

轴对称环状静电模的漂移波湍流参量激发 理论研究*

章扬忠^{1)†} 谢涛²⁾

1)(中国科学院磁聚变理论中心, 合肥 230031)

2)(核工业西南物理研究院, 成都 610041)

(2013年7月20日收到; 2013年9月26日收到修改稿)

本文所论述的轴对称环状静电模是指环形磁约束等离子体(如托卡马克)中环向模数为零的近理想静电流体模, 它包含有测地声模和基频率与之较低的声模; 也含有所谓的‘近零频带状流’. 本文根据冷离子流体模型在圆形磁面构成的准环坐标系中的表示, 对涉及以上三种模式的漂移波湍流参量激发理论, 在一级环形成效应近似下, 进行了系统讨论, 并证明了带状流的四个新命题. 利用对漂移波能谱的参数化描写, 注意到由漂移波能谱径向有限宽度所引发的特性, 如波能传播量的双Landau奇点, 揭示了有限宽度对径向 δ 谱所得结果的重要修正: 如, 对近零频带状流和测地声模的参量激发条件带来的严格限制. 此外, 还讨论了密度带状流在高 q 条件下被激发的可能性. 本文选用合理的物理参数. 采用图示方法详细地讨论了有关的数值结果. 分析表明, 测地声模和近零频带状流的参量激发不可能发生在同一小半径处; 如果测地声模被参量激发, 也应能观察到密度带状流.

关键词: 测地声模, 近零频带状流, 声模, 托卡马克

PACS: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.35.Dm, 52.55.Fa

DOI: 10.7498/aps.63.035202

1 引言

近零频带状流和测地声模是自上世纪末以来很受托卡马克研究者们关注的两种轴对称静电模^[1-18]; 这因为由他们导致的剪切流被认为是触发低-高模转换的重要环节^[1-3]. 在诸多种导致他们产生的理论模型中, 由漂移波湍流诱发的参量激发机理可以看为一种很自然的选择; 但现有的理论^[4,5]是在不同框架下构造的: 近零频带状流的参量激发理论^[4]采用无曲率的Hasegawa-Mima模型^[19], 而测地声模的参量激发理论^[5]采用圆磁面托卡马克位形的流体模型. 一个显见的问题是, 在后者^[5]的模型下, 基于Hasegawa-Mima模型建立起来的理论^[4]是否继续正确? 托卡马克曲率对文

献^[4]所给出的结论是否有所修正? 另一个值得注意的问题是, 漂移波湍流在激发这两种模式的同时也有可能激发人们通常称之为的‘离子声模’. 虽然, 至今没有见到轴对称离子声模在实验上被观察到的报道, 也还需要理解, 为什么能看到测地声模, 而不能看到离子声模?

出于对这两个问题的思考, 本文试图从圆磁面托卡马克位形的可压缩流体模型出发, 设计一个能统一描述以上三种轴对称声模的理论构架. 所采用的出发点是在文献^[20]中导出的描写轴对称电位和密度的两个偏微分方程, 分别称为电荷守恒律和粒子数守恒律; 并在其基础之上加入了由漂移波湍流给出的非线性极化流的贡献. 重要的一步是充分利用托卡马克大平行电导率的性质, 把轴对称模分为极向的纯振荡部分和平均部分. 前者给出了密度

* ITER中国计划(批准号: 2010GB107000)、国家自然科学基金(批准号: 11075162)和国家磁约束聚变科学计划(批准号: 2009GB101002)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhang_yz@ipp.ac.cn

响应的‘绝热近似’表示, 而后者分别称为密度带状流和电位带状流, 之间无关联. 相对带状流, 纯振荡部分被称为正, 余弦声模.

进一步注意到, 在大环状比的一级近似下 ($\varepsilon \ll 1$), 面平均与对极角平均存在 ε 级的差别. 利用这一点和纯振荡的‘绝热近似’, 导出密度带状流正比于 ε 和一次余弦声模振幅的乘积. 由此证明了第一个新命题.

命题 1 密度带状流仅由一次环状余弦声模的激发决定, 与电位带状流无关. 至此, 描写密度和电位的耦合方程已被化为描写电位带状流和纯振荡电位的耦合方程.

求解了介观尺度下声模方程在 ε 一级近似下的角向结构, 并建立了一次正弦模, 二次正弦模和一次余弦模的径向方程. 一次和二次正弦模与带状流有耦合, 余弦模和二次以上正弦模与带状流没有耦合. 推导了一次, 二次正弦模与带状流的耦合方程. 由此证明了另三个新命题.

命题 2 测地声模是一次环状正弦声模与近零频带状流的(测地曲率)耦合色散方程的高频分支. 该方程的低频分支相当于‘环形修正近零频带状流’.

命题 3 二次正弦模与带状流仅存在微弱的耦合, 就好像分别独立的二次正弦声模与圆柱近零频带状流.

命题 4 环状余弦声模及二次以上的环状正弦声模与近零频带状流解耦.

为分析和计算这些模的参量激发, 引入了漂移波湍流能谱的参数化描写. 这里着重指出了两个看点: 参量激发因子 Λ 与波频成正比(参见(41)式)及波能传播量的双 Landau 奇点(参见对图 1 的解释). 采用 Gauss 型能谱对参量激发与系统参数的关系做了计算, 并在合理的物理参数区进行了讨论. 数值结果的表现方式以无量纲化物理量(参见(3)式后的定义)为基础做了第二次规一化(参见(42)和(43)式).

2 轴对称冷离子流体静电模方程及其在绝热近似下的表示

本文的出发点是 Braginskii 冷离子流体模型^[21]; 在圆形磁面构成的准环坐标系中把该模型应用于轴对称模(即环向模数为零的模), 在适用于托卡马克的近似下, 导出了涨落电位和涨落密度

所服从的两个线性偏微分方程^[20]. 在此基础之上, 再加入由漂移波湍流所诱发的非线性极化流的贡献. 这两个方程分别是‘电荷守恒律’

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \varepsilon \sin \vartheta \right) \frac{\sigma_{\delta}(0) \tau^{3/2}}{z_{\text{eff}} q^2} (1 - 2\varepsilon \cos \vartheta) \\ & \times \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\tau}{\mu} \hat{n} - \hat{\varphi} \right) - 2 \sin \vartheta \delta \frac{\partial}{\partial \rho} \tau \hat{n} \\ & + \mu \left(i \hat{\omega} \delta^2 \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \rho^2} + \frac{\delta \tau}{\varepsilon} \hat{s}_{\text{drift}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

和‘粒子数守恒律’

$$\begin{aligned} & \hat{\omega}^2 \hat{n} + \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \varepsilon \sin \vartheta \right) \frac{\tau}{q^2} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \vartheta} + i \hat{\omega} \mu \\ & \times \left[-2 \sin \vartheta \delta \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\varphi} + i \hat{\omega} \delta^2 \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \rho^2} + \frac{\delta \tau}{\varepsilon} \hat{s}_{\text{drift}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

这里, $\hat{n} \equiv \tilde{n}/n_0$ 和 $\hat{\varphi} \equiv e\tilde{\varphi}/T_e$ 分别代表归一化的涨落密度和涨落电位, n_0 为平衡密度, T_e 为平衡电子温度, e 是基本电荷, $\delta \equiv \omega(0)/\varepsilon_0 \omega_{ci}(0) \equiv \rho_s(0)/a$, (0) 代表该量在某个径向位置(该量参考点)上的值, a 是小半径, $\rho \equiv r/a$, r 是径向坐标, ϑ 是角向坐标, $\hat{\omega} \equiv \omega/\omega(0)$, $\omega(0) \equiv c_s(0)/R_0$, R_0 是磁轴处的大半径, $c_s \equiv \sqrt{T_e/m_i}$ 是离子声速, $\rho_s \equiv c_s/\omega_{ci}$ 是电子温度下的离子迴旋半径, $\sigma_{\delta}(0) \equiv (2m_i/m_e) (\omega(0)/\nu_{ei})$, z_{eff} 为有效电荷, ν_{ei} 是电子碰撞频率, m_i 和 m_e 分别为离子和电子质量, $q = q(\rho)$ 为安全因子, $\varepsilon_0 \equiv a/R_0$, $\varepsilon \equiv \rho \varepsilon_0$, τ 和 μ 是归一化到参考点(0)的平衡温度和密度分布函数, 即 $T_e(\rho) = T_e(0)\tau(\rho)$ 及 $n_0(\rho) = n_0(0)\mu(\rho)$; 以及

$$\hat{s}_{\text{drift}} \equiv -\nabla \cdot \int d\mathbf{k} \mathbf{k}_{\perp} (\mathbf{b} \times \mathbf{k}) \cdot \nabla I_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

是由漂移波湍流所引起的非线性极化流散度. 其中, 漂移波波数 \mathbf{k} 归一化到 $\rho_s(0)$, 空间梯度算子 ∇ 归一化到 a , $I_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ 是漂移波的 Wigner 函数, 在很多文献中亦称波能, 定义为

$$I_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \equiv \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}. \quad (4)$$

$\hat{\phi}_{\mathbf{k}}$ 是波数表象中漂移波(到热能)的归一化电位. 在参量激发的讨论中, 仅选用 Wigner 函数与受激波的相干部分. 它通过波能演化方程使非线性极化流散度 \hat{s}_{drift} 表示为受激波的线性泛函. 波能所含的时空变量 (\mathbf{r}, t) 与受激波同步.

