

## 基于可调负载重分配的无标度网络连锁效应分析\*

段东立<sup>1)†</sup> 武小悦<sup>2)</sup>

1)(西安武警工程大学装备工程学院, 西安 710008)

2)(国防科技大学信息系统与管理学院管理系, 长沙 410073)

(2013年9月27日收到; 2013年10月28日收到修改稿)

为了深入研究复杂网络抵制连锁故障的全局鲁棒性, 针对现实网络上的负载重分配规则常常是介于全局分配与最近邻分配、均匀分配与非均匀分配的特点, 围绕负荷这一影响连锁故障发生和传播最重要的物理量以及节点崩溃后的动力学过程, 提出了一种可调负载重分配范围与负载重分配异质性的复杂网络连锁故障模型, 并分析了该模型在无标度网络上的连锁故障条件. 数值模拟获得了复杂网络抵制连锁故障的鲁棒性与模型中参数的关系. 此外, 基于网络负载分配规则的分析以及理论解析的推导, 验证了数值模拟结论, 也证明在最近邻与全局分配两种规则下都存在负载分配均匀性参数等于初始负荷强度参数即  $\beta = \tau$  使得网络抵御连锁故障的能力最强.

**关键词:** 复杂网络, 连锁故障, 负载重分配, 鲁棒性

**PACS:** 05.10.-a, 64.60.aq, 89.75.-k, 89.75.Hc

**DOI:** 10.7498/aps.63.030501

## 1 引言

本世纪以来, 复杂网络理论研究的热潮吸引了来自社会学、物理学、生物学和工程应用等诸多领域学者的关注和研究兴趣, 使得网络科学迎来了蓬勃的发展. 网络科学对未知领域的探索, 特别像关键基础设施网络、基因调控网络、蛋白质作用网络、社会关系网络这种复杂巨系统, 为人们提供了一种描述系统组元和组元之间关系的工具, 通过对网络动力学模型及其机理的探索来加强对复杂系统认识的深度, 继而掌握复杂系统的控制方法, 最终能够控制复杂系统朝着人们期望的方向发展<sup>[1]</sup>.

本文主要关注于复杂网络基于过载机理的连锁效应动力学, 分析过载机理下的连锁效应与网络控制策略. 事实上, 大多数网络会承载一定的物质、能量与信息等负载, 必须考虑负载对网络动力学特征的影响. 一般来说, 节点(边)承受负载的能力是有限的, 称之为节点(边)的容量; 另一方面, 网络上的负载是动态变化的, 特别是当网络结构发生

改变, 如节点的加入、移除, 网络上的负载将重新分配. 有限的负载容量和负载的重新分配使得复杂网络的抗毁性问题变得更加复杂: 一个节点(边)的失效导致网络负载的重新分配, 负载的重新分配使得某些节点(边)上的负载超过其容量而失效, 这又可能触发其他节点(边)的“连锁失效”<sup>[2]</sup>. 连锁故障普遍发生在各种关键生命线系统网络中, 大规模的连锁故障一旦发生, 往往具有极强的破坏力和影响力<sup>[3-5]</sup>, 例如2008年初我国南方电力网络的崩溃、北美电力网大崩溃事故、因特网阻塞以及本世纪初爆发的欧洲经济危机等都可以从某种程度上认为是因连锁故障所导致的灾难. 因此, 网络连锁故障理论的研究就显得非常重要且具有现实意义.

近年来, 基于过载机理的复杂网络连锁故障鲁棒性研究受到国内外多个领域的广泛关注<sup>[6-11]</sup>. 过载机理的复杂网络连锁故障模型主要包括三个因素: 负载模型、容量模型与负载重分配策略, 其中负载重分配策略是关键. 2002年, Motter与Lai<sup>[8]</sup>将过载机理连锁故障引入复杂网络的研究, 提出了ML模型, 假设每个节点的容量正比于其初始负

\* 国家自然科学基金(批准号: 70771111)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [mineduan@163.com](mailto:mineduan@163.com)

载, 之后, Wang 和 Kim 在 ML 模型的基础上<sup>[12]</sup>, 提出为初始负载较高的节点分配更多的容量, Li 和 Wang<sup>[13]</sup> 认为节点的容量不仅与其初始负载相关, 还与节点本身的能力(度)相关, 这些模型的负载重分配机理基于介数的概念, 即新网络的介数为网络的更新负载, 这种机理的动力学过程只能通过大量的数值仿真研究; 为了得到一个可以解析求解的模型, Dobson 与 Carreras 假设网络中部分节点失效后所有节点的负载增量相同且独立于失效节点<sup>[14]</sup>, Kim 在 FBM 模型研究中<sup>[15]</sup> 则假设完好节点的负载增量依赖于失效节点的负载并且被等分到剩余完好节点, Jorg 提出了随机负载重分配策略, 该策略依赖于失效节点的负载且其分配是非均匀的<sup>[16]</sup>, 但具有一定的随机性; 就负载重分配的范围, 与上述全局重分配机理不同, Wang 和 Chen 提出了一个基于最近邻负载重分配模型<sup>[17]</sup>, 节点失效后其负载由其最近邻承载, Wu 在该模型基础上考察了初始负荷强度参数与网络级联失效的关系<sup>[18]</sup>. Wang 依据该最近邻择优重分配规则提出了一个局域择优重分配负载模型<sup>[19]</sup>, 并在文献[20, 21]中定义节点初始负荷为节点度数的函数以及节点度数与邻居节点度数的函数, 分析了网络抵御连锁故障鲁棒性与负荷重分配均匀性参数、初始负荷模型的关系, 还将这些模型应用到美国西部电网连锁效应的分析中<sup>[22, 23]</sup>, 取得了较好的结果. 在最近邻重分配负荷的规则下, 文献[24]提出了一个负荷容量优化模型, 并分析了中国铁路网、航空网与上海地铁网抵御连锁故障的能力.

局域负荷重新分配的物理机理主要是基于交通网络中拥堵后交通流的分流机理与 Internet 网络中路由器被攻击后的数据路由规则, 这种机理的基本特征是网络中所有节点只掌握其邻居接点的信息; 而基于全局负荷重新分配的网络连锁故障模型, 负载重分配机理主要是基于介数的概念, 假设网络中所有信息的传输都是基于最短路径, 且节点失效后网络负载以非连续的方式瞬时调整到适应新网络的状态(即新网络的介数为网络的更新负载), 这种机理的主要特征是网络中所有节点都可以瞬时掌握网络的全局信息. 本文所提可调负载重分配模型的物理机理主要是依据现实世界的复杂系统中, 个体不仅具备掌握其最近邻个体信息的能力, 而且通过一定的手段和方式在一定程度上会掌握部分或全局的信息. 例如, 交通网络中发生交通拥堵后, 各个路口交通警察对道路交通的指挥以及各类交通实时广播传达给司机的交通信息等都会在

一定程度上对交通流的分配产生影响, 从而会使本来打算通过拥堵路口的交通流重新选择合适的路径. 另外, 在 Internet 网络中也存在类似的情况, 某个关键路由器的失效, 会通过控制系统调整本欲通过其路由的数据重新选择路由器, 而重新选择的路由器可能不仅仅是其邻居节点. 为了扩展现有连锁故障模型的负载重分配策略, 本文提出一个可调负载重分配复杂网络连锁故障模型, 该模型可以有效调节负载重分配范围与均匀性, 并利于分析网络抵御连锁故障鲁棒性与网络初始负荷强度参数、网络拓扑参数、过载负荷分配均匀性参数与范围参数的关系.

