## 二维电磁逆散射问题的时域高斯-牛顿反演算法\*

## 刘广东 张开银

(阜阳师范学院, 物理与电子科学学院, 阜阳 236037)

(2013年8月23日收到; 2013年9月28日收到修改稿)

为了直接利用超宽带 (UWB) 时域测量数据,同时重建二维 (2D) 目标 (OI) 的介电常数和电导率,本文将频域高斯-牛顿反演 (GNI) 算法发展为时域形式. 迭代重建过程中,正问题由时域有限差分 (FDTD) 法求解,而逆问题的病态特性用自适应正则化技术抑制. 四类数值算例中,噪声影响均被考虑,仿真结果初步证实了改进算法的可行性和鲁棒性. 重建图像呈现超分辨率 (SR),有望应用到早期乳腺癌检测等实际问题中.

关键词: 电磁逆散射, 高斯-牛顿反演, 时域有限差分, 正则化

**PACS:** 41.20.-q, 81.70.Ex, 87.85.Pq, 84.40.-x **DOI:** 10.7498/aps.63.034102

## 1 引 言

电磁逆散射(也常称为反演)问题是根据已知的入射电磁场和测得的散射场,探究目标(object of interest, OI)的物理(或几何)特性. 电磁逆散射理论和方法广泛应用于遥感、无损检测、地球物理、医学成像和目标识别等领域[1-11].

然而,由于测量数据只能从有限区域获取,电磁逆散射是一类富有挑战的不适定问题,非线性和病态性是其中的两个主要困难<sup>[3,6]</sup>.发展至今,尚未形成一套通用的解决方案.常用的做法是采用线性化近似结合迭代法处理非线性问题<sup>[1,2]</sup>,借助正则化技术抑制病态特性<sup>[7,8]</sup>.

从方法论角度,处理电磁逆散射问题,既可从频域进行,已经发展的方法(或算法)主要有玻恩迭代法(Born iterative method, BIM)<sup>[1]</sup>、变形玻恩迭代法(distorted Born iterative method, D-BIM)<sup>[2]</sup>、综合玻恩迭代法(BIM)<sup>[4]</sup>和高斯-牛顿反演(Gauss-Newton inversion, GNI)算法<sup>[8]</sup>;也可从时域进行,提出的方法(或算法)主要有正反时间步进(forward-backward time-stepping, FBTS)法<sup>[5]</sup>和时域玻恩迭代法(BIM)<sup>[3,7]</sup>.研究表明:相比之

下, 频域方法对窄带信号而言可行、经济; 而对宽带脉冲而言, 时域方法则显示了信息量大、重建分辨率高等优势 [5,7].

为了直接利用超宽带 (ultra-wideband, UWB) 时域测量数据, 文献 [7] 将玻恩迭代法 (BIM) 从频域改进到时域, 反演三维 (three-dimensional, 3D) 无耗媒质的介电常数, 重建图像具有超分辨率 (super resolution, SR).

然而,文献[8]指出:和BIM、DBIM相比,GNI算法更适合双参数(介电常数和电导率)同时重建,应用范围更为广泛.

因此,本文借鉴文献[7,8]的思想,将GNI算法从频域发展到时域,并应用于四类二维(two-dimensional, 2D)数值算例检验其性能. 迭代过程中,每步产生的正问题由时域有限差分(finite difference time domain, FDTD) 法求解[12].

## 2 问题描述

为简化和方便问题描述, 首先给出如下的假设 条件和必要的符号说明:

1) 假设所有媒质是各向同性、线性、非色散

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (批准号: 61071022, 51271059)、安徽省自然科学基金 (批准号: 1308085MA13)、安徽省科技计划项目 (批准号: 12010302080) 和阜阳师范学院重点基金 (批准号: 2011FSKJ01ZD) 资助的课题.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: liu\_guang\_dong@126.com

<sup>© 2014</sup> 中国物理学会 Chinese Physical Society

和无磁的(即磁导率为真空磁导率 $\mu_0$ ),该假设条件广泛应用于地球物理勘探、生物医学成像等领域[2,4,11,13]

2) 直角坐标系下, 平行于 z 轴的不均匀目标区域  $\Phi$ (包含若干个柱状散射体) 置于均匀背景媒质区域  $\Omega$ , 被周围平行于 z 轴的线电流源激励的发射天线 T 发射的横磁 (transverse magnetic, TM) 波辐照, 产生的时域电场 (分量)  $E_z(r,t)$  由接收天线 R接收, 其中位置矢量 r=(x,y), t 表示时间变量, x-y 横截面如图 1 所示 [6]. M 根发射天线分别位于  $r_m^{\rm T}$ ,  $m=1,2,\cdots,M$ , N 根接收天线分别位于  $r_n^{\rm R}$ ,  $n=1,2,\cdots,N$ , 并记观测区域为  $\Psi$ .

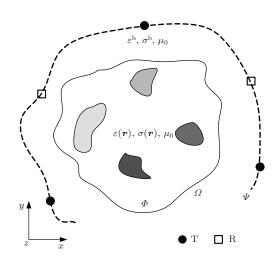


图 1 电磁逆散射问题的几何模型

3)  $\Phi$ 和  $\Omega$  的 介 电 常 数 分 别 表 示 为  $\varepsilon$ ( $\mathbf{r}$ ) =  $\varepsilon_{\rm r}(\mathbf{r})\varepsilon_0$  和  $\varepsilon^{\rm b} = \varepsilon_{\rm r}^{\rm b}\varepsilon_0$ , 其中,  $\varepsilon_{\rm r}$  和  $\varepsilon_{\rm r}^{\rm b}$  分别表示  $\Phi$  和  $\Omega$  的相对介电常数,  $\varepsilon_0$  表示真空介电常数,  $\Phi$  和  $\Omega$  的电导率分别记为  $\sigma$ ( $\mathbf{r}$ ) 和  $\sigma^{\rm b}$ .

目标区 $\Phi$ 有散射体存在时, 依次激活 $r_m^{\rm T}$ 处各发射天线, 测量并存储 $r_n^{\rm R}$ 处各接收天线上的时域电场(称为总场) $E_{z,{\rm mea}}\left(r_n^{\rm R},r_m^{\rm T},t\right)$ .

类似地,目标区 $\Phi$ 无散射体存在(移走散射体)时,依次激活 $r_m^{\rm T}$ 处各发射天线,测量并存储 $r_n^{\rm R}$ 处各接收天线上的时域电场(称为入射场) $E_z^{\rm RC}$   $(r_n^{\rm R}, r_m^{\rm T}, t)$ .

于是, 测量的时域散射电场一般定义为[7]

$$\begin{split} E_{z,\text{mea}}^{\text{scat}}\left(\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}},\boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}},t\right) \\ &\triangleq E_{z,\text{mea}}\left(\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}},\boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}},t\right) - E_{z}^{\text{inc}}\left(\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}},\boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}},t\right). \end{split} \tag{1}$$

求解上述 2D 电磁逆散射问题, 就是要利用测得的时域散射电场  $E_{z,\text{mea}}^{\text{scat}}$ , 去重建目标区  $\Phi$  的相对介电常数  $\varepsilon_r$  和电导率  $\sigma$ . 为简化和方便后文描述,

预先定义复值 (符号顶部加点表示其复值形式,下文同) 的目标函数  $\dot{y}$  为

$$\dot{\chi}(\mathbf{r}) \triangleq \left[ \varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r}) - \varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{b}} \right] - \mathrm{j} \left[ \sigma(\mathbf{r}) - \sigma^{\mathrm{b}} \right] / \varepsilon_{0} \omega, \quad (2)$$
 其中, j表示虚数单位, 激励源的角频率  $\omega = 2\pi f, f$  表示频率, 记  $\chi_{\mathrm{R}}, \chi_{\mathrm{I}}$  分别表示 $\dot{\chi}$  的实部、虚部.