由于 $\sigma_{\delta}(0)$ 是一个很大的量, (1) 式在最低级近

似下可表示为

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \varepsilon \sin\vartheta\right) \frac{\sigma_\delta(0)\tau^{3/2}}{z_{\text{eff}}q^2} (1 - 2\varepsilon \cos\vartheta) \times \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\frac{\tau}{\mu} \hat{n} - \hat{\varphi}\right) = 0. \quad (5)$$

为确切表达该方程的解, 把电位和密度分解为相对极角的平均部分和纯振荡部分.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\rho, \vartheta) &\equiv \bar{\varphi}(\rho) + \tilde{\varphi}(\rho, \vartheta), \\ \hat{n}(\rho, \vartheta) &\equiv \bar{n}(\rho) + \tilde{n}(\rho, \vartheta), \end{aligned} \quad (6)$$

平均部分称为带状流, 而纯振荡部分对极角的周期积分为零.

$$\oint d\vartheta \tilde{\varphi}(\rho, \vartheta) = 0, \quad \oint d\vartheta \tilde{n}(\rho, \vartheta) = 0. \quad (7)$$

(5) 式所给出的关系意味着决定密度纯振荡部分的最低级解:

$$\frac{\tau}{\mu} \tilde{n} - \tilde{\varphi} = 0. \quad (8)$$

该式在文献中通常被称为绝热近似. 需要指出的是, 在正确到 ε 一级的近似下, 对极角的积分不等价对磁面平均. 在环坐标中的磁面平均还有一个权因子 $1 + \varepsilon \cos\vartheta$, 定义为

$$\langle \cdots \rangle_\vartheta \equiv \oint d\vartheta \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos\vartheta\right) \cdots. \quad (9)$$

可直接证明对任意函数 Ψ 有

$$\oint d\vartheta \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos\vartheta\right) \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{r}{R} \sin\vartheta\right) \Psi = 0. \quad (10)$$

故在 (1), (2) 两式中可采用面平均 (9) 式把平行效应消去.

对 (1) 式的面平均给出

$$\begin{aligned} -2\delta \left\langle \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\rho} \tau \tilde{n} \right\rangle_\vartheta \\ + \mu \left(i\hat{\omega} \delta^2 \left\langle \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial\rho^2} \right\rangle_\vartheta + \frac{\delta\tau}{\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_\vartheta \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

对 (2) 式的面平均给出

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^2 \left(\bar{n} + \varepsilon \oint d\vartheta \tilde{n} \cos\vartheta \right) \\ + i\hat{\omega}\mu \left[-2\delta \frac{\partial}{\partial\rho} \left\langle \sin\vartheta \tilde{\varphi} \right\rangle_\vartheta \right. \\ \left. + i\hat{\omega} \delta^2 \left\langle \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial\rho^2} \right\rangle_\vartheta + \frac{\delta\tau}{\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_\vartheta \right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

把绝热近似 (8) 式代入 (11) 式后, 得

$$-2\delta \frac{\partial}{\partial\rho} \left\langle \sin\vartheta \tilde{\varphi} \right\rangle_\vartheta + i\hat{\omega} \delta^2 \left\langle \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial\rho^2} \right\rangle_\vartheta$$

$$+ \frac{\delta\tau}{\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_\vartheta = 0. \quad (13)$$

故, (12) 式约化为

$$\bar{n} = -\varepsilon \frac{\mu}{\tau} \oint d\vartheta \tilde{\varphi} \cos\vartheta. \quad (14)$$

把绝热近似 (8) 及 (14) 式代入粒子数守恒律 (2) 式得到

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\omega}^2}{\tau} \left(\tilde{\varphi} - \varepsilon \oint d\vartheta \tilde{\varphi} \cos\vartheta \right) + \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \varepsilon \sin\vartheta \right) \frac{1}{q^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial\vartheta} \\ + i\hat{\omega} \left[-2 \sin\vartheta \delta \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial\rho} + i\hat{\omega} \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial\rho^2} + \frac{\delta\tau}{\varepsilon} \hat{s}_{\text{drift}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

至此, 利用绝热近似得到两个新的方程 (13) 和 (15); 它们是 $\bar{\varphi}$ 和 $\tilde{\varphi}$ 的耦合方程, 分别称为带状流方程和声模方程.

3 声模方程在径向介观尺度下的微扰迭代解

对径向为介观尺度的声模, 即 $\bar{\delta} \equiv \delta(\partial/\partial\rho) \ll 1$, 声模方程 (15) 的最低级为

$$\begin{aligned} \beta \left(\tilde{\varphi} - \varepsilon \oint d\vartheta \tilde{\varphi} \cos\vartheta \right) \\ + \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \varepsilon \sin\vartheta \right) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial\vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

这是一个非齐次本征值问题, 其中用 β 代表 $\hat{\omega}^2 q^2 / \tau$; 但非齐次项, 即 (16) 式中的常数项, 仅对一次余弦声模才不为零. 对其余各次谐波: 一次正弦声模和二次及更高的正, 余弦声模, 该项为零. 因其仅与角向结构有关, 可用 $F(\vartheta)$ 描写 $\tilde{\varphi}$ 的角向结构. 通过以下函数变换:

$$F(\vartheta) \equiv \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \cos\vartheta\right) f(\vartheta) \quad (17)$$

和变量变换 $\vartheta \equiv 2z + \pi$, (16) 式的齐次方程可化为 Mathieu 方程的正则形式

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + (4\beta - 2\varepsilon \cos 2z) f = 0. \quad (18)$$

对应的本征值问题是 Mathieu 方程的全周期解. 把 (16) 式的齐次方程记为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \varepsilon \sin\vartheta \right) \frac{\partial F_\nu^{(\alpha)}(\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{\lambda_\nu^{(\alpha)}}{4} F_\nu^{(\alpha)}(\vartheta) = 0, \\ (\nu = 1, 2, \cdots), \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$F_\nu^{(\alpha)}(\vartheta) \equiv e^{-\frac{\varepsilon}{2} \cos\vartheta} f_\nu^{(\alpha)}(\vartheta), \quad (20)$$

α, ν 是标识 Mathieu 函数全周期解 $ce_{2\nu}$ 或 $se_{2\nu+2}$ 的指标 [22]:

$$f_\nu^{(c)}(\vartheta) \equiv ce_{2\nu}(z, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2\nu)} \cos[r(\vartheta - \pi)], \quad (21)$$

$$f_\nu^{(s)}(\vartheta) \equiv se_{2\nu+2}(z, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2\nu+2)} \sin[(r+1)(\vartheta - \pi)], \quad (22)$$

$\lambda_\nu^{(\alpha)}$ 是对应 Mathieu 函数 $f_\nu^{(\alpha)}(\vartheta)$ ($ce_{2\nu}$ 或 $se_{2\nu+2}$) 的本征值.

本文仅讨论 (16) 式的三个最低级解, 其正确到 ε 级的本征函数和本征值由表 1 给出.