## 2 负载重分配模型

### 2.1 负载重分配模型

如图 1 所示, 节点  $i$  失效后, 原本打算通过其的负载(交通流、信息流等)会重新选择路径, 节点  $i$  的负载被网络中部分或全部完好节点分担. 假设失效节点的负载以一定的规则分配给网络中的部分或全部完好节点, 这些局部事件会导致网络中完好节点负载发生一次更新.

$$F_j \rightarrow F'_j = F_j + \Delta F_j. \quad (1)$$

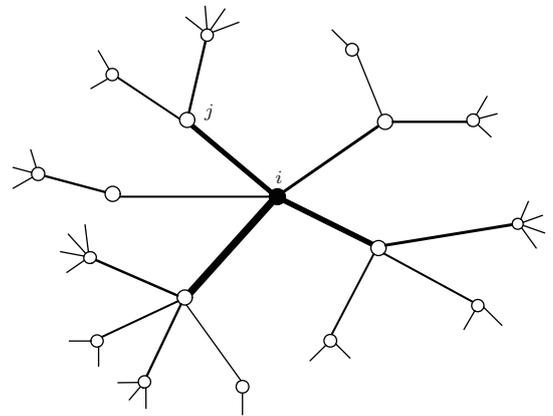


图 1 负载重分配示意图

假设完好节点分配的负载增量  $\Delta F_j$  与失效节点的负载成正比, 其比例系数为  $F(l_{ij}, \theta, k_j, \beta)$

$$\Delta F_j = F_i \cdot F(l_{ij}, \theta, k_j, \beta), \quad (2)$$

式中,  $l_{ij}$  为失效节点  $i$  与完好节点  $j$  的距离,  $k_j$  表示网络节点的度数,  $\theta$  和  $\beta$  是负载重分配策略参数, 分别用来控制崩溃节点负荷的分配范围与均匀性. 节点  $i$  失效后, 完好节点  $j$  在分担其负载时的权重为

$l_{ij}$  与  $k_j$  的函数即  $\eta_{ij} = cl_{ij}^{-\theta} k_j^\beta$ ,  $c$  是权重系数, 由此, 失效节点  $i$  的负载分配到完好节点  $j$  的比例为

$$\begin{aligned} & F(l_{ij}, \theta, k_j, \beta) \\ &= \frac{cl_{ij}^{-\theta} k_j^\beta}{\sum_{m \in \Omega_i} cl_{im}^{-\theta} k_m^\beta} \\ &= \frac{l_{ij}^{-\theta} k_j^\beta}{\sum_{m \in \Omega_i} l_{im}^{-\theta} k_m^\beta}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\Omega_i$  表示除崩溃节点  $i$  以外所有节点的集合,  $\theta \in [0, \infty)$ ,  $\beta \in [0, \infty)$ . 由 (3) 式,  $\theta \rightarrow 0$  时, 该重分配规则为全局择优重分配规则, 且  $\beta = 0$  时为全局均匀共享负载;  $\theta \rightarrow \infty$  时, 该重分配规则为最近邻择优重分配规则, 且  $\beta = 0$  时为最近邻均匀共享负载;  $\beta \neq 0$  时为非均匀分配规则, 且  $\beta > 0$  时重分配偏好于度大的节点.

## 2.2 初始负荷

假设网络节点  $i$  的初始负荷  $F_i$  与节点本身的度数  $k_i$  相关, 将初始负荷定义为

$$F_i = \rho k_i^\tau, \quad (4)$$

式中,  $\rho$  和  $\tau$  是可调参数, 控制节点初始负荷的强度. 这个假设很好理解, 在现实世界网络中, 例如, 交通网中交通枢纽即度大的节点承载的车流量必然比较多, Internet 网络中大量的信息流需要关键的中心路由器来路由.

## 2.3 容量模型

在实际网络中, 每个节点处理负荷的能力通常受到技术与经济因素的影响. 本文假设网络中节点的容量与初始负荷成正比

$$C_i = (1 + \alpha)F_i, \quad (5)$$

式中,  $F_i$  为初始负载;  $\alpha$  为网络的容限系数, 表示节点处理额外负荷的能力. 将 (3) 式代入 (1) 式、(2) 式可得到节点  $i$  失效后网络中其他完好节点的负载  $F'_j$ , 重新判断  $F'_j$  与  $C_j$  的关系, 若  $F'_j > C_j$  则节点  $j$  触发新一轮的负载重分配, 若  $F'_j < C_j$  则节点  $j$  在此时间步不失效, 直至整个网络中所有节点的负载不超过其本身的容量, 连锁故障过程结束.

## 2.4 度量参数

为更好地探讨网络上的连锁故障现象, 初始仅

仅移除一个节点, 并在连锁故障结束后计算网络中失效节点的个数  $CF_i$ , 很显然,  $0 \leq CF_i \leq (N - 1)$ . 采用失效节点的归一化指标量化整个网络的鲁棒性<sup>[19-23]</sup>

$$CFN = \frac{1}{N(N - 1)} \sum_{i=1}^N CF_i. \quad (6)$$

另外,  $\alpha$  为网络的容限系数, 表示节点处理额外负荷的能力, 当  $\alpha$  很大时, 网络中每个节点消化额外负荷的能力都很强, 即任一节点的失效都不能够触发连锁故障的发生, 但是受经济性与技术性因素的影响,  $\alpha$  不可能任意大, 所以, 也可以用临界值  $\alpha_c$  表征网络抵抗连锁故障的能力.  $\alpha_c$  值越小网络抵制连锁故障的鲁棒性越强, 当  $\alpha > \alpha_c$  时, 移除网络中的任一节点都不会触发连锁效应, 而当  $\alpha < \alpha_c$  时由于网络中节点处理额外负荷的能力有限, 网络中的部分节点的故障会触发连锁效应, 导致整个网络或部分网络失效.

## 3 数值仿真

### 3.1 网络模型

大量实证研究表明, Internet 网络、WWW 网络、电力网、交通网以及新陈代谢网络等都具有无标度特性, 因此本文主要采用无标度网络模型来研究网络上的连锁故障. Barabási 和 Albert<sup>[25]</sup> 提出了一个无标度网络模型 (BA 模型), 由于考虑到了许多实际网络的生长与优先连接的特性, 所以, 它具有更好的普适性和代表性. 因此, 采用 BA 网络作为研究其上连锁故障现象的拓扑架构. BA 无标度网络构造算法如下:

1) 增长: 从一个具有  $m_0$  个节点的网络开始, 每次引入一个新的节点, 并且连到  $m$  个已存在的节点上, 这里  $m \leq m_0$ ; 2) 优先连接: 一个新节点与一个已经存在的节点  $i$  相连接的概率  $p_i$  与节点  $i$  的度  $k_i$  之间满足  $p_i = k_i / \sum_j k_j$ .

依据上述机理生成 BA 网络研究网络负荷分配参数对 CFN 与  $\alpha_c$  的影响时, 参数值分别为  $N = 100$ ,  $m = 2 (\langle k \rangle = 4)$ ,  $m_0 = 2$ , 并且每一个结果都是在 50 个网络上数值模拟连锁故障的平均结果. 研究网络拓扑结构对 CFN 与  $\alpha_c$  的影响时, 根据 BA 网络中  $\langle k \rangle = 2m$  生成具有不同平均度数与规模的网络, 结果都是在 50 个网络上数值模拟连锁故障的平均结果.