## 3 反演算法

电磁逆散射问题是一类不适定问题 [2,3,6-8],本文采用迭代法(迭代次数 $i=0,1,\cdots,i_{\max}$ ,其中 $i_{\max}$ 表示最大迭代次数)克服其中的非线性困难:迭代初始(i=0),采用玻恩近似(Born approximation, BA) [2,7,8] 线性化原问题,即选择背景媒质的电参数作为重建目标参数的迭代初值,亦即 $\dot{\chi}^0(\mathbf{r})=0+0$ j;迭代过程的每一步 $(i=1,2,\cdots,i_{\max})$ ,需要分别处理迭代产生的正问题和逆问题.

正则化技术被广泛用于应对逆问题的病态挑战:传统的加性正则化(additive regularization, AR),例如吉洪诺夫(Tikhonov)正则化<sup>[2,3,6,7]</sup>,正则化参数不但需要人为设定,而且依赖具体问题;而近几年来发展的乘性正则化(multiplicative regularization, MR)则显示了自适应特性<sup>[8]</sup>,因此,本文也采用后一种方案.

#### 3.1 正问题描述

正问题:已知激励源和媒质的电磁参数,求时域电磁场.

电流源  $J_z(\mathbf{r},t)$  激励的 TM 波照射下, 时域电场  $E_z(\mathbf{r},t)$  和磁场  $H_x(\mathbf{r},t)$ ,  $H_y(\mathbf{r},t)$  满足 2D 麦克斯韦 (Maxwell) 方程组 [12].

#### 3.2 正问题解法

获得了入射场和目标区的电参数 $\dot{\chi}(r)$ ,本文选用 FDTD 法计算前述正问题,计算区域周围采用适当的吸收边界截断 [12].相关 FDTD 实现细节参见文献 [12].

依次激活 $\mathbf{r}_{m}^{\mathrm{T}}$ 处各发射天线,利用FDTD法: 1) 计算目标区的时域总电场 $E_{z}\left(\dot{\chi}; \mathbf{r}, \mathbf{r}_{m}^{\mathrm{T}}, t\right), \mathbf{r} \in \Phi$ ; 2) 计算并存储 $\mathbf{r}_{n}^{\mathrm{R}}$ 处各接收天线上的时域总电场 $E_{z,\mathrm{com}}\left(\dot{\chi}; \mathbf{r}_{n}^{\mathrm{R}}, \mathbf{r}_{m}^{\mathrm{T}}, t\right)$ ,则各接收天线上计算获得的时域散射电场可表示为

$$E_{z,\text{com}}^{\text{scat}}\left(\dot{\chi}; \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, t\right)$$

$$= E_{z,\text{com}}\left(\dot{\chi}; \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, t\right) - E_{z}^{\text{inc}}\left(\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, t\right). \quad (3)$$

假定原来各接收天线 $\mathbf{r}_n^{\mathrm{R}}$ 处放置激励源,依次激活,利用FDTD法计算目标区的时域总电场 $E_z\left(\dot{\chi}; \mathbf{r}, \mathbf{r}_n^{\mathrm{R}}, t\right), \mathbf{r} \in \mathbf{\Phi}$ ,以备后文计算格林(Green)函数之用.

#### 3.3 逆问题描述

逆问题:已知测量和计算的时域电场,求目标区的目标函数.

为此, 首先, 利用快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) <sup>[7]</sup>, 获得频域各接收天线上的测量电场为

$$\dot{E}_{z,\text{mea}}^{\text{scat}}\left(\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}},\boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}},\omega\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{z,\text{mea}}^{\text{scat}}\left(\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}},\boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}},t\right) \times e^{-\mathrm{j}\omega t} dt. \tag{4}$$

类似地,可以分别获得频域各接收天线上计算的 散射电场  $\dot{E}_{z,\text{com}}$  ( $\dot{\chi}$ ;  $\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}$ ,  $\boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}$ ,  $\omega$ ) 和目标区的总电场  $\dot{E}_{z}$  ( $\dot{\chi}$ ;  $\boldsymbol{r}$ ,  $\boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}$ ,  $\omega$ ),  $\dot{E}_{z}$  ( $\dot{\chi}$ ;  $\boldsymbol{r}$ ,  $\boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}$ ,  $\omega$ ).

类似于文献 [8], 本文将该逆问题转化为最小 化问题, 其目标泛函 F 定义为

 $F(\chi_{\rm R}, \chi_{\rm I}) \triangleq F^{\rm LS}(\chi_{\rm R}, \chi_{\rm I}) F_i^{\rm MR}(\chi_{\rm R}, \chi_{\rm I}),$  (5a) 其中, 最小二乘(least square, LS) 项  $F^{\rm LS}$  定义为 [8]

$$F^{\mathrm{LS}}\left(\chi_{\mathrm{R}},\chi_{\mathrm{I}}\right)$$

$$\triangleq \frac{1}{2} \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \left\| \dot{E}_{z,\text{com}}^{\text{scat}} \left( \dot{\chi}; \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, \omega \right) - \dot{E}_{z,\text{mea}}^{\text{scat}} \left( \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, \omega \right) \right\|_{\nu}^{2} d\omega.$$
 (5b)

用于描述剩余误差, 其中 $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{\max}$ 分别表示激励源的最小、最大工作角频率, 算子符号  $\|\cdot\|_{\Psi}^2$ 表示在观测区域 $\Psi$ 上取 $L_2$ 范数的平方, 权因子 $\eta$ 定义为

 $\eta \triangleq$ 

$$\left(\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \left\| \dot{E}_{z,\text{mea}}^{\text{scat}} \left( \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, \omega \right) \right\|_{\Psi}^{2} d\omega \right)^{-1}.$$
(5c)

第i步迭代的MR项 $F_i^{MR}$ 定义为

$$F_i^{\text{MR}} (\chi_{\text{R}}, \chi_{\text{I}})$$

$$\triangleq \frac{1}{2} \int_{\Phi} \varphi_i^2(\boldsymbol{r}) (|\nabla \dot{\chi}(\boldsymbol{r})|^2 + \nu_i^2) d\boldsymbol{r}.$$
 (5d)

用于自适应地抑制逆问题的病态特性, 其中,  $|\cdot|$  表示取模算子,  $\nabla$  为哈米尔顿 (Hamilton) 算子, 第 i 步迭代的权函数  $\varphi_i$  和调控参数  $\nu_i$  的定义参见文献 [8].

#### 3.4 逆问题解法

类似于文献[8],本文采用GNI迭代算法求解上述逆问题,即最小化问题

$$\dot{\chi} = \min_{\dot{\gamma}} \left[ \left[ F(\chi_{\mathbf{R}}, \chi_{\mathbf{I}}) \right] \right], \tag{6}$$

其中, min [·] 表示最小化运算.