表 1 声模方程式 (16) 的低阶本征函数和本征值

名称	本征函数	本征值 β
一次正弦模	$f_1^{(s)} = \sin \vartheta + \frac{\varepsilon}{12} \sin 2\vartheta$	1
一次余弦模	$F_1^{(c)} = \cos \vartheta - \frac{\varepsilon}{6} \cos 2\vartheta$	1
二次正弦模	$f_2^{(s)} = \sin 2\vartheta + \varepsilon \left(\frac{1}{20} \sin 3\vartheta - \frac{1}{12} \sin \vartheta \right)$	4

记本征声模的可分离变量解为

$$\tilde{\varphi}(\rho, \vartheta) = \chi_\nu^{(\alpha)}(\rho) F_\nu^{(\alpha)}(\vartheta), \quad (23)$$

将其代入 (15) 式, 再利用 (13) 式得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q^2 \hat{\omega}^2}{\tau} - \frac{\lambda_\nu^{(\alpha)}}{4} \right) \chi_\nu^{(\alpha)} \left[F_\nu^{(\alpha)} - \varepsilon \oint d\vartheta F_\nu^{(\alpha)} \cos \vartheta \right] \\ & + i \hat{\omega} q^2 \left[\frac{\delta \tau}{\varepsilon} \hat{s}_{\text{drift}} + i \hat{\omega} \delta^2 \frac{\partial^2 \chi_\nu^{(\alpha)}}{\partial \rho^2} \left(F_\nu^{(\alpha)} - \langle F_\nu^{(\alpha)} \rangle_\vartheta \right) \right. \\ & - 2\delta \sin \vartheta \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \rho} + 2\delta \left(\langle \sin \vartheta F_\nu^{(\alpha)} \rangle_\vartheta \right. \\ & \left. \left. - \sin \vartheta F_\nu^{(\alpha)} \right) \frac{\partial \chi_\nu^{(\alpha)}}{\partial \rho} \right] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\hat{s}_{\text{drift}} \equiv \hat{s}_{\text{drift}} - \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_\vartheta$. 按参量激发的思想, 在非线性极化流中仅取对本征声模的线性响应, 即

$$\hat{s}_{\text{drift}} \rightarrow \hat{s}_{\text{drift}} \left[\chi_\nu^{(\alpha)} F_\nu^{(\alpha)} \right] \equiv \chi_\nu^{(\alpha)} F_\nu^{(\alpha)} \bar{s}_{\text{drift}}.$$

为求径向结构 $\chi_\nu^{(\alpha)}(\rho)$ 所满足的方程, 将 (24) 式先乘以 $F_\nu^{(\alpha)}(\vartheta)$ 的对偶函数 $\tilde{F}_\nu^{(\alpha)}(\vartheta)$, 再对 ϑ 积分. 对一次余弦模, 选对偶函数为 $F_1^{(c)}(\vartheta)$, 而对其余模选

$$\tilde{F}_\nu^{(\alpha)}(\vartheta) \equiv \exp[(\varepsilon/2) \cos \vartheta] f_\nu^{(\alpha)}(\vartheta),$$

以便利用 Mathieu 函数的正交归一性.

由此得到的径向方程分别为:

一次正弦模

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{q^2 \hat{\omega}^2} - \frac{1}{\tau} - i \frac{\delta \tau}{\hat{\omega} \varepsilon} \bar{s}_{\text{drift}} \right) \chi_1^{(s)}(\rho) \\ & + \delta^2 \frac{\partial^2 \chi_1^{(s)}(\rho)}{\partial \rho^2} = -i \frac{2}{\hat{\omega}} \delta \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \rho}; \end{aligned} \quad (25)$$

一次余弦模

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{q^2 \hat{\omega}^2} - \frac{1}{\tau} - i \frac{\delta \tau}{\varepsilon \hat{\omega}} \bar{s}_{\text{drift}} \right) \chi_1^{(c)}(\rho) \\ & + \delta^2 \frac{\partial^2 \chi_1^{(c)}(\rho)}{\partial \rho^2} = 0; \end{aligned} \quad (26)$$

二次正弦模

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{q^2 \hat{\omega}^2} - \frac{1}{\tau} - i \frac{\delta \tau}{\hat{\omega} \varepsilon} \bar{s}_{\text{drift}} \right) \chi_2^{(s)}(\rho) \\ & + \delta^2 \frac{\partial^2 \chi_2^{(s)}(\rho)}{\partial \rho^2} = -i \frac{\varepsilon}{3} \delta \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (27)$$

利用 Mathieu 函数的理论可以直接证明, 其余的环状声模, 包括二次余弦和三次正弦及其以上的声模均与带状流解耦.

这里提请注意环形效应的两个重要结果. 一个是密度带状流与一次余弦声模之间的关系 (参见上节 (14) 式及本节对一次余弦声模的求解); 另一是二次正弦声模与带状流的弱耦合. 因为一次余弦声模与带状流解耦, 所以密度带状流与电位带状流之间的相位是相互独立的.

4 正弦声模与带状流的耦合, 测地声模方程

4.1 一次正弦声模

把一次正弦声模 $\tilde{\varphi}(\rho, \vartheta) \rightarrow \chi_1^{(s)}(\rho) \sin \vartheta$ 代入带状流方程 (13) 后得

$$-\frac{\partial \chi_1^{(s)}}{\partial \rho} + i \hat{\omega} \delta \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \rho^2} + \frac{\tau}{\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_\vartheta = 0, \quad (28)$$

它在波数表象为

$$\frac{\tau}{i\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_\vartheta - \hat{\omega} \delta p^2 \tilde{\varphi} = p \chi_1^{(s)}. \quad (29)$$

一次正弦声模方程 (25) 在波数表象为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{q^2 \hat{\omega}^2} + i \frac{\delta \tau}{\hat{\omega} \varepsilon} \bar{s}_{\text{drift}} + \delta^2 p^2 \right) \chi_1^{(s)}(\rho) \\ & = -\frac{2}{\hat{\omega}} \delta p \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (30)$$

由 (29) 和 (30) 式得一次正弦声模与带状流的耦合色散方程

$$\left(\frac{1}{\hat{\omega}^2 q^2} - \frac{1}{\tau} - \delta^2 p^2 - i \frac{\delta \tau}{\hat{\omega} \varepsilon} \bar{s}_{\text{drift}} \right)$$

$$\times \left(\frac{\tau}{i\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_{\vartheta} - \hat{\omega} \delta p^2 \bar{\varphi} \right) = \frac{2}{\hat{\omega}} \delta p^2 \bar{\varphi}, \quad (31)$$

在无参量激发情况下 $\hat{s}_{\text{drift}} \rightarrow 0$, (31) 式约化为测地声模的色散方程

$$\left[\frac{2}{\hat{\omega}^2} \left(1 + \frac{1}{2q^2} \right) - \frac{1}{\tau} - p^2 \delta^2 \right] \bar{\varphi}(p) = 0. \quad (32)$$

4.2 二次正弦声模

把二次正弦声模 $\varphi(\rho, \vartheta) \rightarrow \chi_2^{(s)}(\rho) \sin 2\vartheta$ 代入带状流方程 (13) 后得

$$-\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \chi_2^{(s)}}{\partial \rho} + i\hat{\omega} \delta \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \rho^2} + \frac{\tau}{\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_{\vartheta} = 0, \quad (33)$$

在波数表象为

$$\frac{\tau}{\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_{\vartheta} - i\hat{\omega} \delta p^2 \bar{\varphi} - \frac{\varepsilon}{2} i p \chi_2^{(s)} = 0. \quad (34)$$

二次正弦声模方程 (27) 在波数表象为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau} - \frac{4}{q^2 \hat{\omega}^2} + i \frac{\delta \tau}{\hat{\omega} \varepsilon} \bar{s}_{\text{drift}} + \delta^2 p^2 \right) \chi_2^{(s)}(\rho) \\ &= -\frac{\varepsilon}{3\hat{\omega}} \delta p \bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

由 (34) 和 (35) 式得二次正弦声模与带状流的耦合色散方程

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau} - \frac{4}{q^2 \hat{\omega}^2} + i \frac{\delta \tau}{\hat{\omega} \varepsilon} \bar{s}_{\text{drift}} + \delta^2 p^2 \right) \\ & \times \left(\frac{\tau}{i\varepsilon} \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_{\vartheta} - \hat{\omega} \delta p^2 \bar{\varphi} \right) = -\frac{\varepsilon^2}{6\hat{\omega}} \delta p^2 \bar{\varphi}, \end{aligned} \quad (36)$$

在没有参量激发下的局部色散方程为

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\hat{\omega}^2} \left[\frac{4}{q^2} + \frac{\varepsilon^2}{6} \right] + \delta^2 p^2 \right) \bar{\varphi} = 0. \quad (37)$$

由耦合项所给出对声模色散关系的修正效应 $\varepsilon^2/6$ 在通常放电参数下可以被略去. 这表明由圆柱模型下导出的近零频带状流色散关系

$$\hat{\omega} = \frac{\tau}{i\varepsilon \delta p^2} \bar{s}_{\text{drift}}, \quad (38)$$

在环形位形下依然是正确的.