### 3.2 最近邻择优重分规则 ( $\theta \rightarrow \infty$ )

根据  $\theta$  的取值, 分别考虑三种情形: 1)  $\theta \rightarrow \infty$  时的最近邻择优重分规则; 2)  $\theta \rightarrow 0$  时的全局择优重分规则; 3)  $0 < \theta < \infty$  时的中间情形. 分别研究三种情形下的相变点  $\alpha_c$  与初始负荷强度参数  $\tau$ 、负荷分配均匀性参数  $\beta$ 、负荷分配范围参数  $\theta$  以及网络拓扑参数的关联性. 而  $\alpha_c$  值的获取主要取决于指标 CFN, 因此, 首先探讨 BA 网络 CFN 指标与上述参数的关系.

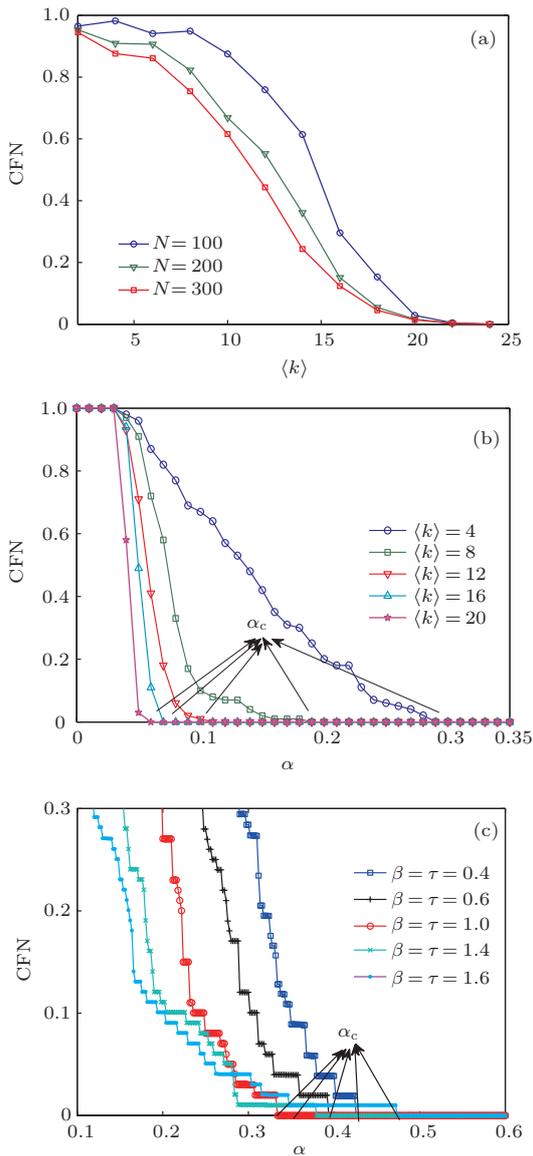


图2 最近邻择优分配规则下 CFN 与网络拓扑参数的关系 (a) CFN vs  $\langle k \rangle$  ( $\beta = \tau = 1$ ); (b) CFN vs  $\alpha$  ( $\beta = \tau = 1$ ); (c) CFN vs  $\alpha$  ( $\beta = \tau$ )

图2描绘了网络拓扑参数与容量系数所导致的网络故障节点的规模, 即 CFN. 很明显, 在最近邻承担失效节点负载的规则下随着网络规模与平

均度数的增加网络抵御连锁故障的能力会逐渐增强, 这也是目前网络向大规模化和互联化发展的一个主要原因. 从图2(b)可以看出, 随着平均度数的增大, 使  $CFN = 0$  的  $\alpha$  值逐渐减小, 即相变点  $\alpha_c$  逐渐减小. 从图2(c)CFN 的数值仿真结果可以看出, 在  $\beta = \tau$  的情况下, 使  $CFN = 0$  的首个值为  $\beta = \tau = 1$ , 即这种情形下  $\beta = \tau = 1$  使得网络抵御连锁故障的能力最强.

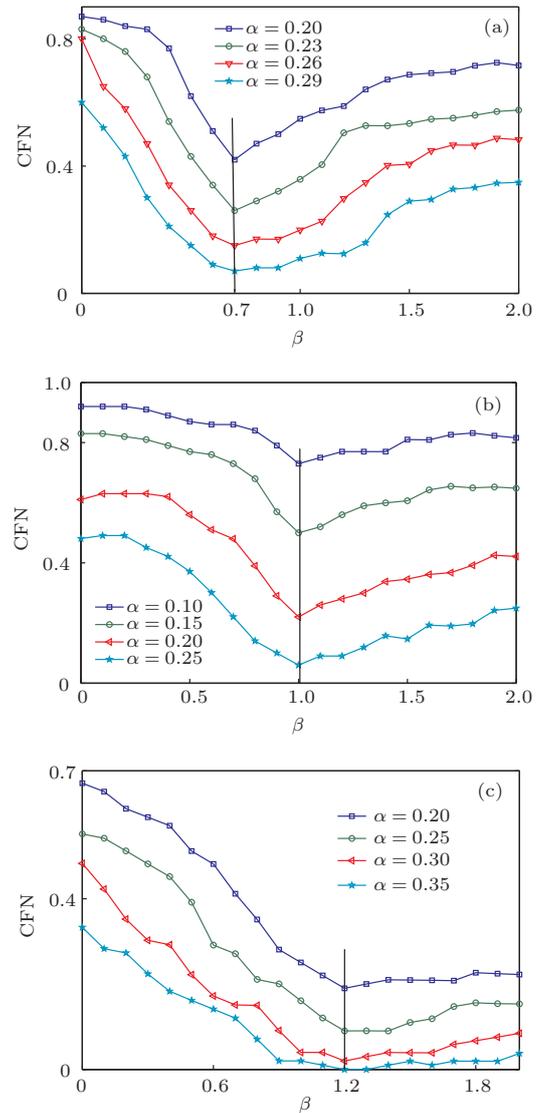


图3 最近邻择优分配规则下 CFN 与负荷分配参数的关系 (a) CFN vs  $\beta$  ( $\tau = 0.7$ ); (b) CFN vs  $\beta$  ( $\tau = 1$ ); (c) CFN vs  $\beta$  ( $\tau = 1.2$ )

图3主要给出了初始负荷强度参数与负荷分配均匀性系数所导致的网络故障节点的规模, 即 CFN. 当参数  $\tau$  固定时, 对比不同  $\alpha$  值下的 CFN, 在  $\beta = \tau$  情况下, 网络达到了最强的鲁棒性. 由于相变点  $\alpha_c$  与 CFN 之间的关联性, 很自然的一个问题是:  $\beta = \tau$  是不是网络抵制相继故障的最优值?

本文第四节将给出证明及仿真结果与解析结果的比较.

### 3.3 全局择优重分规则 ( $\theta \rightarrow 0$ )

$\theta \rightarrow 0$ 时, 失效节点的负载将会分配给网络中的所有完好节点. 图4给出了CFN指标与网络拓扑参数、负载分配参数及容量系数关系的数值模拟结果.