由泰勒(Taylor)展开, 第i步迭代, 修正(方向) $\Delta\chi_{\rm B}^i$ 和 $\Delta\chi_{\rm I}^i$ 满足方程[8]

$$\underline{\boldsymbol{H}}_{i}\boldsymbol{p}_{i} = -\boldsymbol{g}_{i}, \tag{7a}$$

其中,海塞 (Hessian)矩阵  $\underline{H}_i$ 、高斯-牛顿 (Gauss-Newton, GN)方向向量  $p_i$  和梯度向量  $g_i$  分别为

$$\underline{\boldsymbol{H}}_{i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{R} \partial \chi_{R}} \Big|_{\begin{pmatrix} \chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i} \end{pmatrix}} & \frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{R} \partial \chi_{I}} \Big|_{\begin{pmatrix} \chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i} \end{pmatrix}} \\ \frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{I} \partial \chi_{R}} \Big|_{\begin{pmatrix} \chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i} \end{pmatrix}} & \frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{I} \partial \chi_{I}} \Big|_{\begin{pmatrix} \chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i} \end{pmatrix}} \end{bmatrix},$$
(7b)

$$\underline{\boldsymbol{p}}_{i} = \begin{bmatrix} \Delta \chi_{\mathrm{R}}^{i} \\ \Delta \chi_{\mathrm{I}}^{i} \end{bmatrix}, \tag{7c}$$

$$\underline{\boldsymbol{g}}_{i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \chi_{R}} \Big|_{\left(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i}\right)} \\ \frac{\partial F}{\partial \chi_{I}} \Big|_{\left(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i}\right)} \end{bmatrix}. \tag{7d}$$

为表述简洁, 这里省略了部分函数的自变量(下 文同).

则下一步 (第i+1步) 迭代, 目标函数的实部、虚部更新方式分别为

$$\chi_{\mathbf{R}}^{i+1} = \chi_{\mathbf{R}}^i + \alpha^i \Delta \chi_{\mathbf{R}}^i, \tag{8a}$$

$$\chi_{\rm I}^{i+1} = \chi_{\rm I}^i + \alpha^i \Delta \chi_{\rm I}^i, \tag{8b}$$

其中,  $\alpha^i$  表示第i 步迭代的步长. 这样, 求解原逆问题转化为求解 GN 方向和步长两个子问题.

#### 3.4.1 GN 方向

首先,类似于文献[8],可求得LS项(5b)关于目标函数的一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial F^{LS}}{\partial \chi_{R}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$= -\eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Re}\left[\left[\left(\dot{J}_{i}\right)^{a} \dot{d}_{i}\right]\right] d\omega, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial F^{LS}}{\partial \chi_{I}} \Big|_{(\chi_{i}^{i}, \chi_{i}^{i})}$$

$$= -\eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Im} \left[ \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{d}_{i} \right] \right] d\omega, \quad (9b)$$

其中, Re [[·]] 和 Im [[·]] 分别表示取实部和虚部运算,  $(\cdot)^a$  表示 (自) 伴算子 [8], 在第 i 步迭代, 测量、计算的散射电场之差  $\dot{d}_i$  定义为

$$\dot{d}_{i}\left(\dot{\chi}; \boldsymbol{r}_{n}^{\mathrm{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\mathrm{T}}, \omega\right)$$

$$\triangleq \dot{E}_{z,\mathrm{mea}}^{\mathrm{scat}}\left(\boldsymbol{r}_{n}^{\mathrm{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\mathrm{T}}, \omega\right) - \dot{E}_{z,\mathrm{com}}^{\mathrm{scat}}\left(\dot{\chi}^{i}; \boldsymbol{r}_{n}^{\mathrm{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\mathrm{T}}, \omega\right).$$
(9c)

雅可比(Jacobian)算子定义为

$$\dot{J}_{i} \triangleq \frac{\partial \dot{E}_{z,\text{com}}^{\text{scat}} \left(\dot{\chi}; \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, \omega\right)}{\partial \dot{\chi}} \bigg|_{\left(\chi_{\text{R}}^{i}, \chi_{\text{I}}^{i}\right)}$$

$$= k_{0}^{2} \int_{\Phi} \dot{E}_{z} \left(\dot{\chi}^{i}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, \omega\right) \dot{G}_{\text{2D}}^{\text{inh}} \left(\dot{\chi}^{i}; \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \mathbf{r}, \omega\right) d\boldsymbol{r},$$
(9d)

其中 $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ 为真空波数, 2D不均匀Green函数 $\dot{G}_{2D}^{\text{inh}}$ 可利用互易原理求得<sup>[2]</sup>

$$\dot{G}_{2D}^{inh}\left(\dot{\chi}^{i}; \boldsymbol{r}_{n}^{R}, \boldsymbol{r}, \omega\right) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_{0}} \dot{E}_{z}\left(\dot{\chi}^{i}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_{n}^{R}, \omega\right). \tag{9e}$$

类似地, 求得LS项(5b)关于目标函数的二阶偏导数分别近似为

$$\frac{\partial^{2} F^{LS}}{\partial \chi_{R} \partial \chi_{R}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$\approx \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Re} \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial^{2} F^{LS}}{\partial \chi_{R} \partial \chi_{I}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$\approx \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Im} \left[ -\left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega, \quad (10b)$$

$$\frac{\partial^{2} F^{LS}}{\partial \chi_{I} \partial \chi_{R}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$\approx \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Im} \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega, \quad (10c)$$

$$\frac{\partial^{2} F^{LS}}{\partial \chi_{I} \partial \chi_{I}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

 $\approx \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Re} \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega. \tag{10d}$ 其次, 在第 i 步迭代, 可求得 MR 项 (5d) 关于目标函

数的一阶偏导数分别为

$$\left. \frac{\partial F_i^{\text{MR}}}{\partial \chi_{\text{R}}} \right|_{\left(\chi_{\text{R}}^i, \chi_{\text{I}}^i\right)} = -L_i \chi_{\text{R}}^i, \tag{11a}$$

$$\left. \frac{\partial F_i^{\text{MR}}}{\partial \chi_{\text{I}}} \right|_{\left(\chi_{\text{R}}^i, \chi_{\text{I}}^i\right)} = -L_i \chi_{\text{I}}^i, \tag{11b}$$

其中, 加权拉普拉斯 (Laplace) 算子  $L_i$  的定义参见 文献 [8].