5 漂移波能谱的参数化表述

当漂移波能量受到慢尺度模调制时能谱对其线性相干响应部分参与后者的色散关系, 并可导致参量不稳定性. 对声模和带状流分别表述为

$$\hat{s}_{\text{drift}} \rightarrow \chi_{\nu}^{(\alpha)} F_{\nu}^{(\alpha)} \bar{s}_{\text{drift}}, \quad \langle \hat{s}_{\text{drift}} \rangle_{\vartheta} \rightarrow \bar{\varphi} \bar{s}_{\text{drift}}. \quad (39)$$

为得到 \bar{s}_{drift} , 需要求解在慢尺度模影响下的波能演化方程. 在漂移波局部模型下得到 [4]

$$\begin{aligned} \bar{s}_{\text{drift}} &= i \frac{\delta \tau}{\varepsilon} p^4 \int d\mathbf{k} \frac{k_r k_{\vartheta}^2}{(1 + \tau \mathbf{k}^2)^2} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{(\text{in})} / \partial k_r}{(\hat{\omega} - v_{\text{gr}} p / \varepsilon)} \\ &\equiv i \frac{\delta \tau}{\varepsilon} p^4 \Lambda(\hat{\omega}, p), \end{aligned} \quad (40)$$

其中, $N_{\mathbf{k}}^{(\text{in})}$ 是 $N_{\mathbf{k}} \equiv I_{\mathbf{k}} (1 + \tau \mathbf{k}^2)^2$ 中与慢尺度模非相干的部分. v_{gr} 是漂移波群速度 $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \equiv \partial \omega(\mathbf{k}) / \partial \mathbf{k}$ 的径向分量, $\omega(\mathbf{k})$ 为漂移波实频率, 在物理单位中记为 $\mathbf{V}_* \cdot \mathbf{k} / (1 + \rho_s^2 \mathbf{k}^2)$, $\mathbf{V}_* \equiv -\rho_s c_s \mathbf{b} \times \nabla \ln n_0$ 是逆磁漂移速度. 在本文中称 $\Lambda(\hat{\omega}, p)$ 为 Λ 因子. Λ 因子有一个很重要的性质: 它正比于波频率 $\hat{\omega}$. 这是由 $N_{\mathbf{k}}^{(\text{in})} \xrightarrow{|k_r| \rightarrow \infty} 0$ 所决定的.

为便于计算 Λ 因子, 设漂移波能谱角向用 δ 函数近似: $\delta(k_{\vartheta} - \kappa_{\vartheta})$, 相当于对角向参数化; 由此得到 $v_{\text{gr}}(k_r) = -2\tau^2 \kappa_{\vartheta} k_r \delta_L / (1 + \tau \kappa_{\vartheta}^2 + \tau k_r^2)^2$, $\delta_L \equiv \rho_s(0) / L_0$ (对正常密度剖面, 漂移波驱动特征长度 $L_0 > 0$).

$$\Lambda(\hat{\omega}, p) = -\frac{\hat{\omega} \kappa_{\vartheta}^2}{\xi} \int dk_r \frac{\partial N_{k_r}^{(\text{in})} / \partial k_r}{\hat{\omega} + \xi h(k_r)}, \quad (41)$$

其中, $h(k_r) \equiv k_r / (1 + \tau \kappa_{\vartheta}^2 + \tau k_r^2)^2$, $\xi \equiv 2\tau^2 \kappa_{\vartheta} \delta_L p / \varepsilon$.

在以下的应用中, 为减少独立参数的数目将使用另两种归一化.

1) 相速归一化

$$\Lambda(\hat{\omega}, p) = -\frac{\kappa_{\vartheta}^2 \Omega}{\xi} \int dk_r \frac{\partial N_{k_r}^{(\text{in})} / \partial k_r}{\Omega + \delta_L f(\kappa_r)}, \quad (42)$$

$$\Omega \equiv \frac{\varepsilon \hat{\omega}}{p \kappa_{\vartheta}} \left(\frac{1 + \tau \kappa_{\vartheta}^2}{\tau} \right)^{3/4}, \quad \kappa_r \equiv k_r \sqrt{\frac{\tau}{1 + \tau \kappa_{\vartheta}^2}},$$

$$\bar{\delta}_L \equiv 2\delta_L \left(\frac{\tau}{1 + \tau \kappa_{\vartheta}^2} \right)^{3/4}, \quad f(\kappa_r) \equiv \frac{\kappa_r}{(1 + \kappa_r^2)^2}.$$

2) 最少独立参数归一化

把强度从能谱中分离出来, $N_{k_r}^{(\text{in})} = I \bar{N}_{k_r}^{(\text{in})}$, 这里, $I \equiv \int dk_r N_{k_r}^{(\text{in})}$.

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \left(\frac{\tau p}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\Lambda}{\hat{\omega}} = -\frac{(\tilde{p} \sqrt{I})^2}{\tilde{p} \sqrt{I} \bar{\delta}_L / \sqrt{I}} \\ &\times \int dk_r \frac{\partial \bar{N}_{k_r}^{(\text{in})} / \partial k_r}{\hat{\omega} + \tilde{p} \sqrt{I} \bar{\delta}_L / \sqrt{I} f(\kappa_r)}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\bar{\delta}_L / \sqrt{I} = \frac{2\delta_L}{\sqrt{I}} \left(\frac{\tau}{1 + \tau \kappa_{\vartheta}^2} \right)^{3/4},$$

$$\tilde{p}\sqrt{I} \equiv \frac{p\kappa_\vartheta\sqrt{I}}{\varepsilon} \left(\frac{\tau}{1+\tau\kappa_\vartheta^2} \right)^{3/4},$$

$$\tilde{\delta}_L/\sqrt{I}\tilde{p}\sqrt{I} = \frac{2\delta_L p\kappa_\vartheta}{\varepsilon} \left(\frac{\tau}{1+\tau\kappa_\vartheta^2} \right)^{3/2} \approx \frac{\delta_L p\kappa_\vartheta}{\varepsilon}.$$

这里明显地看到, 波能传播量是径向波数的非线性函数, 体现在 $f(\kappa_r)$ 中, 由图 1 所示. 它在 $\kappa_0 = 1/\sqrt{3}$ 有极大值为 $f(\kappa_0) = 3\sqrt{3}/16 \approx 0.324$. 由此定出相速归一化中的 $\Omega_{\max} \equiv (3\sqrt{3}/16)\delta_L$, 对频率高于 Ω_{\max} 的模不存在 Landau 共振条件. 而对频率低于 Ω_{\max} 的模有两个 Landau 奇点, 称为双 Landau 奇点.

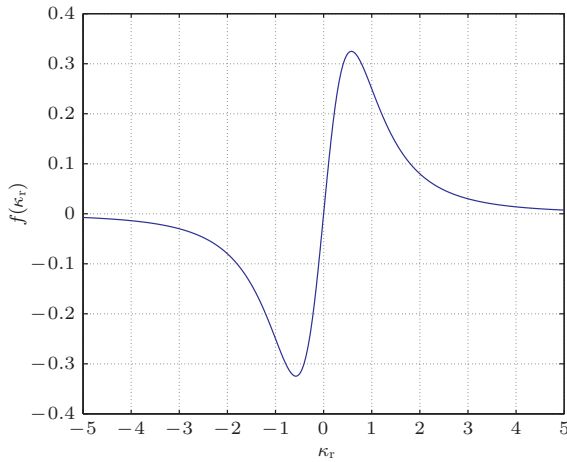


图 1 漂移波波能传播量非线性函数 $f(\kappa_r)$

在以下的数值分析中设径向能谱为有限宽度的 Gauss 型, 存在峰位对零点偏移, 允许左右峰宽不对称; 谱强度 I 为谱形的面积

$$N_k^{(\text{in})} = \frac{I}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(\kappa-\kappa_*)^2/2\sigma}. \quad (44)$$

下面的计算约定用 σ_1 代表 $\kappa < \kappa_*$ 一方的宽度, 用 σ_2 代表 $\kappa > \kappa_*$ 一方的宽度.