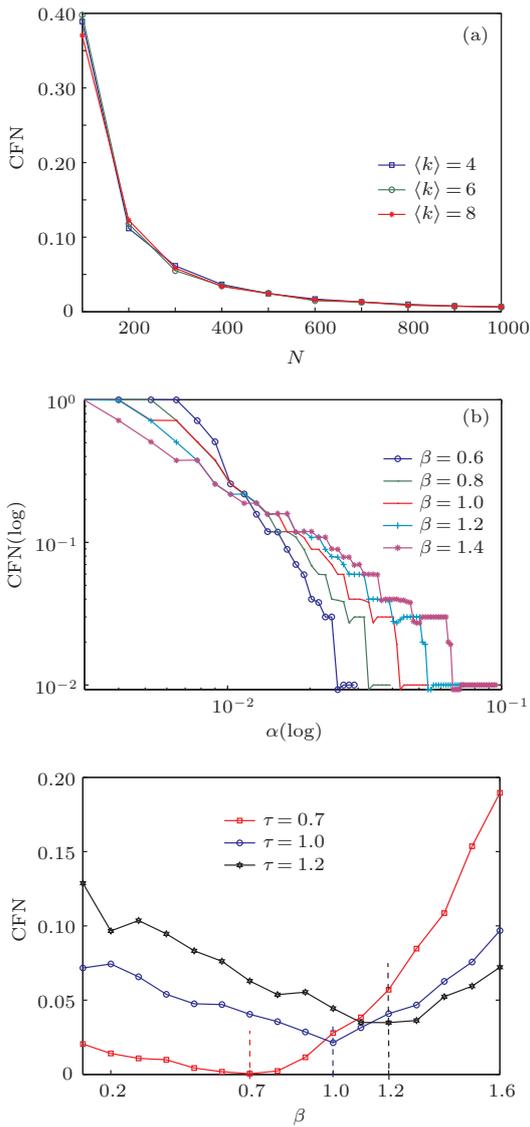


图4 全局择优重分规则下的数值模拟结果 (a) CFN vs  $N$  ( $\beta = \tau = 1$ ); (b) CFN vs  $\alpha$  ( $\beta = \tau$ ); (c) CFN vs  $\beta$  ( $\beta = \tau$ )

从图4(a)可以看出, 在全局分配规则下, CFN指标与网络的平均度数无关. 这种无关性是否也存在于 $\alpha_c$ 与 $\langle k \rangle$ 之间? 本文第4.2节会解析证明这种无关性. 图4(b)中为了使 $\alpha$ 较小时的情形便于观察横轴与纵轴都取了对数, 可以看出,  $\beta = \tau$ 时总是

存在相变点 $\alpha_c$ , 且随着 $\beta$ 增大 $\alpha_c$ 逐渐增大. 图4(c)中的情形说明,  $\beta = \tau$ 使网络达到最强鲁棒性的情形也存在于全局重分规则中.

### 3.4 全局分配与最近邻分配之间的情形 ( $0 < \theta < \infty$ )

$0 < \theta < \infty$ 时, 负载不仅分配给失效节点的邻居节点, 也会将一部分负荷分配到其次近邻或者距离失效节点更远的节点. 图5给出了这种情形下CFN指标与负载分配均匀性参数、分配范围参数及容量系数关系的数值结果.

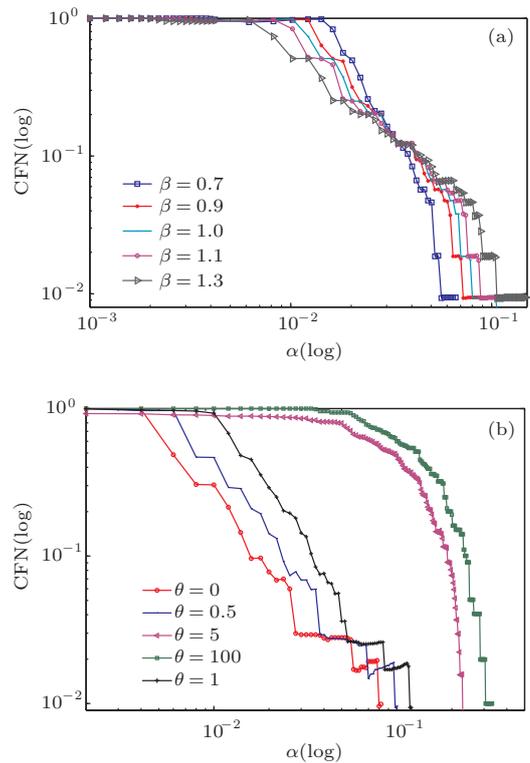


图5 全局分配与最近邻分配之间情形的数值模拟结果 (a) CFN vs  $\alpha$  ( $\theta = 1$ ); (b) CFN vs  $\alpha$  ( $\theta$ )

为了使 $\alpha$ 较小时的情形便于观察坐标轴分别取了对数. 从图5(a)可以看出,  $\theta = 1$ 时网络的CFN指标仍然与负荷分配的均匀性参数相关, 各 $\beta = \tau$ 的情形下总是存在相变点 $\alpha_c$ , 且 $\alpha_c$ 随着 $\beta$ 的增大逐渐增大. 从图5(b)可以很明显的看出, 随着 $\theta$ 的增大即随着失效节点负载分配范围的减小, 网络的相变点 $\alpha_c$ 逐渐增大.

## 4 理论分析

为更好地理解网络模型中所观察的连锁故障现象以及验证数值仿真结论, 根据可调负载重分配

模型, 对不同负载重分策略下的容限系数临界值  $\alpha_c$  进行分析. 基于模型中崩溃节点负荷的重新分配原则及节点能力的限制, 为避免连锁故障的发生, 下面的条件应该被满足:

$$\begin{aligned} F_j + \Delta F_j &< C_j \\ \Rightarrow F_j + F_i \frac{l_{ij}^{-\theta} k_j^\beta}{\sum_{m \in \Omega} l_{im}^{-\theta} k_m^\beta} &< (1 + \alpha) F_j \\ \Rightarrow \frac{l_{ij}^{-\theta} k_j^{\beta-\tau} k_i^\tau}{\sum_{m \in \Omega} l_{im}^{-\theta} k_m^\beta} &< \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

#### 4.1 最近邻择优分配负载规则

最近邻择优分配负载, 即  $\theta \rightarrow +\infty$ , 此时, 只有失效节点的最近邻节点能分担失效节点的负载, 因此, (7) 式可简化为

$$\frac{k_j^{\beta-\tau} k_i^\tau}{\sum_{m \in \Gamma_i} k_m^\beta} < \alpha, \quad (8)$$

式中,  $\Gamma_i$  为崩溃节点  $i$  的邻居节点集合.