类似地,可以求得MR项(5d)关于目标函数的 二阶偏导数分别为

$$\left. \frac{\partial^2 F_i^{\text{MR}}}{\partial \chi_{\text{R}} \partial \chi_{\text{R}}} \right|_{\left(\chi_{\text{R}}^i, \chi_{\text{I}}^i\right)} = -L_i, \tag{12a}$$

$$\left. \frac{\partial^2 F_i^{\text{MR}}}{\partial \chi_{\text{R}} \partial \chi_{\text{I}}} \right|_{\left(\chi_{\text{R}}^i, \chi_{\text{I}}^i\right)} = 0, \tag{12b}$$

$$\frac{\partial^2 F_i^{\text{MR}}}{\partial \chi_{\text{I}} \partial \chi_{\text{R}}} \bigg|_{\begin{pmatrix} \chi_{\text{R}}^i, \chi_{\text{I}}^i \end{pmatrix}} = 0, \tag{12c}$$

$$\left. \frac{\partial^2 F_i^{\text{MR}}}{\partial \chi_{\text{I}} \partial \chi_{\text{I}}} \right|_{\left(\chi_{\text{R}}^i, \chi_{\text{I}}^i\right)} = -L_i.$$
 (12d)

于是,在第i步迭代,由(5a)式,结合(5b),(5d),(9a),(11a)式,求解目标泛函F关于 $\chi_R$ 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial F}{\partial \chi_{R}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$= \frac{\partial \left(F^{LS} F_{i}^{MR}\right)}{\partial \chi_{R}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})} = \eta \beta_{i} \left(-L_{i} \chi_{R}^{i}\right)$$

$$- \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Re} \left[\left(\dot{J}_{i}\right)^{a} \dot{d}_{i}\right] d\omega, \quad (13a)$$

其中.

$$\beta_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \left\| \dot{d}_i \left( \dot{\chi}; \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{R}}, \boldsymbol{r}_m^{\mathrm{T}}, \omega \right) \right\|_{\boldsymbol{\Psi}}^2 d\omega.$$

利用类似的方法, 可求得目标泛函F关于 $\chi_{\rm I}$ 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial F}{\partial \chi_{\rm I}}\Big|_{\left(\chi_{\rm R}^{i}, \chi_{\rm I}^{i}\right)}$$

$$= \eta \beta_{i} \left(-L_{i} \chi_{\rm I}^{i}\right)$$

$$- \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\rm min}}^{\omega_{\rm max}} \operatorname{Im} \left[\left(\dot{J}_{i}\right)^{a} \dot{d}_{i}\right] d\omega. \quad (13b)$$

类似地, 求得目标泛函 F 关于目标函数的二阶 偏导数分别为

$$\frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{R} \partial \chi_{R}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$= \eta \beta_{i} (-L_{i})$$

$$+ \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Re} \left[ \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega, \quad (14a) \right]$$

$$\frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{R} \partial \chi_{I}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$= -\eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Im} \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega, \quad (14b)$$

$$\frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{I} \partial \chi_{R}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$= \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Im} \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega, \quad (14c)$$

$$\frac{\partial^{2} F}{\partial \chi_{I} \partial \chi_{I}} \Big|_{(\chi_{R}^{i}, \chi_{I}^{i})}$$

$$= \eta \beta_{i} (-L_{i})$$

$$+ \eta \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \operatorname{Re} \left[ \left( \dot{J}_{i} \right)^{a} \dot{J}_{i} \right] d\omega. \quad (14d)$$

利用 2D 脉冲基函数 [2,7-8],均匀离散目标区域为  $P = P_x P_y$  个网格,其中  $P_x$ , $P_y$  分别表示 x,y 方向剖分的网格数. 均匀离散激励源频谱为  $W = (\omega_{\max} - \omega_{\min})/\Delta \omega$  个频点,其中  $\Delta \omega$  为角频率步长. 于是,方程 (7a) 离散为矩阵方程

$$\underline{\boldsymbol{H}}_{i}\boldsymbol{p}_{i} = -\boldsymbol{g}_{i}, \tag{15a}$$

其中, Hessian矩阵  $\underline{\boldsymbol{H}}_i \in \underline{\mathbf{R}}^{2P \times 2P}$  (符号加下划线表示其离散形式,下文同)、GN 方向向量  $\underline{\boldsymbol{p}}_i \in \underline{\mathbf{R}}^{2P \times 1}$  和梯度向量  $\underline{\boldsymbol{g}}_i \in \underline{\mathbf{R}}^{2P \times 1}$  分别为

$$\underline{\boldsymbol{H}}_{i} = \eta \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \underline{\boldsymbol{J}}_{i}^{\operatorname{H}} \underline{\boldsymbol{J}}_{i} \right] - \beta_{i} \underline{\boldsymbol{L}}_{i} & -\operatorname{Im} \left[ \underline{\boldsymbol{J}}_{i}^{\operatorname{H}} \underline{\boldsymbol{J}}_{i} \right] \\ \operatorname{Im} \left[ \underline{\boldsymbol{J}}_{i}^{\operatorname{H}} \underline{\boldsymbol{J}}_{i} \right] & \operatorname{Re} \left[ \left[ \underline{\boldsymbol{J}}_{i}^{\operatorname{H}} \underline{\boldsymbol{J}}_{i} \right] \right] - \beta_{i} \underline{\boldsymbol{L}}_{i} \end{bmatrix},$$
(15b)

$$\underline{\boldsymbol{p}}_{i} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{R}}^{i} \\ \Delta \underline{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{I}}^{i} \end{bmatrix}, \tag{15c}$$

$$\underline{\boldsymbol{g}}_{i} = -\eta \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \underline{\boldsymbol{J}}_{i}^{H} \underline{\boldsymbol{d}}_{i} \right] + \beta_{i} \underline{\boldsymbol{L}}_{i} \underline{\boldsymbol{\chi}}_{R}^{i} \\ \operatorname{Im} \left[ \underline{\boldsymbol{J}}_{i}^{H} \underline{\boldsymbol{d}}_{i} \right] + \beta_{i} \underline{\boldsymbol{L}}_{i} \underline{\boldsymbol{\chi}}_{I}^{i} \end{bmatrix}, \tag{15d}$$

其中,  $\underline{\boldsymbol{J}}_{i}^{\mathrm{H}} \in \underline{\mathbf{C}}^{P \times Q}$ (右上角标"H"表示复共轭转置算子),  $\underline{\boldsymbol{J}}_{i} \in \underline{\mathbf{C}}^{Q \times P}$ ,  $\underline{\boldsymbol{L}}_{i} \in \underline{\mathbf{R}}^{P \times P}$ ,  $\Delta \underline{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{R}}^{i} \in \underline{\mathbf{R}}^{P \times 1}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{R}}^{i} \in \underline{\mathbf{R}}^{P \times 1}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{I}}^{i} \in \underline{\mathbf{R}}^{P \times 1}$ ,  $\underline{\boldsymbol{d}}_{i} \in \underline{\mathbf{C}}^{Q \times 1}$ , 这里  $Q = \mathrm{MNW}$ . 离散化细节参见文献[8].

目标函数更新方程(8a), (8b)相应离散为

$$\underline{\chi}_{\mathbf{R}}^{i+1} = \underline{\chi}_{\mathbf{R}}^{i} + \alpha^{i} \Delta \underline{\chi}_{\mathbf{R}}^{i}, \qquad (16a)$$

$$\underline{\chi}_{\mathrm{I}}^{i+1} = \underline{\chi}_{\mathrm{I}}^{i} + \alpha^{i} \Delta \underline{\chi}_{\mathrm{I}}^{i}. \tag{16b}$$

利用适当的共轭梯度(conjugate gradient, CG)法<sup>[14]</sup>求解矩阵方程(15a),即可求得GN方向向量.

#### 3.4.2 步 长

在第i步迭代,已知目标函数 ( $\underline{\chi}_{\mathrm{R}}^{i}$ ,  $\underline{\chi}_{\mathrm{I}}^{i}$ ),并获得了GN 方向 ( $\Delta\underline{\chi}_{\mathrm{R}}^{i}$ ,  $\Delta\underline{\chi}_{\mathrm{I}}^{i}$ ),步长由以下的最小化子问题确定

$$\alpha^{i} = \arg\min_{\alpha} \left[ F\left(\underline{\boldsymbol{\chi}}_{R}^{i} + \alpha \Delta \underline{\boldsymbol{\chi}}_{R}^{i}, \boldsymbol{\chi}_{I}^{i} + \alpha \Delta \underline{\boldsymbol{\chi}}_{I}^{i} \right) \right].$$
(17)

求解上述问题一般采用回溯线搜索算法, 其主要步骤参见文献 [15].