6 轴对称静电模参量激发的典型特征

6.1 近零频带状流

正如在第 4 节末所做的分析, 在有曲率的环形位形下, 由圆柱托卡马克位形所导出的近零频带状流色散关系也有独立的意义.

利用相速归一化的表示 (42) 式, 该色散关系 (38) 式还可写为

$$\int d\kappa \frac{1}{\Omega + \bar{\delta}_L f(\kappa)} \frac{\partial N_k^{(\text{in})}}{\partial \kappa} + \bar{\delta}_L = 0. \quad (45)$$

波能强度 I 在物理区的值约为 $\approx 10^{-8}$. 在本节数值计算中如设 $I = 1$, 相当于把 Ω 和 $\bar{\delta}_L$ 从各自的物理值增加了 10^4 倍.

1) 对称谱的实频率为零. 对称谱是指 (44) 式中的 $\kappa_* = 0, \sigma_1 = \sigma_2 \rightarrow \sigma$. 代入 $\Omega = \Omega_r + i\gamma$, 把 (45) 式的分式有理化后得到两个独立的方程:

$$\int d\kappa \frac{\Omega_r + \bar{\delta}_L f(\kappa)}{[\Omega_r + \bar{\delta}_L f(\kappa)]^2 + \gamma^2} \frac{\partial N_k^{(\text{in})}}{\partial \kappa} + \bar{\delta}_L = 0 \quad (46)$$

及

$$\int d\kappa \frac{1}{[\Omega_r + \bar{\delta}_L f(\kappa)]^2 + \gamma^2} \frac{\partial N_k^{(\text{in})}}{\partial \kappa} = 0. \quad (47)$$

由 (47) 式被积函数的奇偶性可判定 $\Omega_r = 0$. 故近零频带状流的有限频率仅由谱的非对称性 (或 $\kappa_* \neq 0$, 或 $\sigma_1 \neq \sigma_2$, 或二者皆有) 引起.

2) 对称谱的色散关系. 把 $\Omega_r = 0$ 代入 (46) 式得

$$\int d\kappa \frac{f(\kappa)}{\bar{\delta}_L^2 f^2(\kappa) + \gamma^2} \frac{\partial N_k^{(\text{in})}}{\partial \kappa} + 1 = 0. \quad (48)$$

3) 激发阈值. 在 (48) 式中令 $\gamma \rightarrow 0$, 并代入 $f(\kappa)$ 得

$$2 \int d\kappa (1 + \kappa^2)^2 \frac{\partial N_k^{(\text{in})}}{\partial \kappa^2} + \bar{\delta}_L^2 = 0. \quad (49)$$

代入对称 Gauss 谱 (44) 后算出

$$\bar{\delta}_L^2 = I(1 + 2\sigma + 3\sigma^2)/\sigma. \quad (50)$$

最小阈值在 $\sigma = 1/\sqrt{3}$ 处, 对应 $\bar{\delta}_L$ 阈值 $\approx 2.3\sqrt{I}$. 这表明当能谱强度大于 $(\bar{\delta}_L/2.3)^2$ 时, 近零频带状流将被激发.

4) 最大增长率. 在 (48) 式中取小 $\bar{\delta}_L$ 极限

$$\gamma^2 = \frac{I}{\sigma^{3/2}\sqrt{2\pi}} \int d\kappa \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa^2)^2} e^{-\kappa^2/2\sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} I. \quad (51)$$

对给定 σ 的增长率在 $\bar{\delta}_L \rightarrow 0$ 达到最大. 另一方面, 注意到 $\sigma \rightarrow 0$ 对应 δ 谱, 对给定的 $\bar{\delta}_L$ 它给出最大的增长率, 对应的 $\bar{\delta}_L$ 阈值为无穷 (不受 $\bar{\delta}_L$ 阈值的限制).

通过 (48) 式的数值求解得到在给定强度 I 下有限宽度对 $\bar{\delta}_L$ 阈值的效应, 由图 2 和图 3 表示. 在图 2 中选择了几个特定宽度下近零频带状流的增长率随 $\bar{\delta}_L$ 的变化 (取 $I = 1$). 这些曲线与横轴的交点就是 $\bar{\delta}_L$ 的阈值. 对超过该阈值的 $\bar{\delta}_L$, (48) 式无解. 图 3 给出了对称谱的不稳定性边界, 它仅与

$\bar{\delta}_L/\sqrt{I}$ 和 σ 有关. 从图 3 明显看出, $\sigma \rightarrow 0$ 时 $\bar{\delta}_L$ 阈值的迅速变化 (由 1 的量级到无穷). 图 3(a) 绘出了

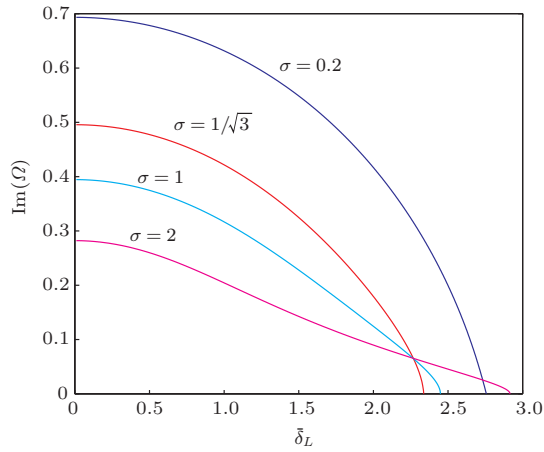


图 2 近零频带状流增长率对不同对称能谱宽度随 $\bar{\delta}_L$ 的变化 ($\kappa_* = 0, I = 1$)

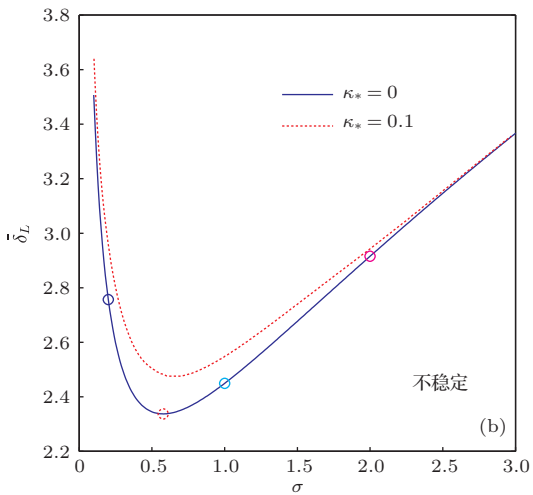
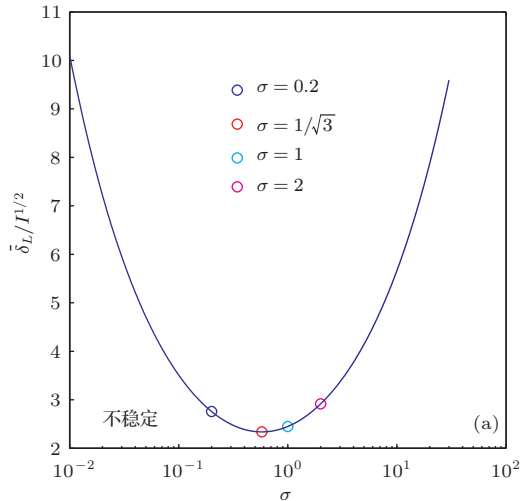


图 3 近零频带状流的稳定性边界, 激发区在线下方 (a) 对称能谱; (b) 红线表示有限 κ_* 在谱强度 $I = 1$ 的修正

$\bar{\delta}_L/\sqrt{I}$ 阈值随谱宽的变化. 为比较有限谱位移对不稳定性边界的修正, 在图 3(b) 中还给出有限谱位移 ($\kappa_* = 0.1$) 对 $\bar{\delta}_L$ 阈值放宽的数值结果 (本文所有近零频带状流非对称谱的数值结果均通过求解 (45) 式获取). 图 4 给出了由 (51) 式决定的小 $\bar{\delta}_L$ 极限下强度归一化增长率 $\text{Im}(\Omega)/\sqrt{I}$ 随对称能谱谱宽的变化.