依据网络的度及条件概率公式, 可知

$$\sum_{m \in \Gamma_i} k_m^\beta = \sum_{k'=k_{\min}}^{k_{\max}} k_i P(k'|k_i) k'^\beta, \quad (9)$$

式中,  $P(k'|k_i)$  表示度为  $k_i$  节点的邻居节点度为  $k'$  的条件概率, 在度度无关的网络中,  $P(k'|k_i) = k' P(k') / \langle k \rangle$ , 所以, (9) 式可以表示为

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \Gamma_i} k_m^\beta &= \frac{k_i}{\langle k \rangle} \sum_{k'=k_{\min}}^{k_{\max}} P(k') k'^{\beta+1} \\ &= \frac{k_i \langle k^{\beta+1} \rangle}{\langle k \rangle}. \end{aligned} \quad (10)$$

由此, (8) 式可转化为

$$\frac{k_j^{\beta-\tau} k_i^{\tau-1} \langle k \rangle}{\langle k^{\beta+1} \rangle} < \alpha. \quad (11)$$

分析该不等式, 容限系数临界值  $\alpha_c$  可以分别考虑为以下几种情况:

$$\alpha_c = \begin{cases} \frac{k_{\max}^{\beta-1} \langle k \rangle}{\langle k^{\beta+1} \rangle}, & \beta \geq \tau \geq 1, \\ \frac{k_{\min}^{\beta-1} \langle k \rangle}{\langle k^{\beta+1} \rangle}, & \beta < \tau < 1, \\ \frac{k_{\max}^{\beta-\tau} k_{\min}^{\tau-1} \langle k \rangle}{\langle k^{\beta+1} \rangle}, & \beta \geq \tau, \tau < 1, \\ \frac{k_{\min}^{\beta-\tau} k_{\max}^{\tau-1} \langle k \rangle}{\langle k^{\beta+1} \rangle}, & \beta < \tau, \tau \geq 1, \end{cases} \quad (12)$$

这里的  $k_{\min}$  和  $k_{\max}$  分别表示网络中节点的最大度和最小度. 在模型中关心的是, 参数  $\beta$  与  $\tau$  取何值时, 网络的鲁棒性最强, 即  $\alpha_c$  的值最小. 根据 BA 模型的演化机理, 它的度分布近似为  $P(k) = 2k_{\min}^2 k^{-3}$ . 因此,

$$\begin{aligned} \langle k^{\beta+1} \rangle &= \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} 2k_{\min}^2 k^{-3} k^{\beta+1} dk \\ &= \begin{cases} 2k_{\min}^2 (\ln k_{\max} - \ln k_{\min}), & \beta = 1, \\ \frac{2k_{\min}^2}{\beta-1} (k_{\max}^{\beta-1} - k_{\min}^{\beta-1}), & \beta \neq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

根据  $\int_{k_{\min}}^{\infty} 2k_{\min}^2 k^{-3} dk = 1/N$ , 可得到网络最大度与最小度的关系为  $k_{\max} = k_{\min} \sqrt{N}$ , 且 BA 网络中  $\langle k \rangle = 2k_{\min}$ , 所以 (13) 式可简化为

$$\langle k^{\beta+1} \rangle = \begin{cases} \langle k \rangle^2 \ln N / 4, & \beta = 1, \\ \frac{\langle k \rangle^{\beta+1} (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}{2^\beta (\beta-1)}, & \beta \neq 1. \end{cases} \quad (14)$$

为了便于分析初始负荷强度参数  $\tau$ 、负荷分配均匀性参数  $\beta$  与  $\alpha_c$  值的关系及其影响方式, 根据 (12) 式考虑  $\tau = 1$ ,  $\tau > 1$  与  $\tau < 1$  三种情况.

1)  $\tau = 1$  时, 根据 BA 网络的度分布及 (14) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \begin{cases} k_{\max}^{\beta-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta > 1, \\ \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle, & \beta = 1, \\ k_{\min}^{\beta-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta < 1, \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha_c &= \begin{cases} \frac{2(\beta-1)N^{\frac{\beta-1}{2}}}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta > 1, \\ 4 / \langle k \rangle \ln N, & \beta = 1, \\ \frac{2(\beta-1)}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

分析上式可知:  $\beta < 1$  时,  $\frac{d\alpha_c}{d\beta} < 0$ ,  $\beta > 1$  时,  $\frac{d\alpha_c}{d\beta} > 0$ , 且根据洛必达法则则可以得出  $\lim_{1+} \alpha_c = \lim_{1-} \alpha_c = \alpha_c(\beta = 1)$ . 所以, 可以得出结论: 在网络初始负荷强度参数  $\tau = 1$  时, 最近邻分配原则的均匀性参数  $\beta = 1$  可以使得  $\alpha_c$  取得极小值.

2)  $\tau > 1$  时,

$$\alpha_c = \begin{cases} k_{\max}^{\beta-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta > \tau, \\ k_{\min}^{\beta-\tau} k_{\max}^{\tau-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta \leq \tau, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_c = \begin{cases} \frac{2(\beta-1)N^{\frac{\beta-1}{2}}}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta > \tau, \\ \frac{4N^{\frac{\tau-1}{2}}}{\langle k \rangle \ln N}, & \beta \leq \tau (\beta = 1), \\ \frac{2(\beta-1)N^{\frac{\tau-1}{2}}}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta \leq \tau (\beta \neq 1). \end{cases} \quad (16)$$

由上式, 首先判断  $\beta \leq \tau$  时  $\alpha_c$  是否连续, 可知

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \alpha_c (\tau > 1)$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{2(\beta-1)N^{\frac{\tau-1}{2}}}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}$$

$$= \frac{4N^{\frac{\tau-1}{2}}}{\langle k \rangle \ln N} = \alpha_c (\tau > 1, \beta = 1). \quad (17)$$

所以, 在  $\tau > 1, \beta < \tau$  时,  $\alpha_c$  对  $\beta$  连续. 且在  $\beta > \tau$  时,  $\frac{d\alpha_c}{d\beta} > 0, \beta < \tau$  时  $\frac{d\alpha_c}{d\beta} < 0$ . 由此可以得到结论: 在网络初始负荷强度参数  $\tau > 1$  时, 最近邻分配原则的均匀性参数  $\beta = \tau$  可以取得网络抵御连锁故障的最好鲁棒性.

3)  $\tau < 1$  时, 与  $\tau > 1$  时分析方法一致, 可以得到

$$\alpha_c = \begin{cases} k_{\min}^{\beta-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta > \tau, \\ k_{\max}^{\beta-\tau} k_{\min}^{\tau-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta \leq \tau, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_c = \begin{cases} \frac{2(\beta-1)N^{\frac{\beta-\tau}{2}}}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta > \tau (\beta \neq 1), \\ \frac{4N^{\frac{1-\tau}{2}}}{\langle k \rangle \ln N}, & \beta > \tau (\beta = 1), \\ \frac{2(\beta-1)}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta \leq \tau. \end{cases} \quad (18)$$

$\beta = 1$  处的连续性及  $\alpha_c$  对  $\beta$  的单调性与上述证明方法一致. 同样可以得到结论: 在  $\tau < 1$  时, 最近邻分配原则下  $\beta = \tau$  可以使得  $\alpha_c$  取得极小值.

