双层解)、图 2 所示.

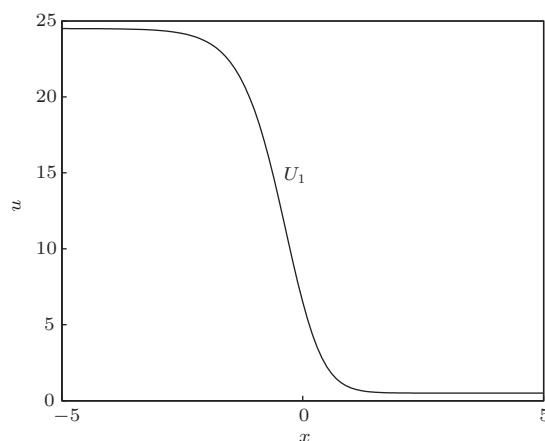


图 1 电双层解 $U_1(x)$ 曲线

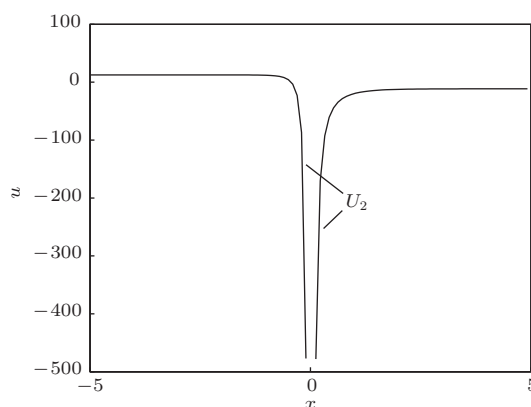


图 2 类孤波 $U_2(x)$ 曲线

3 量子等离子体扰动方程类孤波近似解

由于非均匀量子等离子体扰动方程(4)具有扰动项 $g(u)$, 它一般不能用初等方法求出其精确解析解, 故我们要求其近似解析解

为了得到非均匀量子等离子体扰动方程(4)的类孤波近似解, 引入如下泛函 $F[u]$ ^[27]:

$$F[u] = u - \int_0^x \lambda \left[\frac{d^4 u}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^3 u}{d\xi^3} + \beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \gamma \bar{u} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \kappa \frac{d^2 \bar{u}^2}{d\xi^2} - h(\bar{u}) \right] d\xi, \quad (12)$$

其中 $\bar{u}$ 为 u 的限制变量^[27], λ 为Lagrange乘子, 而 $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, h$ 由(5), (6)式表示.

计算泛函(12)的变分 δF , 并令 $\delta F = 0$. 于是有

$$\frac{d^4 \lambda}{d\xi^4} - \alpha \frac{d^3 \lambda}{d\xi^3} + \beta \frac{d^2 \lambda}{d\xi^2} = 0, \quad (13)$$

$$\lambda|_{\xi=x} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\xi}|_{\xi=x} = 0, \quad \frac{d^2 \lambda}{d\xi^2}|_{\xi=x} = 0, \quad \frac{d^3 \lambda}{d\xi^3} = -1. \quad (14)$$

问题(13), (14)的解为

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad (15)$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2)$ 为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}). \quad (16)$$

由(15), (16)式, 现构造如下改进的广义泛函变分迭代式:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] \left[\frac{d^4 u_n}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^3 u_n}{d\xi^3} + \beta \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} + \gamma u_n \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} + \kappa \frac{d^2 u_n^2}{d\xi^2} - h(u_n(\xi)) \right] d\xi. \quad (17)$$

选取无扰动项方程(7)的类孤波解(9)为变分迭代式的零次近似 $u_0(x)$. 即

$$u_0(x) = C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x, \quad (18)$$

其中 C_1, C_2 由(11)式表示.

由改进的广义泛函变分迭代式(17)和零次近似式(18), 可得方程(4)类孤波解的一次近似 $u_1(x)$:

$$u_1(x) = (C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x) + \int_{-\infty}^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] [h(C_0 + C_1(2 - \tanh \xi) \tanh \xi)] d\xi. \quad (19)$$

再由变分迭代式(17), 可得方程(4)类孤波解的二次近似 $u_2(x)$:

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] \left[\frac{d^4 u_1}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^3 u_1}{d\xi^3} + \beta \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + \gamma u_1 \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + \kappa \frac{d^2 u_1^2}{d\xi^2} - h(u_1(\xi)) \right] d\xi, \quad (20)$$

其中 $u_1(x)$ 由(19)式表示.

继续用相同的方法, 和(18)–(20)式, 可以进一步依次得到方程的更高次近似解 $u_n (n = 2, 3, \dots)$.