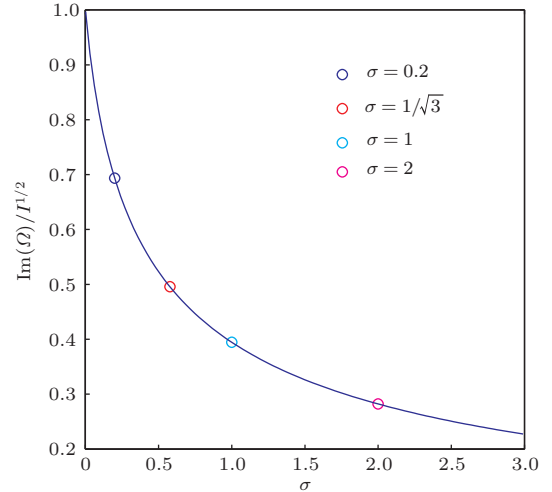


图 4 近零频带状流强度归一化增长率随谱宽的变化 ($\kappa_* = 0$)

5) 增长率的强度定标律及其与谱宽 σ 和 $\bar{\delta}_L$ 的关系. 由 (51) 式启示小 $\bar{\delta}_L$ 极限下的 $\text{Im}(\Omega) \sim \sqrt{I}$ 的定标. 这一定标在有限 $\bar{\delta}_L$ 的情况仅对足够大的 I 才正确. 另一方面, 在 $\sigma \rightarrow 0$ 的极限下 (51) 式给出 $\text{Im}(\Omega) \sim \sqrt{I}$, 相当于最大增长率. 一般情况下, 对称谱的强度归一化增长率由图 5 给出.

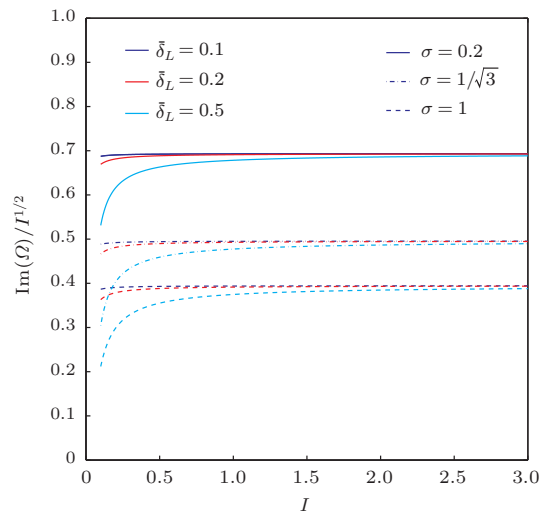


图 5 $\text{Im}(\Omega)/\sqrt{I}$ 定标律在弱强度下的破缺及与 σ 和 $\bar{\delta}_L$ 的关系 ($\kappa_* = 0$)

6) 谱位移效应. 谱位移产生实频率; 采用数值方法研究. 图6给出 $\sigma = 1/\sqrt{3}$, $I = 1$ 参数下, 本征值对不同 $\bar{\delta}_L$ 随 κ_* 的变化; 结果表明, 实频率可表示为 $\bar{\delta}_L$ 乘以 κ_* 的奇函数. 增长率随 $|\kappa_*|$ 的增加而下降.

图7给出 $\bar{\delta}_L = 0.1$, $I = 1$ 参数下, 对不同谱宽参数本征值对不同 $\bar{\delta}_L$ 随 κ_* 的变化, 其中也包括

$\sigma \rightarrow 0$ 的极限, 即色散关系(45)式在 δ 谱极限下的解

$$\Omega = -\bar{\delta}_L f(\kappa_*) \pm \sqrt{I(3\kappa_*^2 - 1)/(1 + \kappa_*^2)^3}. \quad (52)$$

该式给出的不稳定性仅当 $\kappa_* < 1/\sqrt{3}$ 时才存在. 但这一限制在有限宽度谱条件下被放宽(参见图7(b)).

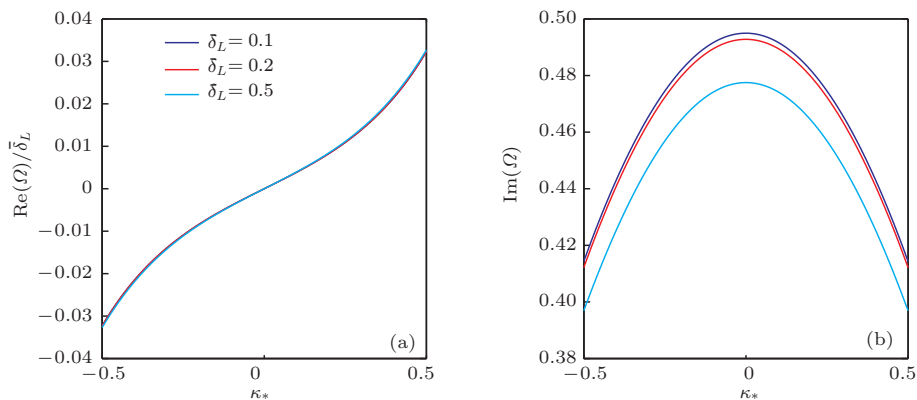


图6 在不同 $\bar{\delta}_L$ 参数下本征值随谱位移的变化 ($\sigma = 1/\sqrt{3}$, $I = 1$) (a) 实频随 $\bar{\delta}_L$ 定标关系; (b) 增长率

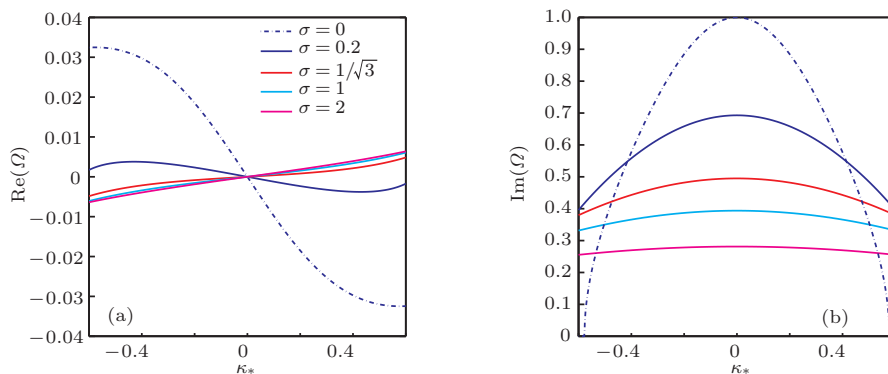


图7 对不同谱宽参数本征值随谱位移的变化 ($\bar{\delta}_L = 0.1$, $I = 1$) (a) 实频; (b) 增长率

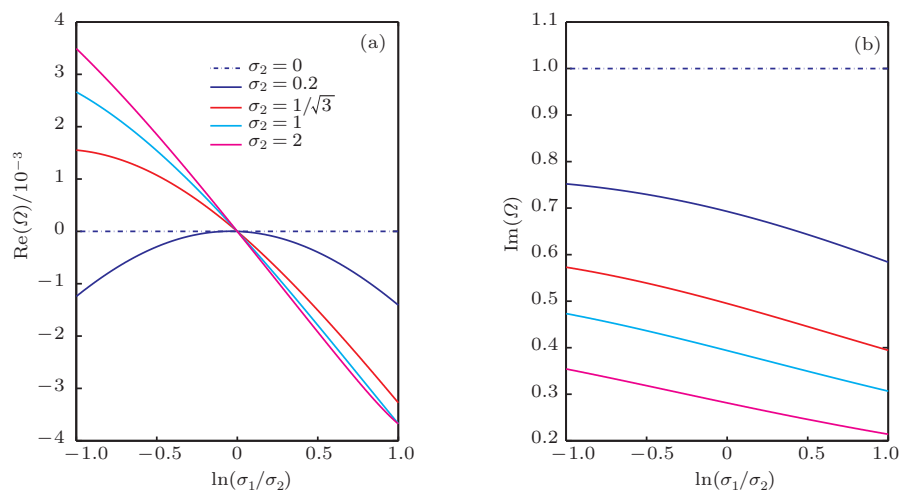


图8 非对称谱宽效应 ($\bar{\delta}_L = 0.1$, $I = 1$, $\kappa_* = 0$) (a) 实频; (b) 增长率

7) 谱形非对称效应. 谱位移不是产生实频率的惟一因素. 对零位移谱 ($\kappa_* = 0$), 谱形非对称性也可以导致非零的实频率. 选 $\bar{\delta}_L = 0.1, I = 1$ 为例, 图 8(a) 表明非对称谱形导致的实频率随谱宽的增大而增大; 并表现为左右对称. 与此对照的是, 由图 8(b) 给出增长率的改变则呈反对称性: 内侧 ($\kappa < \kappa_*$) 小谱宽 ($\sigma_1 < \sigma_2$, 对应内侧较陡的斜率) 导致增长率增加; 内侧大谱宽 ($\sigma_1 > \sigma_2$, 对应外侧较陡的斜率) 导致增长率减小.