图6分别给出了上述三种情况下, 最近邻分配规则  $\alpha_c$  的解析结果与仿真结果, 可以看出理论分析比较好地拟合了数值模拟的结果. 然而, 在平均度比较小时差异比较大, 这主要由两个方面的原因引起: 一方面, 在解析分析中存在很多近似分析; 另一方面, 则是由于网络模型生成机理的影响. 总

之, 理论解析验证了模拟结果, 在最近邻择优重分配规则下可以得出以下结论:

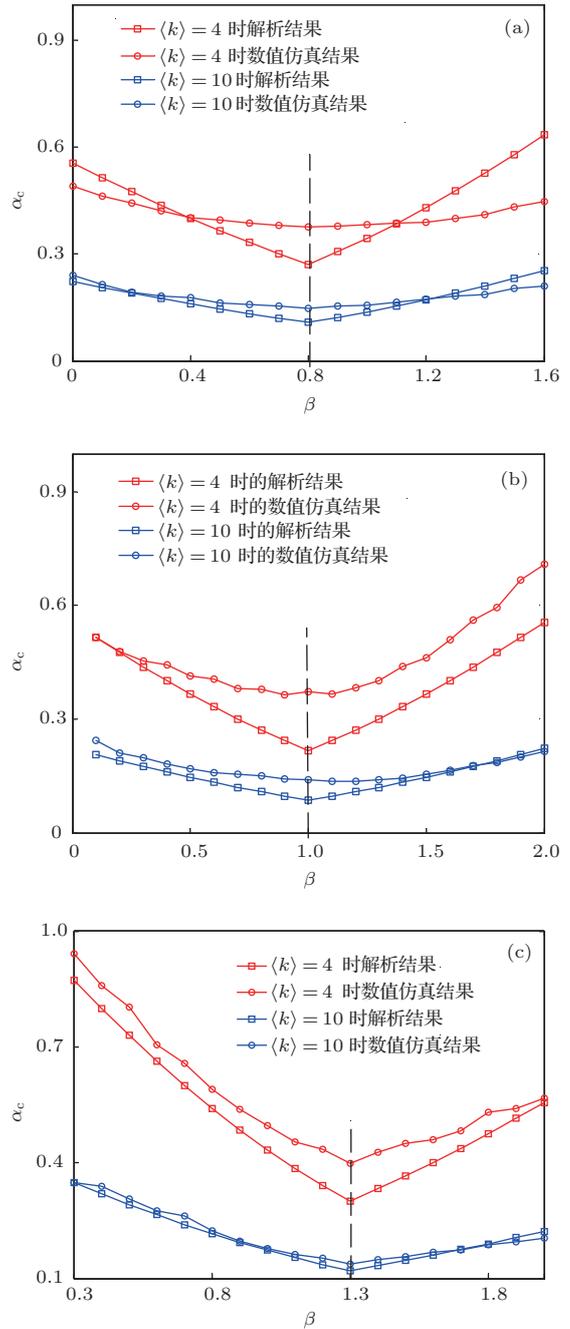


图6  $\tau = 0.8, 1.0, 1.3$  时, 最近邻分配规则下  $\alpha_c$  的解析结果与仿真结果 (a)  $\tau = 0.8$ ; (b)  $\tau = 1.0$ ; (c)  $\tau = 1.3$

1) 当初始负荷强度参数  $\tau$  固定,  $\beta = \tau$  可以使网络抵御连锁故障的鲁棒性最好. 且当  $\beta = \tau$  时, 根据 (12) 式可以得到

$$\alpha_c = \begin{cases} k_{\min}^{\beta-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta < 1, \\ k_{\max}^{\beta-1} \langle k \rangle / \langle k^{\beta+1} \rangle, & \beta \geq 1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_c = \begin{cases} \frac{2(\beta-1)N^{\frac{\beta-1}{2}}}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta > 1, \\ 4/\langle k \rangle \ln N, & \beta = 1, \\ \frac{2(\beta-1)}{\langle k \rangle (N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta < 1. \end{cases} \quad (19)$$

可以证明,  $\beta = \tau = 1$  时, 抵御网络上连锁故障的容限系数临界值  $\alpha_c$  是最小的, 即

$$\begin{aligned} \alpha_{c \min}^{\text{local}} &= \alpha_c(\beta = \tau = 1) \\ &= \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle \\ &= 4/\langle k \rangle \ln N. \end{aligned} \quad (20)$$

2) 最近邻重分配规则下, BA 网络的平均度数越大, BA 网络的规模越大, 网络抵御连锁故障的能力越强. 图 7 给出了无标度网络最近邻分配规则下  $\alpha_c$  与  $\alpha_{c \min}$  的解析结果.

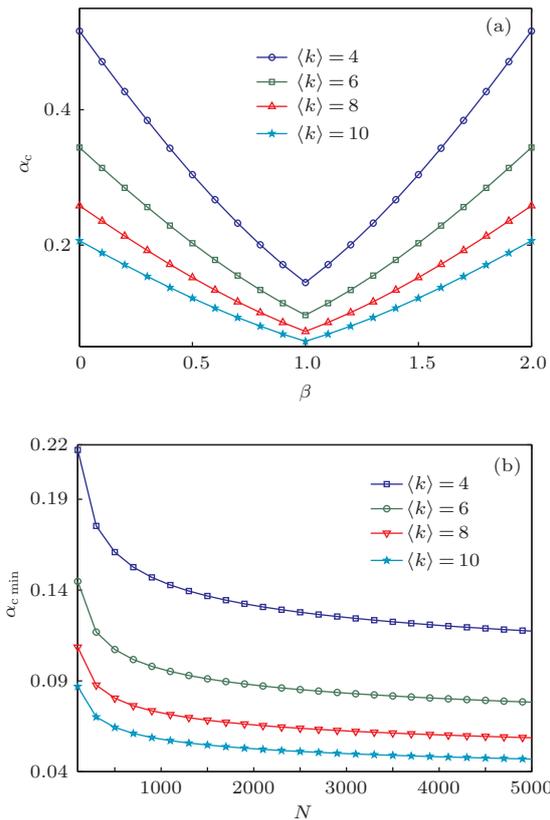


图 7 最近邻分配规则下  $\alpha_c$  与  $\alpha_{c \min}$  的解析结果 (a)  $\beta = \tau$  时, 网络的  $\alpha_c$ ; (b) 网络的  $\alpha_c$  与网络拓扑的关系

### 4.2 全局择优分配负载规则

重分配规则为全局分配即  $\theta \rightarrow 0$ , 此时网络中所有完好节点都可以分配到负载, 其分配的负载量

只与节点本身的度数有关, (7) 式可简化为

$$\frac{k_j^{\beta-\tau} k_i^\tau}{\sum_{m \in \Omega_i} k_m^\beta} < \alpha, \quad (21)$$

式中,  $\Omega_i$  表示除崩溃节点  $i$  以外的所有节点的集合. 依据网络的度及条件概率公式, 可知

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \Omega_i} k_m^\beta &= \sum_{k'=k_{\min}}^{k_{\max}} (N-1)P(k'|k_i)k'^\beta \\ &= \frac{N-1}{\langle k \rangle} \sum_{k'=k_{\min}}^{k_{\max}} P(k')k'^{\beta+1} \\ &= \frac{(N-1)\langle k^{\beta+1} \rangle}{\langle k \rangle}. \end{aligned} \quad (22)$$

由此, (21) 式可转化为

$$\frac{k_j^{\beta-\tau} k_i^\tau \langle k \rangle}{(N-1)\langle k^{\beta+1} \rangle} < \alpha. \quad (23)$$

分析该不等式, 容限系数临界值  $\alpha_c$  可以分别考虑为以下两种情况:

$$\alpha_c = \begin{cases} \frac{k_{\max}^\beta \langle k \rangle}{((N-1)\langle k^{\beta+1} \rangle)}, & \beta \geq \tau, \\ \frac{k_{\min}^{\beta-\tau} k_{\max}^\tau \langle k \rangle}{((N-1)\langle k^{\beta+1} \rangle)}, & \beta < \tau. \end{cases} \quad (24)$$

为了分析影响  $\alpha_c$  值大小的因素及其影响方式, 考虑 (24) 式的两种情形.