由一类量子等离子体非线性动力学模型(4)的结构, 可依次得到一个收敛的函数序列 $\{u_n\}$, 此时 $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ 就是方程(4)类孤波的精确解, 而 $u_n(x)$ 就是方程(4)类孤波的 n 次近似解.

考虑到变换(3), $u_n(k_1 y_1 + k_2 z_1 - k_3 t_1)$ 就是量子等离子体二维非线性动力学模型(1)的类孤波的 n 次行波近似解.

用相同的方法, 当我们选取初始近似 $\tilde{u}_0(x)$ 为方程(7)的另一个类孤波解中的(10)式 $U_2(x)$ 时, 即 $\tilde{u}_0(x) = U_2(x)$. 我们还能得到量子等离子体二维非线性动力学扰动模型(4)的另一个类孤波 n 次近似解 $\tilde{u}_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 及 n 次行波近似解 $\tilde{u}_n(k_1 y_1 + k_2 z_1 - k_3 t) (n = 1, 2, \dots)$.

4 类孤波近似解的精度比较

若在量子等离子体非线性动力学无量纲行波模型(4)中的扰动项是微扰的^[28], 为简单计算, 例如设 $h(u) = \varepsilon \sin u$, 其中 ε 为正的小参数. 这时相应的量子等离子体非线性类孤波模型(4)为

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \alpha \frac{d^3 u}{dx^3} + \beta \frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma u \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \frac{d^2 u^2}{dx^2} = \varepsilon \sin u, \quad (21)$$

由关系(21)式, 量子等离子体微扰类孤波解的零阶、一阶近似 $u_0(x), u_1(x)$ 分别为

$$u_0(x) = C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x, \quad (22)$$

$$u_1(x) = (C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x) + \varepsilon \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] [\sin(C_0 + C_1(2 - \tanh \xi) \times \tanh \xi)] d\xi. \quad (23)$$

利用(17)式, 可求得量子等离子体微扰类孤波解的二次近似 $u_2(x)$:

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] \left[\frac{d^4 u_1}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^3 u_1}{d\xi^3} + \beta \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + \gamma u_1 \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + \kappa \frac{d^2 u_1^2}{d\xi^2} - \varepsilon \sin(u_1(\xi)) \right] d\xi, \quad (24)$$

其中 $u_1(x)$ 由(23)式表示.

记 $u_{app}(x)$ 为利用改进的广义泛函变分迭代方法得到的量子等离子体微扰类孤波解的余项达到 $O(\varepsilon^2)$ 量级的近似解. 由(22), (23)式, 我们有

$$u_{app}(x) = (C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x) + \varepsilon v(x) - \varepsilon \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] \left[\frac{d^4 v}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^3 v}{d\xi^3} + \beta \frac{d^2 v}{d\xi^2} + 2\gamma \left(u_0 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + v \frac{d^2 u_0^2}{d\xi^2} \right) + 2\kappa \left(2 \frac{du_0}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} + u_0 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + v \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right) - \sin u_0 \right] d\xi$$

$$+ 2\gamma \left(u_0 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + v \frac{d^2 u_0^2}{d\xi^2} \right) + 2\kappa \left(2 \frac{du_0}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} + u_0 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + v \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right) - \sin u_0 \Big] d\xi + O(\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (25)$$

其中 u_0 由(22)式表示, 而

$$v(x) = \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] \times [\sin(C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x)] d\xi. \quad (26)$$

另一方面, 由于(21)式为微扰方程, 我们能采用奇摄动方法来计算量子等离子体微扰类孤波近似解. 设方程(21)的摄动解 $\bar{u}(x)$ 为

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_i(x) \varepsilon^i. \quad (27)$$

将(27)式代入(22)式, 按 ε 展开非线性项, 合并 ε 的同次幂项的系数, 并分别令其为零. 于是对于 $\bar{u}_0(x), \bar{u}_1(x)$ 分别满足方程

$$\frac{d^4 \bar{u}_0}{dx^4} + \alpha \frac{d^3 \bar{u}_0}{dx^3} + \beta \frac{d^2 \bar{u}_0}{dx^2} + \gamma \bar{u}_0 \frac{d^2 \bar{u}_0}{dx^2} + \kappa \frac{d^2 \bar{u}_0^2}{dx^2} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d^4 \bar{u}_1}{dx^4} + \alpha \frac{d^3 \bar{u}_1}{dx^3} + \beta \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2} + \gamma \left(\bar{u}_0 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2} + \bar{u}_1 \frac{d^2 \bar{u}_0}{dx^2} \right) + 2\kappa \frac{d^2(\bar{u}_0 \bar{u}_1)}{dx^2} - \sin \bar{u}_0 = 0. \quad (29)$$