这样, 获得了目标函数  $\dot{\chi}^i(\mathbf{r})$  后, 根据 (2) 式即可获得目标区  $\boldsymbol{\Phi}$  的相对介电常数  $\varepsilon_{\mathbf{r}}^i(\mathbf{r})$  和电导率  $\sigma^i(\mathbf{r})$  分布. 为了比较反演进程的算法性能, 定义第 i 步(主) 迭代的相对剩余误差 (relative residual error, RRE)、相对介电常数的均方根误差 (mean square error, MSE) 和电导率的 MSE 分别为 [2]

$$\triangleq \frac{1}{\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{0}^{T} \left| E_{z,\text{mea}}^{\text{scat}} \left( \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, t \right) \right|^{2} dt} \times \left[ \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \int_{0}^{T} \left| E_{z,\text{com}}^{\text{scat}} \left( \dot{\boldsymbol{\chi}}^{i}; \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, t \right) - E_{z,\text{mea}}^{\text{scat}} \left( \boldsymbol{r}_{n}^{\text{R}}, \boldsymbol{r}_{m}^{\text{T}}, t \right) \right|^{2} dt \right],$$
(18a)

$$MSE_{\varepsilon_{-}}(i)$$

$$\triangleq \sqrt{\frac{\int_{\Phi} \left[\varepsilon_{\mathrm{r}}^{i}(\boldsymbol{r}) - \varepsilon_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r})\right]^{2} d\boldsymbol{r}}{\int_{\Phi} \left[\varepsilon_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r})\right]^{2} d\boldsymbol{r}}},$$
(18b)

$$MSE_{\sigma}(i)$$

$$\triangleq \sqrt{\frac{\int_{\Phi} \left[\sigma^{i}(\boldsymbol{r}) - \sigma(\boldsymbol{r})\right]^{2} d\boldsymbol{r}}{\int_{\Phi} \left[\sigma(\boldsymbol{r})\right]^{2} d\boldsymbol{r}}},$$
(18c)

其中,  $\varepsilon_{\rm r}(\mathbf{r})$ ,  $\sigma(\mathbf{r})$  分别表示相对介电常数和电导率的真实分布, T 表示激励源辐照时间, 并记迭代终止的误差阈值为  $e^{\rm th}$ .

概括起来, 时域GNI算法的计算流程如图2所示.

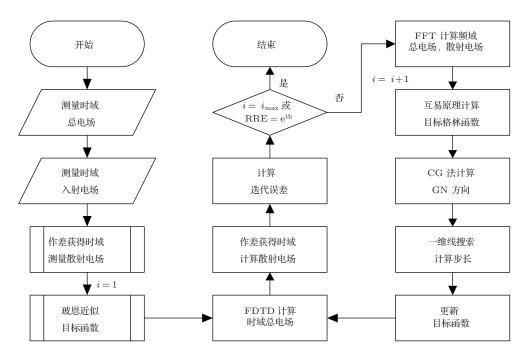


图 2 时域 GNI 算法流程图

## 4 仿真结果和讨论

为了检验本文时域 GNI 算法的鲁棒性能,设计四类 2D 数值算例,选择算例基于四点考虑: 1) 散射目标和背景媒质的电参数差异涵盖弱散射和强散射类型(这里的强弱是个相对概念,类似文献 [7]); 2) 散射目标的电参数分布涵盖光滑和非光滑情形(这里光滑与否的含义类似文献 [2],而非严格的数学概念); 3) 背景媒质涵盖真空(空气可近似为此类)和其他有耗媒质; 4) 假定收发装置是视角受限的,即收发天线仅占据待反演目标周围的部分视角. 另外,所有算例均设定如下条件或参数(特别说明除外):

1) 激励电压源所需的时域 UWB 脉冲选为 [3]

$$u(t) = \tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[ \left( \frac{t}{\tau} \right)^4 e^{-t/\tau} \right],$$
 (19)

其中,  $\tau$ 取  $1.25 \times 10^{-10}$  s时记为脉冲 1(用于所有算例), 取  $1.00 \times 10^{-10}$  s时记为脉冲 2(仅用于最后一算例). 脉冲  $1\sqrt{2}$  归一化的时域波形和频谱如图 3 所示.

其中,激励源辐照时间T=4.86 ns,频谱幅度从最大值降至大约5%时,脉冲1、2分别涵盖0.02—3.8 GHz,0.03—5.0 GHz的频率范围,分别在此范围内均匀采样,采样频点数取为W=20.

- 2) 假设反演目标区的横截面为长方形,发射、接收天线数分别取为M=3,N=9;假定发射、接收天线都均匀分布在待重建的长方目标区的(左、上、下)三侧(视角受限),且各天线到目标区的距离相等;忽略天线的具体形状(即视为点模型),由此带来的轻微误差不影响对算法性能的讨论 [6].
- 3) 按照图 2所示的时域 GNI 算法流程, 迭代 反演散射目标区  $\Phi$  的相对介电常数  $\varepsilon_{\rm r}(r)$  和电导率  $\sigma(r)$  分布. 为了便于比较不同算例的重建效果, 选取迭代次数为终止依据, 设定主迭代、内迭代的最大次数分别为  $i_{\rm max}=20$ ,  $k_{\rm max}=30$ . 迭代过程中, 处理正问题的 FDTD 正解器离散重建目标区  $\Phi$  为  $P=P_xP_y=40\times50$  个均匀网格, 计算区域周围选用 8层单轴完美匹配层 (uniaxial perfectly matched layer, UPML) 吸收边界 [12]; 处理逆问题时, 求 GN 方向向量选用 Polak-Ribiere-Polyak (PRP) 共轭梯度法, 其实现细节参见文献 [14].
- 4) 因目前测量条件所限, 所需的时域测量电场也用FDTD法仿真数据替代. 为了让仿真结果更接近真实测量值, 避免过于乐观的重建, 特作几点尝试: 1) 此处离散化采用双倍精细的网格, 即取  $P' = P'_x P'_y = 80 \times 100$ ; 2) 在仿真数据中加入均匀分布的随机噪声 [6], 信噪比取为 20 dB.

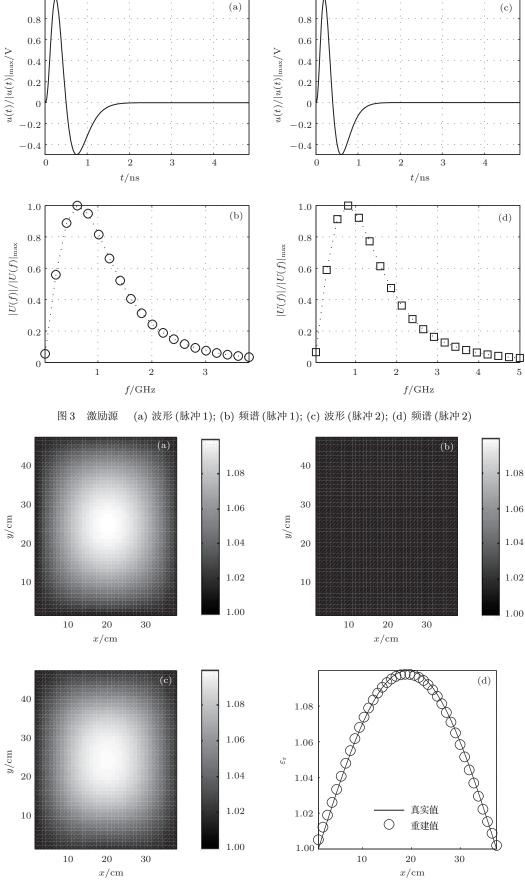


图 4 相对介电常数分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值; (d) y = 23.5 cm 处的对比

#### 4.1 光滑弱散射

算例1给出真空中的正弦类光滑弱散射情形:目标的相对介电常数比背景媒质最大高出10% 倍,目标电导率的最大值为 $3.6\times10^{-3}$  S/m. 目标区长、宽分别为y=47.0 cm, x=37.6 cm, 天线阵元距其5.0 cm, FDTD正解器离散其网格尺寸为

 $\Delta x = \Delta y = 9.4$  mm, 真实的相对介电常数、电导率分布离散后分别如图 4(a)、图 5(a) 所示. 图 4(b)、图 5(b) 分别为相对介电常数、电导率的迭代初值分布,图 4(c)、图 5(c) 分别为相应的重建值分布,图 4(d)、图 5(d) 分别给出 y = 23.5 cm 处相应的重建分布和真实分布的对比.图 6 为重建误差随迭代次数的变化关系.

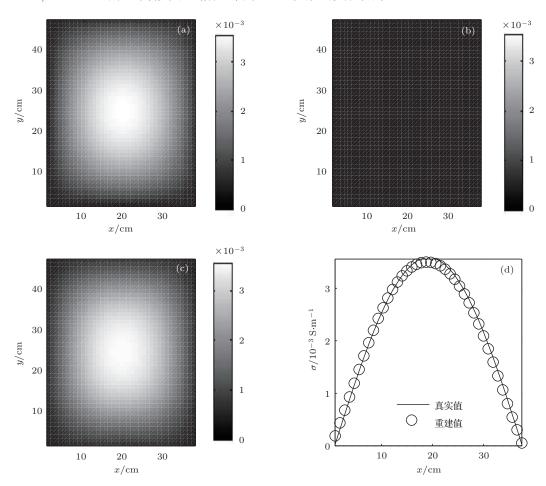


图 5 电导率分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值; (d) y = 23.5 cm 处的对比

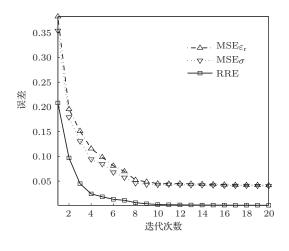


图 6 迭代误差

对于光滑弱散射情形, 比较、分析这些结果, 发现: 1) 从总体来看, 2D 时域 GNI 算法是收敛的, 收敛速度先快后慢; 2) 随着迭代次数的增加, 重建误差趋于减小, 从RRE来看, 20 次迭代已获得较为满意的结果, 此时误差约为  $1.2 \times 10^{-4}$  (当然, 迭代次数越多, 计算耗时也越长, 实际的工程应用中, 可以选择一个重建精度与实时重建的合理折中 [6]), 然而 MSE则相对较大, 但由于实际应用中, 散射目标的真实电参数分布并非先验知晓 [2], 故本文给出 MSE仅作比较之意; 3) 重建图像呈现超分辨率 (网格尺寸为  $\Delta x = \Delta y \approx 0.02\lambda_0$ , 其中  $\lambda_0$  为真空波长).

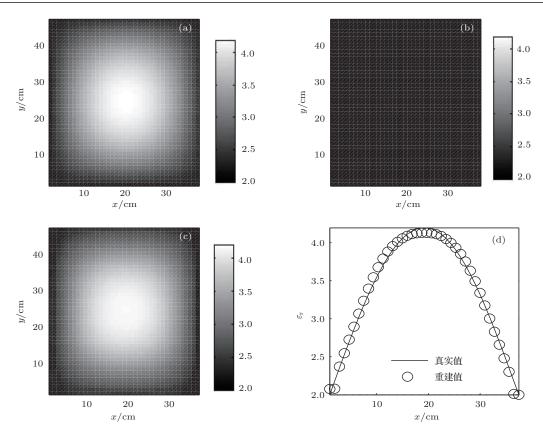


图 7 相对介电常数分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值; (d)  $y=23.5~{
m cm}$  处的对比

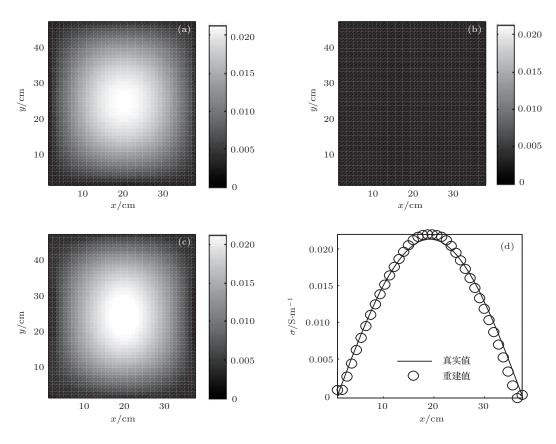


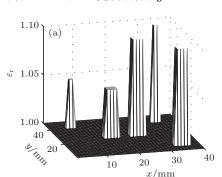
图 8 电导率分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值; (d) y = 23.5 cm 处的对比

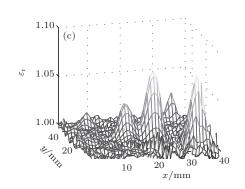
#### 4.2 光滑强散射

对于光滑强散射情形, 比较、分析所得结果, 也有类似于算例1的发现, 但是算法收敛的稳定性和重建精度轻微下降, 20次迭代时, RRE约为  $8.1 \times 10^{-4}$ .

#### 4.3 非光滑弱散射

算例3给出真空中的非光滑弱散射情形:散射目标、背景媒质的相对介电常数最大差异为10%倍,散射目标电导率的最大值为 $3.60 \times 10^{-3}$ S/m. 散射目标区 $\Phi$ 的长、宽分别为y=50 mm,





x = 40 mm,天线阵元距其5 mm,FDTD正解器离散其网格尺寸为 $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ mm}$ ,散射目标区含有5个均匀正方散射体,上排两个(按照从左向右顺序,下文同)分别记为 $s_1$ ,  $s_2$ ,中间两个(相距4 mm)分别记为 $s_3$ ,  $s_4$ ,其余一个记为 $s_5$ .  $s_1$ ,  $s_2$ 的横截面边长均为2 mm,其余的横截面边长均为4 mm.  $s_1$ ,  $s_3$ 的相对介电常数、电导率分别为1.05,

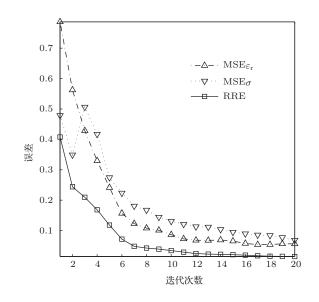
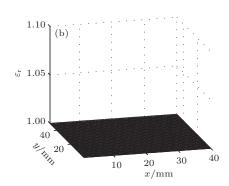


图 9 迭代误差



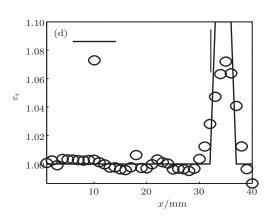


图 10 相对介电常数分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值; (d) y = 10 mm 处的对比

 $1.80 \times 10^{-3}$  S/m, 其余的相对介电常数、电导率分别为 1.10,  $3.60 \times 10^{-3}$  S/m. 真实的相对介电常数、电导率分布离散后分别如图 10 (a)、图 11 (a) 所示.图 10 (b)、图 11 (b) 分别为相对介电常数、电导率的

迭代初值分布,图 10(c)、图 11(c)分别为相应的重建值分布,图 10(d)、图 11(d)分别给出 y=10 mm处相应的重建分布和真实分布的对比.图 12 为重建误差随迭代次数的变化关系.

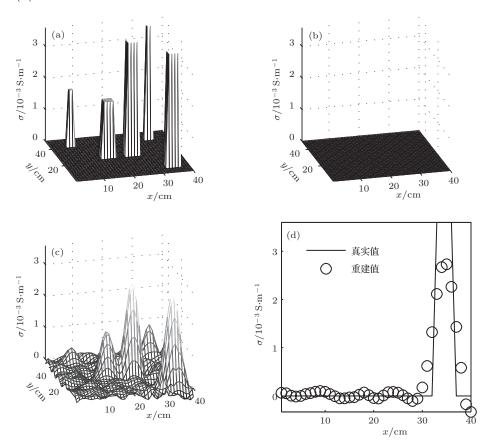


图 11 电导率分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值; (d) y = 10 mm 处的对比

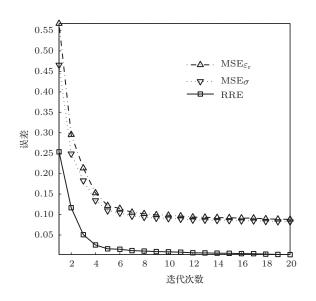


图 12 迭代误差

对于非光滑弱散射情形, 比较、分析这些结果,

发现: 1) 具有类似于前述光滑弱散射情形的收敛特性, 但收敛速度有所下降, 且重建误差相对增加, 此时 20 次迭代的 RRE 约为 1.5 × 10<sup>-3</sup>; 2) 重建图像也呈现超分辨率 (中间相距 4 mm 的 s<sub>3</sub>, s<sub>4</sub> 清晰可辨); 3) 重建图像尽管存在少许伪像和目标模糊 (如s<sub>1</sub>), 但总体上较好地重现了 5 个散射体的形状、尺寸、位置等目标信息. s<sub>1</sub> 和 s<sub>2</sub> 之间、s<sub>3</sub> 和 s<sub>4</sub> 之间的重建效果对比均表明, 相同尺寸、相同深度条件下, 强散射目标有利于反演识别. s<sub>2</sub> 和 s<sub>5</sub> 之间的重建效果对比表明, 相同电参数、相同深度条件下, 较大尺寸目标易产生较强散射, 从而有利于反演识别.

#### 4.4 非光滑强散射

算例4给出有耗背景媒质中的非光滑强散射情形: 散射目标区的最大相对介电常数、电导率分别为背景媒质的2、10倍以上. 散射目标区及其散

射体的几何尺寸、其网格剖分、散射体编号方式及天线位置与算例3相同. 背景媒质的相对介电常数、电导率分别为2.0,0.0020 S/m, s<sub>1</sub>, s<sub>3</sub> 的相对介电常数、电导率分别为3.0,0.010 S/m,其余的相对介电常数、电导率分别为4.2,0.022 S/m. 为了考察脉冲特性对重建效果的影响,其他条件相同时,本算例分别采用脉冲1,2进行了数值实验. 真实的相对介电常数、电导率分布离散后分别如图13(a)、图14(a)所示. 图13(b)、图14(b)分别为相对介电

常数、电导率的迭代初值分布,图 13 (c)、图 14 (c)分别为采用脉冲1时重建的相对介电常数、电导率分布,图 13 (d)、图 14 (d)分别为采用脉冲2时重建的相对介电常数、电导率分布,图 13 (e)、图 14 (e)分别给出采用脉冲1时 y=10 mm 处重建的相对介电常数、电导率分布和相应真实分布的对比,图 13 (f)、图 14 (f)分别给出采用脉冲2时 y=10 mm 处重建的相对介电常数、电导率分布和相应真实分布的对比,图 15 为重建误差随迭代次数的变化关系.

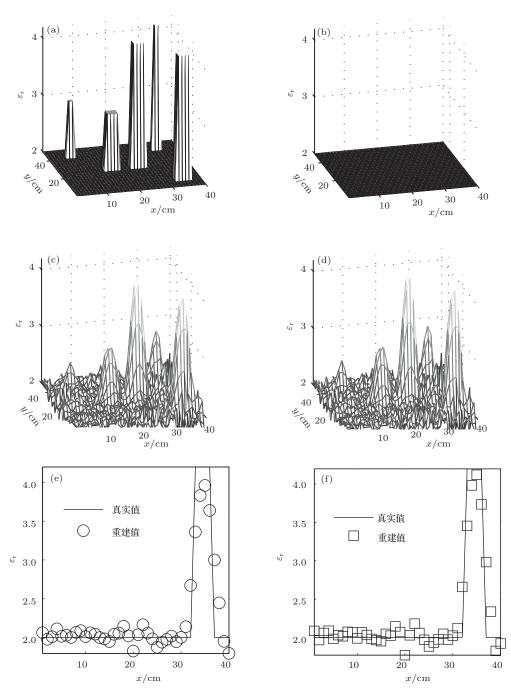


图 13 相对介电常数分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值 (脉冲 1); (d) 重建值 (脉冲 2); (e) y=10 mm 处的对比 (脉冲 1); (f) y=10 mm 处的对比 (脉冲 2)

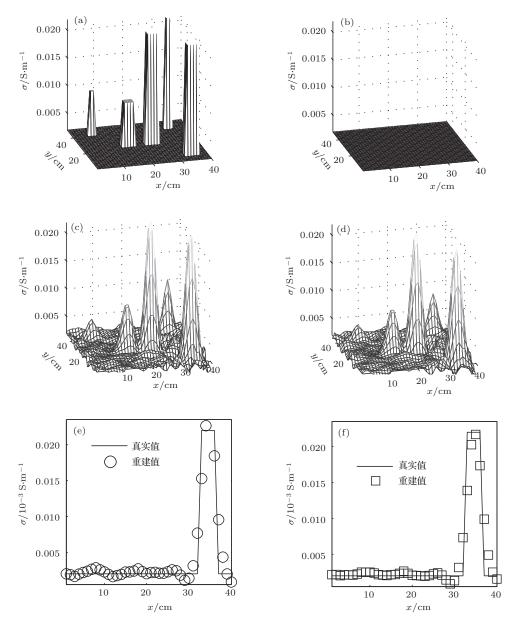


图 14 电导率分布 (a) 真实值; (b) 迭代初值; (c) 重建值 (脉冲 1); (d) 重建值 (脉冲 2); (e) y = 10 mm 处的对比 (脉冲 1); (f) y = 10 mm 处的对比 (脉冲 2)