1)  $\beta \geq \tau$  时, 根据 BA 网络的度分布及 (14) 式, 可以得到

$$\alpha_c = \begin{cases} 2\sqrt{N}/((N-1)\ln N), & \beta = 1, \\ \frac{(\beta-1)(\sqrt{N})^\beta}{(N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)(N-1)}, & \beta \neq 1, \end{cases} \quad (25)$$

$\beta = 1$  处的连续性证明方法与最近邻分配时的证明方法一致, 且该情形下  $\frac{d\alpha_c}{d\beta} > 0$ , 即在  $\beta \geq \tau$  时, 随着网络均匀性系数的增大, 网络抵御连锁故障的能力逐渐降低.

2)  $\beta < \tau$  时, 与  $\beta \geq \tau$  时分析方法一致, 可以得到

$$\alpha_c = \begin{cases} \frac{2N^{\frac{\tau}{2}}}{(N-1)\ln N}, & \beta = 1, \\ \frac{N^{\frac{\tau}{2}}(\beta-1)}{(N-1)(N^{\frac{\beta-1}{2}} - 1)}, & \beta \neq 1. \end{cases} \quad (26)$$

由上式及 (25) 式, 全局择优分配负荷时, 容限系数的临界值与网络的平均度数无关. 且该情形下

$\frac{d\alpha_c}{d\beta} < 0$ , 即在  $\beta < \tau$  时, 随着网络均匀性系数的增大, 网络抵御连锁故障的能力逐渐增强.

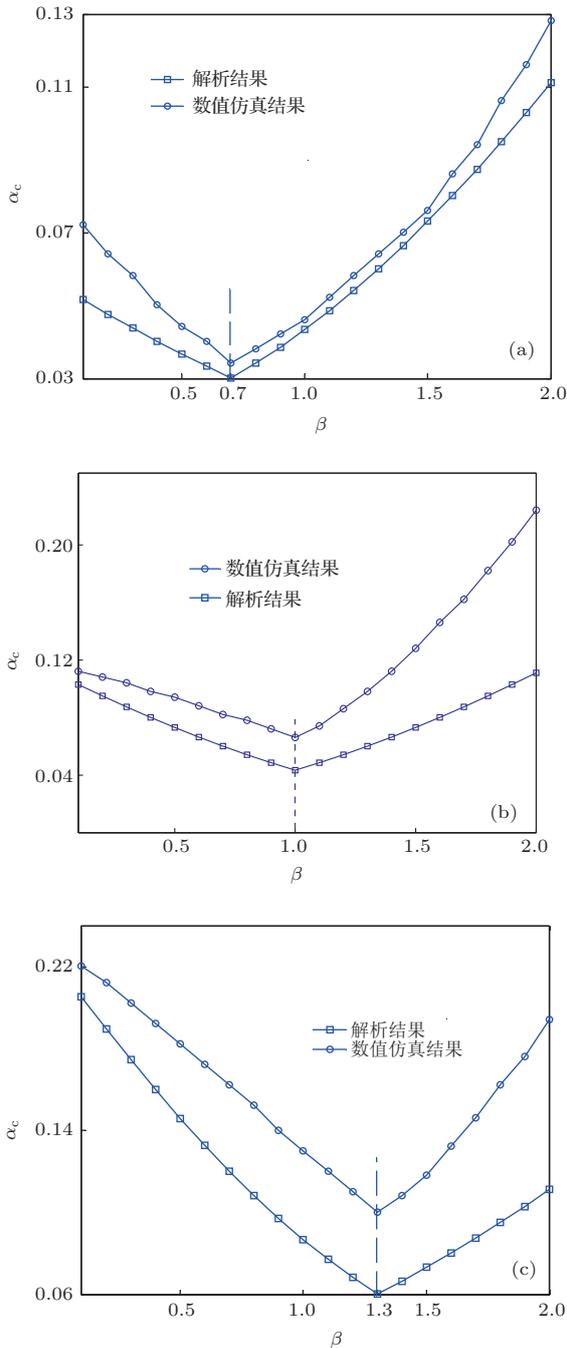


图8  $\tau = 0.7, 1.0, 1.3$ 时, 全局分配规则下  $\alpha_c$  的解析结果与仿真结果 (a)  $\tau = 0.7$ ; (b)  $\tau = 1.0$ ; (c)  $\tau = 1.3$ .

图8分别给出了  $\tau < 1$ ,  $\tau = 1$  与  $\tau > 1$  三种情况下, 全局分配规则  $\alpha_c$  的解析结果与仿真结果, 可以看出理论分析较好地反映了数值模拟结果的趋势. 在全局分配原则下, 综合上述两种情形, 可以得到如下结论:

1) 全局择优分配原则下BA网络规模越大, 网络抵抗连锁故障的能力越强, 且该规则下  $\alpha_c$  与网络的平均度数大小无关.

2) 若  $\beta > \tau$ ,  $\alpha_c$  仅由  $\beta$  与  $N$  决定, 且  $\alpha_c$  随着  $\beta$  增大而增大; 若  $\beta < \tau$  决定  $\alpha_c$  大小的因素还包括初始负荷强度参数  $\tau$ , 且  $\alpha_c$  随着  $\beta$  增大而减小; 当  $\beta = \tau$  时, 可以使得网络抵御连锁故障的能力最强.

3) 在全局分配原则下, 当  $\beta = \tau$  时, 根据(24)式可以得到

$$\alpha_c = \frac{k_{\max}^\beta \langle k \rangle}{(N-1) \langle k^{\beta+1} \rangle} = \begin{cases} 2\sqrt{N}/((N-1)\ln N), & \beta = 1, \\ \frac{N^{\frac{\beta}{2}}(\beta-1)}{(N-1)(N^{\frac{\beta-1}{2}}-1)}, & \beta \neq 1. \end{cases} \quad (27)$$

可以证明上式在  $\beta = 1$  处连续, 且  $\frac{d\alpha_c}{d\beta} > 0$ . 且  $\beta = \tau = 0$  时, 网络的容限系数临界值最小, 即

$$\alpha_{c\min}^{\text{global}} = \alpha_c(\beta = \tau = 0) = \frac{1}{(N-1)} > \frac{1}{N}. \quad (28)$$

该值的获取与网络的度分布无关, 仅与网络的规模有关. 图9给出了无标度网络全局择优分配规则下  $\alpha_c$  与  $\alpha_{c\min}$  的解析结果.

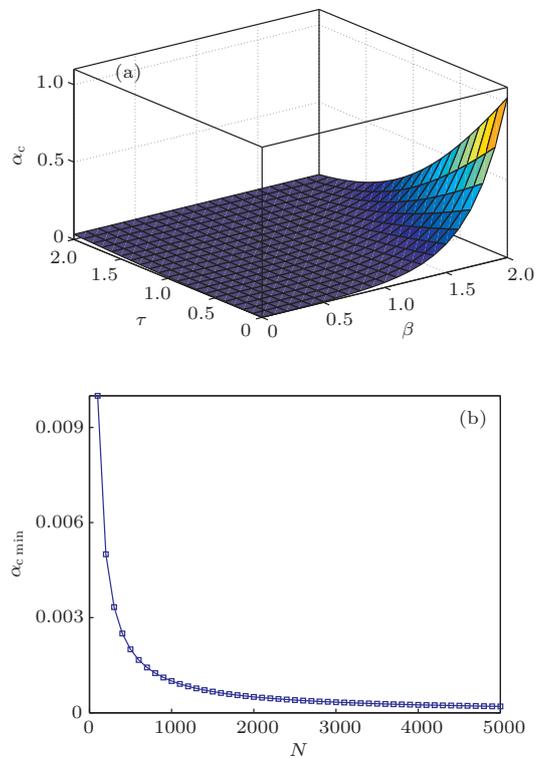


图9 全局分配规则下  $\alpha_c$  与  $\alpha_{c\min}$  的解析结果 (a)  $N = 1000$  时,  $\alpha_c$  vs  $(\beta, \tau)$ ; (b)  $\alpha_{c\min}$  与网络规模的关系

### 4.3 极端非均匀分配负载规则

$\beta \rightarrow \infty$  时, 由(1)—(4)式, 节点  $j$  的负荷增量为

$$\Delta F_j = F_i \cdot \frac{1}{\sum_{m \in \Omega_i} \frac{l_{im}^{-\theta} k_m^\beta}{l_{ij} k_j}} \quad (29)$$

根据上式, 当  $k_j = k_{\max}$ ,  $l_{ij} = l_{i,\min}$  时, 节点  $j$  几乎承担了失效节点的所有负荷. 这种极端非均匀分配负荷的情况普遍存在于现实网络中, 例如在电力网络中, 负荷点电力用户断电后, 在电网的重构过程中, 这些负荷的电力服务恢复经常是切换到电网中发电容量较大且离断电区域较近的电站中. 所以, 该分配规则下网络的最小容限系数临界值为

$$\alpha_{c \min} = \frac{F_i}{F_j} \geq \frac{F_{\max}}{F_{\min}} = \frac{\rho k_{\max}^\tau}{\rho k_{\min}^\tau} = \frac{\rho(\sqrt{N} k_{\min})^\tau}{\rho k_{\min}^\tau} = N^{\frac{\tau}{2}}. \quad (30)$$

## 5 结 论

在刻画现实世界复杂系统连锁故障及灾变机理的模型中, 过载机理得到了广泛、深入的研究和应用, 但是在其负载重分配策略中, 由于经典的方法和模型要么假设网络中个体具有瞬时、完全掌握网络全局信息的感知能力, 要么忽视了网络个体本身的灵活性, 常常陷入两个极端, 本文基于现实世界网络的负载重分配常常是介于全局分配与最近邻分配、均匀分配与极端非均匀分配之间的情况, 构建了一种带有可调负载重分配范围与可调负载重分配均匀性的复杂网络连锁故障模型, 并进行了数值仿真与解析分析.

由仿真及解析分析结果可以看出, 影响网络连锁故障抗毁性的影响因素既包括管理控制因素(负载重分配的范围、均匀性等), 也包括设计因素(网络规模、容限系数等). 从管理控制的角度讲, 在网络设计成本或能力一定的情形下, 合理的管理控制策略对网络发挥其设计性能、抵御连锁故障有着至关重要的作用. 只有充分理解、利用网络的设计因素, 然后赋予网络合适的管理控制策略, 才能积极有效地应对现实世界中的连锁故障.

本文的研究有利于更深入地揭示现实世界大型网络的连锁故障机理, 以及进一步探索过载机理

连锁故障的应对措施, 具有广阔的应用前景. 例如, 本文的可调负载模型在电网设计之初可以有力地指导电网网架规划和发电机组的容量设计, 在运行阶段利于电网的灾变风险分析并提出应对灾变及电网连锁故障的计划解列措施等; 在城市交通网络中, 本文的模型利于探索拥堵情况下个体的差异性导致的交通瘫痪问题, 并在宏观上提出针对不同交通流选择倾向性的拥堵控制措施. 需要指出的是, 基于过载机理的失效模式是一种确定性失效模式, 复杂系统中的个体常常具有一定的弹性, 找到一种刻画复杂系统过载机理下的概率失效模型, 将是后续研究的方向.

### 参考文献

- [1] Xiao Y D, Lao S Y, Hou L L, Bai L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 180201 (in Chinese)[肖延东, 老松杨, 侯绿林, 白亮 2013 物理学报 **62** 180201]
- [2] Xia Y X, Fan J, Hill D 2010 *Phys. A* **389** 1281
- [3] Sergey V B, Roni P, Gerald P, Eugene Stanley H, Shlomo H 2010 *Nature* **464** 08932
- [4] Wang J W 2012 *Phys. A* **391** 4004
- [5] Wang J W 2012 *Complexity* **17** 17
- [6] Crucitti P, Latora V, Marchiori M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 045104
- [7] Motter A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 098701
- [8] Motter A E, Lai Y C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 065102
- [9] Wu Z H, Fang H J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 3822
- [10] Zheng J F, Gao Z Y, Fu B B, Li F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4754
- [11] Hu K, Hu T, Tang Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080206
- [12] Wang B, Kim B J 2007 *Euro. Phys. Lett* **78** 48001
- [13] Li P, Wang B H, Sun H 2008 *Euro. Phys. J. B* **62**
- [14] Dobson I, Carreras B A, Lynch V E 2007 *Chaos* **2** 026103
- [15] Kim D H, Kim B J, Jeong H 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 025501
- [16] Jorg L, Jakob B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 031129
- [17] Wang W X, Chen G R 2008 *Phys. Rev. E* **77** 026101
- [18] Wu Z X, G. Peng, Wang W X, Chan S, Wong E E M 2008 *J. Stat. Mech.* P 05013
- [19] Wang J W, Rong L L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3714 (in Chinese)[王建伟, 荣莉莉 2009 物理学报 **58** 3714]
- [20] Wang J W, Rong L L 2009 *Phys. A* **388** 1289
- [21] Wang J W, Rong L L, Zhang L, Zhang Z Z 2008 *Phys. A* **387** 6671
- [22] Wang J W, Rong L L 2009 *Safety Sci.* **47** 1332
- [23] Wang J W, Rong L L 2011 *Safety Sci.* **49** 807
- [24] Chen S M, Pang S P, Zou X Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 058901
- [25] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509

# Cascading failure of scale-free networks based on a tunable load redistribution model\*

Duan Dong-Li<sup>1)†</sup> Wu Xiao-Yue<sup>2)</sup>

1) (College of Equipment Engineering, Engineering University of Armed Police, Xi'an 710008, China)

2) (College of Information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

( Received 27 September 2013; revised manuscript received 28 October 2013 )

## Abstract

To better explore the robustness against cascading failures on complex networks, according to the redistribution rule of the real networks always lie between global preferential rule and local preferential rule or between even shared rule and extremely heterogeneous rule. A new cascading model is proposed based on a tunable load redistribution model. It can tune the load redistribution range and the redistribution heterogeneity of extra load respectively by a redistribution range coefficient and a redistribution heterogeneity coefficient. With this model, we further investigate cascading failures on scale-free networks in terms of numerical simulation and theoretical analysis respectively. Numerical simulation and analytic results show that the model can achieve better robustness against cascading failure than the previous model by adjusting the redistribution range and heterogeneity.

**Keywords:** complex network, cascading failure, load redistribution, robustness

**PACS:** 05.10.-a, 64.60.aq, 89.75.-k, 89.75.Hc

**DOI:** [10.7498/aps.63.030501](https://doi.org/10.7498/aps.63.030501)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70771111).

† Corresponding author. E-mail: [mineduan@163.com](mailto:mineduan@163.com)