由(7), (9)式知, 方程(27)具有如下类孤波解:

$$\bar{u}_1(x) = C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x. \quad (30)$$

将(30)式代入线性方程(29), 可以求得解 $\bar{u}_1(x)$. 再由奇摄动理论知, 这时量子等离子体微扰类孤波解的余项达到 $O(\varepsilon^2)$ 量级的摄动解为

$$u_{per}(x) = (C_0 + C_1(2 - \tanh x) \tanh x) + \varepsilon v(x) - \varepsilon \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right) - \frac{1}{\beta}(\xi - x) - \frac{\alpha}{\beta^2} \right] \left[\frac{d^4 v}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^3 v}{d\xi^3} + \beta \frac{d^2 v}{d\xi^2} + 2\gamma \left(u_0 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + v \frac{d^2 u_0^2}{d\xi^2} \right) + 2\kappa \left(2 \frac{du_0}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} + u_0 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + v \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right) - \sin u_0 \right] d\xi$$

$$+O(\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (31)$$

比较(29), (31)式, 两者表示式的误差在 $O(\varepsilon^2)$ 的量级范围内是相同的. 因此, 从这里也可以看出, 利用改进的广义泛函变分迭代方法得到一类量子等离子体微扰类孤波的近似解具有较好的精度.

5 类孤波解曲线模拟图的例

为了简单起见, 我们取非均匀量子等离子扰动方程(4)的扰动项 $h(u) = \varepsilon \exp u$, 这里 ε 为小的正参数. 选取如下相应的无量纲参数 $a_i = 1$ ($i = 1, 2, 4, 5$), $a_3 = 3$, $a_6 = 2$, $k_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$). 这时量子等离子扰动方程为

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 3 \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{d^2 u}{dx^2} + 2u \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{d^2 u^2}{dx^2} = \varepsilon \exp u. \quad (32)$$

由(9), (10)式, 量子等离子无扰动方程的类孤波解分别为

$$U_1(x) = \frac{47}{102} - \frac{18}{17}(2 - \tanh x) \tanh x, \quad (33)$$

$$U_2(x) = \frac{47}{102} - \frac{18}{17} \frac{(2 \tanh x + 1)}{\tanh^2 x}. \quad (34)$$

于是, 利用改进的广义泛函变分迭代方法, 考虑到(33)式, 可得到类孤波解的零次、一次、二次近似解析解:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{47}{102} - \frac{18}{17}(2 - \tanh x) \tanh x, \\ u_1(x) &= \frac{47}{102} - \frac{18}{17}(2 - \tanh x) \tanh x \\ &\quad + \varepsilon \int_0^x \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right] - (\xi - x) \\ &\quad - 2 \left[\exp \left(\frac{47}{102} - \frac{18}{17}(2 - \tanh x) \tanh x \right) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\lambda_1^2} \exp(\lambda_1(\xi - x)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(\xi - x)) \right] - (\xi - x) - 2 \\ &\quad \times \left[\frac{d^4 u_1}{d\xi^4} + \frac{d^3 u_1}{d\xi^3} + \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + 2u_1 \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{d^2 u_1^2}{d\xi^2} - \varepsilon \exp(u_1(\xi)) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (36)$$

其中(36)式的 u_1 由(35)式表示, 而 $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. 用上述广义变分迭代方法, 可以

逐次地得到更高次的类孤波近似解析解.

在非均匀量子等离子扰动方程(32)中, 例如在 $\varepsilon = 0.1, 0 \leq x \leq 1$ 时, 一个类孤波模拟精确解 $u(x)$ 曲线(实线)和对应的零次、一次近似解 $u_0(x)$ 、 $u_1(x)$ 的模拟曲线(虚线)见图3所示. 从图3的模拟曲线的表示也可以看出, 由本文采用的修改的广义泛函变分迭代方法得到的近似解, 能够逐渐地逼近方程的类孤波的精确解.