6.2 测地声模与环修正近零频带状流

由色散方程 (31) 式略去正弦声模中的小量, 含参量激发的测地声模色散关系为

$$\left(\frac{1}{q^2} - \frac{\hat{\omega}^2}{\tau}\right) \left[\left(\frac{\tau p}{\varepsilon}\right)^2 \Lambda(\hat{\omega}, p) - \hat{\omega}\right] = 2\hat{\omega}. \quad (53)$$

它包含两个分支: 作为参量激发下测地声模的高频分支及作为环修正近零频带状流的低频分支. 低频分支可近似地表示为

$$\int d\kappa \frac{1}{\Omega + \bar{\delta}_L f(\kappa)} \frac{\partial N_k^{(in)}}{\partial \kappa} + \bar{\delta}_L (1 + 2q^2) = 0. \quad (54)$$

它与近零频带状流色散关系 (45) 的惟一区别在于 (54) 中的环状因子 $(1 + 2q^2)$. 该因子等效于对波能强度的环修正: $I \rightarrow I / (1 + 2q^2)$. 因此, 所有有关环修正近零频带状流的特性, 都可以从本节前一部分有关近零频带状流的分析得到.

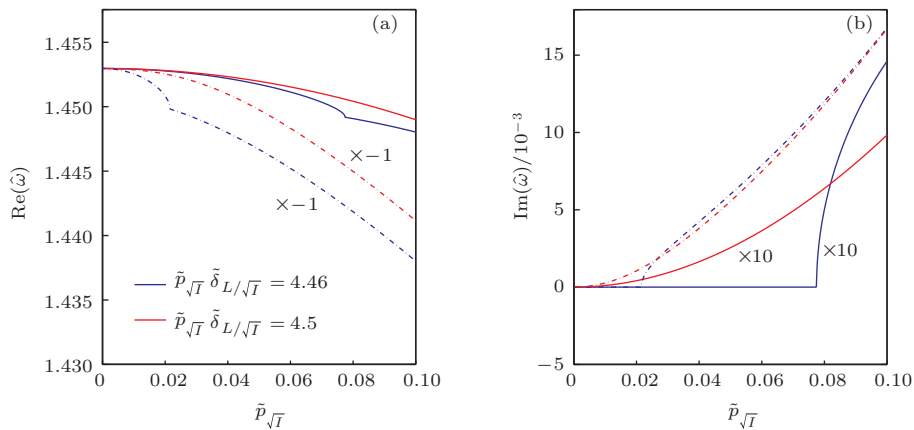


图 9 测地声模本征值在临界稳定区附近的数值结果 ($\sigma = 0.03, \kappa_* = 0.1, q = 3, \tau = 1$, 实、虚线分别代表正、负相速) (a) 实频; (b) 增长率

6.3 一次余弦声模与密度带状流的参量激发

由于一次余弦声模的频率与安全因子 q 成反比, 较高的 q 可以使频率低到足以发生波能共振, 并导致一次余弦声模的激发. 选用参数

作为参量激发下测地声模的高频分支可以看作从无湍流的 Winsor 色散关系 [23] 出发, 然后逐渐加大波能强度 I 而得到. 它对 Winsor 色散关系的有效修正只能通过以下两种方式来实现: 或是使 $\text{Re}II(\hat{\omega}, p)$ 相对 1 不可忽略, 或是 $\text{Im}II(\hat{\omega}, p) \neq 0$; 在 $\text{Re}II(\hat{\omega}, p)$ 为小量的条件下, 后者要求存在 Landau 共振.

按相速归一化 (42) 式, 波能传播量为 $\Omega + \bar{\delta}_L f(\kappa)$, $\Omega \approx \varepsilon \hat{\omega} / p \kappa_\theta$, $\max[f(\kappa)] \approx 0.324$, 故发生共振的条件是

$$\hat{\omega} < 0.324 \bar{\delta}_L p \kappa_\theta / \varepsilon. \quad (55)$$

对测地声模, $\hat{\omega} \approx \sqrt{2}$. (55) 式等价于

$$\bar{\delta}_L p > 4\varepsilon / \kappa_\theta, \quad (56)$$

这一条件仅当 $L_0/a = 1$ 才能与测地声模的介观尺度相容.

图 9 采用最少参数归一化显示了组合参数 $\bar{\delta}_L p$ 的重要性. 蓝线代表接近临界条件 (56) 时, 要求强度超过某个阈值通过压低实频率触发共振. 红线因具有较高的 $\bar{\delta}_L p$ 值, 并不需要压低实频也足以触发共振. 该图还显示了不同相速方向的效应 (负相速由虚线及 $\times -1$ 表示); 这与所选定的能谱位移 κ_* 有关. 从图中看出, 当选 $\kappa_* = 0.1$ 时, 负相速的增长率远大于正相速的增长率 (实线 $\times 10$ 表示该线对应的值是坐标值的 $1/10$).

$\bar{\delta}_L / \sqrt{I} \tilde{p} \sqrt{I} = 0.5, \delta p = 0.1, \kappa_* = 0, \sigma = 0.03$, 图 10 给出了在最少参数归一化下的数值结果. 它表明, 当 $q = 7$ 时, 在物理区可以实现参量激发. 这说明在高 q 区有可能观察到密度带状流. 与测地声模激发要求 $\bar{\delta}_L / \sqrt{I} \tilde{p} \sqrt{I} \sim 4.5$ 相比, $\bar{\delta}_L / \sqrt{I} \tilde{p} \sqrt{I} = 0.5$ 不要求很陡的密度梯度.

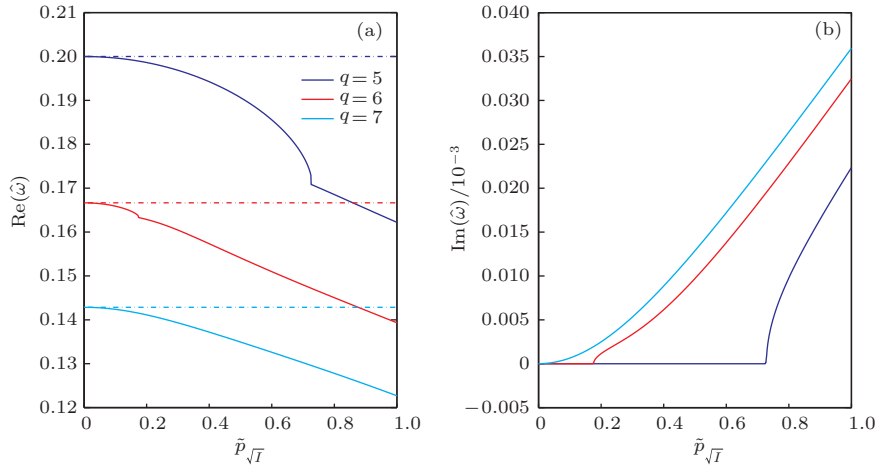


图 10 一次余弦声模的参量激发 ($\delta_{L/\sqrt{I}}\bar{p}\sqrt{I} = 0.5, \delta p = 0.1, \kappa_* = 0, \sigma = 0.03$) (a) 实频; (b) 增长率

7 结 论

本文在准环坐标系中冷离子流体模型的统一构架下讨论了三种轴对称静电模的参量激发问题; 它们是近零频带状流, 测地声模和环状声模.

就近零频带状流而言, 从两个方面回答了在前言中所提到的问题: “托卡马克的曲率是否对圆柱近零频带状流色散关系有修正?”. 一方面, 肯定了圆柱近零频带状流色散关系的正确性, 这是因为除了与一次正弦模的强耦合外, 曲率对它的修正可被略去; 另一方面, 尽管与一次正弦模的强耦合给出的低频分支体现了曲率的修正效应, 但当与圆柱模型近零频带状流相比时发现, 它等价于能谱强度减小 $(1 + 2q^2)$ 倍, 故无力参与和后者竞争.

采用 Gauss 型能谱对近零频带状流色散关系的求解表明, 能谱径向有限宽度对其激发带来较为严格的限制. 以宽度 $\sigma = 0.03$ 为例 (对应 $\rho_s(0)$ 为 0.1 cm , 波谱半宽 2.5 cm^{-1}), 从图 3(a) 可读出对应实际物理强度 I 为 10^{-8} , δ_L 为 6×10^{-4} ; 这要求密度梯度长度 L_0 大于 200 cm 才能满足激发条件. 调整谱形的其他参数, 如非对称性, 会带来一些变化. 但总体而言还有必要对理论的适用性做较为严肃的审视.

就测地声模的激发而言, 情况恰恰与近零频带状流相反. 参量激发条件 (56) 式要求远小于小半径的密度梯度长度, 比如 $L_0 : 2 \text{ cm}$ 才能满足测地声模介观尺度的要求.

从以上分析来看, 测地声模和近零频带状流的参量激发不可能发生在同一小半径处. 如果实验上同时观察到他们在同一处出现, 至少其中一种不属

于参量激发机理.

就环状声模的激发而言, 对前言中另一个问题: “为什么能看到测地声模, 而不能看到离子声模?” 做了以下的回答: 由于一次余弦声模的频率比测地声模小很多倍, 如果测地声模被参量激发, 余弦声模也应被激发, 特别是在高 q 区. 与此同时也有可能带动起密度带状流.

作者感谢与兰涛教授和孔德峰博士的讨论; 这有助于他们在本文的举例和分析中选取更接近实际意义的物理参数.

参考文献

- [1] Diamond P H, Itoh S I, Itoh K, Hahm T S 2005 *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** R35
- [2] Fujisawa A 2009 *Nucl. Fusion* **49** 013001
- [3] Itoh K, Itoh S I, Diamond P H 2006 *Phys. Plasmas* **13** 055502
- [4] Smolyakov A I, Diamond P H, Shevchenko V I 2000 *Phys. Plasmas* **7** 1349
- [5] Chakrabarti N, Singh R, Kaw P K, Guzdar P N 2007 *Phys. Plasmas* **14** 052308
- [6] Hillesheim J C, Peebles W A, Carter T A, Schmitz L, Rhodes T L 2012 *Phys. Plasmas* **19** 022301
- [7] Conway G D, Angioni C, Ryter F, Sauter P, Vicente J, the ASDEX Up-grade Team 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 065001
- [8] McKee G R, Gohil P, Schlossberg D J, Boedo J A, Burrell K H, deGrassie J S, Groebner R J, Moyer R A, Petty C C, Rhodes T L, Schmitz L, Shafer M W, Solomon W M, Umansky M, Wang G, White A E, Xu X 2009 *Nucl. Fusion* **49** 115016

- [9] Zhang Y Z, Xie T, Mahajan S M 2012 *Phys. Plasmas* **19** 020701
- [10] Gao Z 2013 *Phys. Plasmas* **20** 032501
- [11] Guo W, Wang S, Li J G 2010 *Phys. Plasmas* **17** 112510
- [12] Qiu Z Y 2010 *Ph. D. Dissertation* (Hefei: University of Science and Technology of China) (in Chinese) [仇志勇 2010 博士学位论文(合肥: 中国科学技术大学)]
- [13] Hong W Y, Yan L W, Zhao K J, Dong J Q, Cheng J, Qian J, Luo C W, Xu Z Y, Huang Y, Yang Q W, Lan T, Yu C X, Liu A D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 962 (in Chinese)[洪文玉, 严龙文, 赵开君, 董家齐, 程均, 钱俊, 罗萃文, 徐征宇, 黄渊, 杨青巍, 兰涛, 俞昌旋, 刘阿娣 2008 物理学报 **57** 962]
- [14] Peng X D, Qiu X M, Lu H L, Wang S J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6387 (in Chinese)[彭晓东, 邱孝明, 陆赫林, 王顺金 2009 物理学报 **58** 6387]
- [15] Lan T, Liu A D, Yu C X, Yan L W, Hong W Y, Zhao K J, Dong J Q, Qian J, Cheng J, Yu D L, Yang Q W 2008 *Plasma Phys. Control. Fusion* **50** 045002
- [16] Zhao H L, Lan T, Liu A D, Kong D F, Xie J L, Liu W D, Yu C X, Zhang W, Chang J F, Wan B N, Li J G 2010 *Plasma Sci. Technol.* **12** 262
- [17] Kong D F, Liu A D, Lan T, Zhao H L, Sheng H G, Xu G S, Zhang W, Wan B N, Li J G, Chen R, Xie J L, Li H, Liu W D, Yu C X 2013 *Nucl. Fusion* **53** 113008
- [18] Kong D F, Liu A D, Lan T, Cui Z Y, Yu D L, Yan L W, Zhao H L, Sheng H G, Chen R, Xie J L, Li H, Liu W D, Yu C X, Hong W Y, Cheng J, Zhao K J, Dong J Q, Duan X R 2013 *Plasma Phys.* **53** 123006
- [19] Hasegawa A, Mima K 1978 *Phys. Fluids* **12** 87
- [20] Zhang Y Z, Xie T 2013 *Nucl. Fusion & Plasma Phys.* **33** 1 (in Chinese) [章扬忠, 谢涛 2013 核聚变与等离子体物理 **33** 1]
- [21] Braginskii S I (edited by Leontovich M A) 1965 *Reviews of Plasma Physics* **1** (New York: Consultants Bureau) pp205–311
- [22] Abramowitz M, Stegun I 1965 *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover Publications) 20.2.27
- [23] Winsor N, Johnson J, Dawson J 1968 *Phys. Fluids* **11** 2448

Parametric excitation of axisymmetric toroidal electrostatic mode by drift wave turbulences*

Zhang Yang-Zhong^{1)†} Xie Tao²⁾

1) (*Center for Magnetic Fusion Theory, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*)

2) (*Southwestern Institute of Physics, Chengdu 610041, China*)

(Received 20 July 2013; revised manuscript received 26 September 2013)

Abstract

The axisymmetric toroidal electrostatic mode discussed in this paper refers collectively to the nearly ideal electrostatic fluid mode with zero toroidal mode number in magnetically confined toroidal plasmas like tokamak, including geodesic acoustic mode, sound waves and the so-called nearly zero-frequency zonal flow. Use is made of cold ion fluid model in the toroidal coordinate system with a circular cross section to develop the theory of parametric excitation for the three above mentioned modes systematically to the first order of inverse large aspect ratio, which ends up with the four following observations: (1) The density zonal flow is only associated with the excitation of the first harmonic cosine sound wave and is independent of the potential zonal flow. (2) The geodesic acoustic mode is the high frequency branch of the dispersion in the form of coupling between the first harmonic sine sound wave and the nearly zero-frequency zonal flow due to geodesic curvature, while the low frequency branch of the same dispersion is identified to be the ‘toroidally modified nearly zero-frequency zonal flow’. (3) Only a weak coupling exists between the second harmonic sine sound wave and the nearly zero-frequency zonal flow. (4) All cosine sound waves and sine sound waves beyond the second harmonic are decoupled to the nearly zero-frequency zonal flow. A Gaussian type of drift wave energy spectrum with only a few parameters is introduced for calculation. Emphasis is laid on the effects resulting from the finite radial spectrum width such as double Landau-singularity, which reveal a significant modification to the δ -spectrum, thus resulting in serious restriction to the parametric excitation of geodesic acoustic mode and nearly zero-frequency zonal flow. Also discussed is the possibility of excitation of density zonal flow in the high q region. Numerical results are presented graphically and discussed in the reasonable physical regime. It is indicated that the geodesic acoustic mode and the nearly zero-frequency zonal flow cannot be parametrically excited at the same radii, and that if the geodesic acoustic mode is parametrically excited, the density zonal flow is expectedly to be observed.

Keywords: geodesic acoustic mode, zero-frequency zonal flow, sound wave, tokamak

PACS: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.35.Dm, 52.55.Fa

DOI: [10.7498/aps.63.035202](https://doi.org/10.7498/aps.63.035202)

* Project supported by the ITER-China Program (Grant No. 2010GB107000), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. NSFC-11075162), and the National Magnetic Confinement Fusion Science Program, China (Grant No. 2009GB101002).

† Corresponding author. E-mail: zhang_yz@ipp.ac.cn