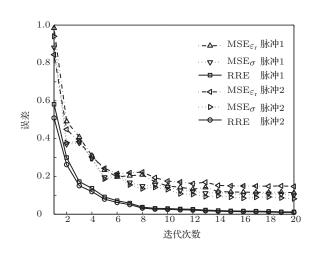


图 15 迭代误差

对于非光滑强散射情形, 比较、分析所得结果, 也有类似于算例 3 的发现, 本文算法依然收敛, 但总体重建精度进一步下降, 20 次迭代时, RRE 约为  $2.7 \times 10^{-3}$ , 不过部分区域 (如 y = 10 mm 处) 重建效果略好于算例 3. 另外, 相比之下, 重建目标  $s_4$  和  $s_5$ , 前者略差于后者, 可能由于  $s_4$  位于散射区较深位置, 距离信号源较远, 信号在有耗媒质中经受衰减, 以致来自  $s_4$  的散射信号较弱, 解决方法是适当降低激励源的工作频率. 当然, 这也会同时降低重建图像的分辨率, 在实际应用中, 可以在检测深度和重建分辨率之间折中选择 [6].

另外,从重建结果图13、图14和迭代误差图15来看,相比之下,采用脉冲1时电导率的重

建效果较好,采用脉冲2时介电常数的重建效果较好,总体上采用脉冲1时的重建效果较好.究其原因:若目标函数(2)式的实部和虚部的绝对值相当时的最佳频率约为 2.5 GHz;采用脉冲1时20个采样频点中13个低于该值,可见频率低时,电导率对散射场的贡献大,因此有利于反演电导率;采用脉冲2时20个采样频点中11个高于该值,可见频率高时,介电常数对散射场的贡献大,因此有利于反演介电常数;总体上,采用脉冲1时,接近最佳频率的采样频点数占优,双参数的贡献相对均衡,因此重建的总体效果相对较好.所以,若能先验获知目标的此类信息,应该善加利用以选择恰当的脉冲源,改善重建性能.

概括起来,四个算例的数值结果显示:在视角受限和噪声环境下,四类散射目标的相对介电常数和电导率均被成功重建,再现了散射体的形状、位置和尺寸等目标信息,重建图像呈现毫米量级超分辨率,有望应用到早期乳腺癌检测等实际问题中[16-18]

### 5 结 论

利用 UWB 脉冲进行时域近场测量,并进行双参数 (介电常数、电导率)同时反演是一类重要电磁逆散射方法,在生物医学成像、无损检测等领域具有良好的应用前景.为了直接反演 2D 时域数据,本文将 GNI 迭代算法从频域发展到时域.迭代过程中,正问题由 FDTD 法求解,经自适应正则化的逆问题由 FFT 结合 CG 法求解.对于各向同性、线性和非色散的无磁媒质,四类 2D 数值算例的仿真结果初步证实了时域 GNI 算法的可行性和鲁棒性.当然,不少问题尚待进一步探讨,例如:1)本文算法与其他算法的性能对比;2) 先验信息对算法性能

的影响; 3) 推广到其他类型媒质(如色散媒质); 4) 推广到更一般的 3D 情形; 5) 实验验证等等.

#### 参考文献

- Wang Y M, Chew W C 1989 Int. J. Imaging Syst. Technol. 1 100
- [2] Chew W C, Wang Y M 1990 IEEE Trans. Med. Imaging 9 218
- [3] Yu W H, Peng Z Q, Ren L 1995 J. Microw. **11** 97 (in Chinese) [余文华, 彭仲秋, 任朗 1995 微波学报 **11** 97]
- [4] Nie Z P, Zhang Y R 1998 IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 36 749
- [5] Takenaka T, Jia H, Tanaka T 2000 J. Electromagn. Waves Appl. 14 1609
- [6] Liu G D, Zhang Y R 2010 Acta Phys. Sin. **59** 6969 (in Chinese)[刘广东, 张业荣 2010 物理学报 **59** 6969]
- [7] Ali M A, Moghaddam M 2010 IEEE Trans. Antennas Propag. 58 2327
- [8] Mojabi P, LoVetri J 2011 IEEE Trans. Antennas Propag. 59 2954
- [9] Wang F F, Zhang Y R 2012 Acta Phys. Sin. **61** 084101 (in Chinese)[王芳芳, 张业荣 2012 物理学报 **61** 084101]
- [10] Wang F F, Zhang Y R 2012 Chin. Phys. B  $\mathbf{21}$  050204
- [11] Chiu C C, Sun C H, Li C L, Huang C H 2013 IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 51 2302
- [12] Ge D B, Yan Y B 2005 Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves (2nd Ed.) (Xi'an: Xidian University Press) (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2005 电磁波时域有限差分法 (第二版)(西安: 西安电子科技大学出版社)]
- [13] Gennarelli G, Soldovieri F 2013 IEEE Geosci. Remote Sens. Lett. 10 1085
- [14] Dai Y H 2003 Math. Comput. 17 1317
- [15] Abubakar A, Habashy T, Druskin V, Knizhnerman L, Alumbaugh D 2008 Geophysics 73 165
- [16] Liu G D, Zhang Y R 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074303 (in Chinese)[刘广东, 张业荣 2011 物理学报 **60** 074303]
- [17] Xiao X, Xu L, Liu B Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044105 (in Chinese)[肖夏, 徐立, 刘冰雨 2013 物理学报 **62** 044105]
- [18] Shahzad A, O'Halloran M, Jones E, Glavin M 2013 IEEE Trans. Antennas Wireless Propag. Lett. 12 500

# A time-domain Gauss-Newton inversion algorithm for solving two-dimensional electromagnetic inverse scattering problems\*

Liu Guang-Dong<sup>†</sup> Zhang Kai-Yin

(College of Physical and Electronic Science, Fuyang Teachers College, Fuyang 236037, China)

( Received 23 August 2013; revised manuscript received 28 September 2013 )

#### Abstract

The Gauss-Newton inversion (GNI), an iterative algorithm, is developed from the frequency domain to the time domain in order to simultaneously reconstruct the electrical permittivity and electric conductivity of a two-dimensional object of interest by directly using the ultra-wideband time-domain measurement data. The resulting forward problem is solved by the finite difference time domain method, while the ill-posedness of the corresponding inverse problem is restrained by an adaptive regularization technique at each iteration. Furthermore, the modified GNI algorithm is applied to four types of numerical examples where a noise model is considered, and the simulated results preliminarily demonstrate its feasibility and robustness. The reconstructed images present super resolution, thus it is expected to be used in the engineering practice such as the detection of the early-stage breast cancer.

**Keywords:** electromagnetic inverse scattering, Gauss-Newton inversion (GNI), finite difference time domain (FDTD), regularization

**PACS:** 41.20.-q, 81.70.Ex, 87.85.Pq, 84.40.-x **DOI:** 10.7498/aps.63.034102

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61071022, 51271059), the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant No. 1308085MA13), the Science and Technology Program of Anhui Province, China (Grant No. 12010302080), and the Key Foundation of the Fuyang Teachers College, China (Grant No. 2011FSKJ01ZD).

 $<sup>\</sup>dagger$  Corresponding author. E-mail: <code>liu\_guang\_dong@126.com</code>