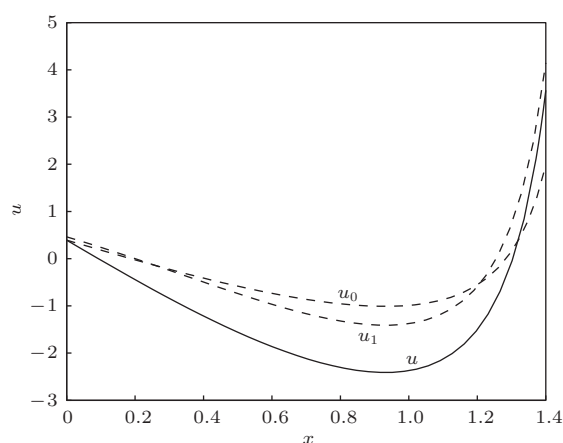


图3 类孤波模拟精确解 $u(x)$ 曲线(实线)和零次、一次模拟近似解曲线(虚线)比较

用本文所述改进的广义泛函变分迭代方法, 从(34)式表示对应的零次近似类孤波出发, 同样可以依次得到对应的类孤波解的各次近似, 及其模拟曲线逼近图形.

6 量子等离子体近似解的物理意义简述

非均匀量子等离子体系统的动力学方程的近似解, 可以讨论该系统电势的冲击解、爆炸解和旋涡解等. 分析电势的冲击波的幅度和爆炸波的宽度讨论密度与漂移速度的变化关系等. 从而可了解静电势随时空的变化稳定性等物理性态.

7 结论

非均匀量子等离子扰动系统出自于复杂的自然现象. 为了研究非线性孤子较复杂的模型, 我们有时需要用近似方法去求解它. 本文所用改进的泛函变分迭代方法就是一个简单而有效的方法. 这种方法不同于一般用数值方法而得到的模拟解. 用本文近似方法得到的近似解析解, 还可以继续进行解析运算. 因此由得到的近似解还可继续进行微分、

积分等解析运算, 从而可继续研究类孤波解相关物理量的更深入的物理性态.

参考文献

- [1] Jung Y D 2001 *Phys. Plasmas* **8** 3842
- [2] Kremp D, Bornath T, Bonitz M, Schlanges M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 4725
- [3] Shukla P K, Ali S 2005 *Phys. Plasmas* **12** 114502
- [4] Tang X Y, Shukla P K 2007 *J. Phys. A Math. Theor.* **40** 5921
- [5] Tang X Y, Shukla P K 2008 *Phys. Plasmas* **15** 023702
- [6] Zhou T J, Yu R, Li H, Wang B 2008 *Journal of Climate* **21** 3833
- [7] Zhou T J, Wu B, Wang B 2009 *Journal of Climate* **22** 1159
- [8] Zhou T J, Zou L 2009 *Journal of Climate* **22** 6009
- [9] Zhou T J, Zhang J 2011 *Journal of Climate* **24** 1053
- [10] Zhou T J, Wu B, Scaife A A, Bronnimann S 2009 *Climate Dynamics* **33** 1051
- [11] Zhou T J, Yu R, Zhang J, Drange H 2009 *Journal of Climate* **22** 2199
- [12] Haque Q, Mahmood S 2008 *Phys. Plasmas* **15** 034501
- [13] Masood W 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1455
- [14] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)
- [15] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
- [16] D'Aprile T, Pistoia A 2010 *Diff Eqs* **248** 556
- [17] Faye L, Frenod E, Seck D 2011 *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **29** 1001
- [18] Sirendaoerji, Tangetusang 2005 *Chin. Phys.* **15** 1143
- [19] Mo J Q 2009 *Science in China G* **39** 568
- [20] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
- [21] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6701 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2010 物理学报 **59** 6701]
- [22] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090203 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 090203]
- [23] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
- [24] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205
- [25] Masood W, Karim S, Shah H A, Siddiq M 2009 *Phys. Plasmas* **16** 042108
- [26] Mao J J, Yang J R, Li C Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020206 (in Chinese) [毛杰健, 杨建荣, 李超英 2012 物理学报 **61** 020206]
- [27] He J H 2002 *Aproximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程与科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]
- [28] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York, CRC Press)

Approximate analytic solution of solitary-like waves in a class of quantum plasma^{*}

Han Xiang-Lin^{1)†} Chen Xian-Feng²⁾ Mo Jia-Qi^{3)‡}

1) (*Departmentt of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China*)

2) (*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China*)

3) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241001, China*)

(Received 11 September 2013; revised manuscript received 14 October 2013)

Abstract

The quantum plasma system in a class of environment is discussed. A nonlinear dynamic disturbed equation is studied. Using the revised generalized functional variational iteration method, the solitary-like wave approximate analytic solution of corresponding system is obtained.

Keywords: plasma, solitary-like wave, approximate method

PACS: 02.30.Sa

DOI: 10.7498/aps.63.030202

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11202106, 11371248), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LY13A010005).

[†] Corresponding author. E-mail: xlhan@hutc.zj.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn