

# 基于比例积分控制的电压反馈型 Buck 变换器分岔\*

杨祎巍<sup>†</sup> 刘佳林 李斌

(华南理工大学电子与信息学院, 广州 510640)

(2013年10月17日收到; 2013年11月5日收到修改稿)

在分段光滑模型的基础上, 推导出基于比例积分 (PI) 控制的电压反馈型 Buck 变换器的光滑模型及离散迭代模型. 证明了功率系统的混沌吸引子在负载线上运动, 并受到占空比的控制, 模型的流形围绕吸引子运动并出现 1 周期、2 周期及混沌现象; 推导出电压反馈型 PI 控制系统的输出电压与 Buck 变换器的输出电压成线性关系, 在此基础上指出 PI 控制中的比例因子起主导作用; 分析了系统的倍周期分岔、边界碰撞和混沌现象, 并展示了变换器状态的转移过程. 实验结果表明了理论建模分析和仿真的正确性.

**关键词:** PI 控制, 电压反馈型, Buck 变换器, 分岔

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.040502

## 1 引言

开关电源 DC-DC 变换器是一种典型的非线性动力系统, 开关的导通和关断造成了变换器拓扑结构的循环变化, 进而促使其行为发生变化. DC-DC 变换器循环变化中的每种电路拓扑结构均可用线性光滑系统描述, 因此, DC-DC 变换器是分段光滑的动力系统, 具有丰富的动力学行为, 如倍周期分岔、边界碰撞、混沌等<sup>[1-8]</sup>. DC-DC 变换器存在两种工作模式: 连续导电模式 (CCM) 和断续导电模式 (DCM): 在 CCM 模式下, 变换器可用两段光滑系统描述; 在 DCM 模式下, 变换器可用三段光滑系统描述. 当变换器参数发生变化时, 每一光滑系统范围内会出现分岔现象, 如 Hopf 分岔等<sup>[9]</sup>; 不同光滑系统之间切换时会导致变换器工作模式的变化, 也会发生分岔现象, 如边界碰撞等<sup>[6,7,10,11]</sup>. 传统的线性分析方法只能近似描述变换器行为, 对于其非线性行为较难预测和处理. 因此, 从动力系统的角度研究变换器的行为, 对于变换器的设计具有

重要的意义.

近年来, 国内外研究人员对分段光滑电路, 尤其是 DC-DC 变换器基础结构 (Buck, Boost, Buck-Boost) 进行了深入的研究<sup>[6-16]</sup>. 带有补偿的电流反馈型 Buck-Boost 变换器在 DCM 模式下具有明显的阵发现象和较弱的混沌现象<sup>[10]</sup>; 并发现带有补偿的峰值电流模式和谷值电流模式的 DC-DC 变换器具有对称动态特性<sup>[11]</sup>. 电流反馈二次型 Boost 变换器在不同的参数变化时有着不同的分岔路由, 存在工作模式转移现象<sup>[12]</sup>. 电流反馈型 Buck-Boost 变换器在输入电压和负载电阻等电路参数宽范围变化时存在周期分岔、边界碰撞分岔、鲁棒混沌和阵发混沌等复杂动力学行为<sup>[13]</sup>. 电流反馈型变换器由于电流的近似线性而容易分析, 研究较为深入<sup>[9-13]</sup>; 电压反馈型变换器由于电压波形较为复杂, 较电流反馈型变换器研究难度大<sup>[14-16]</sup>. 双电压控制下的 Buck 变换器在参数变化时会发生 CCM 和 DCM 的模式转换, 具有倍周期分岔和边界碰撞分岔行为<sup>[15]</sup>. 电压反馈型 DCM 模式下的 Boost 变换器在反馈系数处于一定范围

\* 中央高校基本科研业务费 (批准号: 2013ZM0015) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: yangyiwei@scut.edu.cn

时,会发生切分岔和阵发混沌现象<sup>[16]</sup>.以上研究均在比例(P)控制下展开,而实际工程中常用比例积分(PI)控制作为DC-DC变换器的补偿环路,由于PI控制比P控制多出一个状态量,使得系统多出一个维度,因而系统更为复杂.此外,基于PI控制的电压反馈型DC-DC变换器目前研究较少,尤其是PI因子对其行为的影响需要进一步研究.

本文以基于PI控制的电压反馈型Buck变换器为例进行研究,建立该变换器的分段光滑模型和离散迭代模型,通过分析各段光滑模型的不动点,推导出系统的混沌吸引子,明确系统的动力学行为特点;研究PI控制的比例因子和积分因子对系统分岔行为的影响,并分析了系统的倍周期分岔、边界碰撞分岔和混沌现象.实验结果证明了理论分析与仿真的正确性.

## 2 变换器建模

典型的基于PI控制的电压反馈型Buck变换器拓扑结构如图1所示.其中, $V_g$ 是输入电压, $V_o$ 是输出电压, $i_L$ 是电感电流, $V_{ref}$ 是参考电压, $V_{tri}$ 是三角波; $R_1$ ,  $C_1$ 和运算放大器 $A_1$ 组成了PI控制器,其中 $R_1$ 与 $R_u$ ,  $R_d$ 决定了PI控制器中的比例系数, $C_1$ 与 $R_u$ ,  $R_d$ 共同决定了积分系数; $A_2$ 是占空比生成器,占空比由PI控制器的输出与三角波比较决定.当开关管S导通时,二极管D关断,电源 $V_g$ 给负载提供能量,电感电流变大;当开关管S关断时,电感电流减小,此时有两种情况:若在电感电流减小为零之前,开关管S再次导通,则称变换器处于连续电流模式(CCM);当电感电流减小为零时,由于二极管D的反向截止作用,电感电流将一直保持为零,若在此时开关管S再次导通,则称变换器处于断续电流模式(DCM).

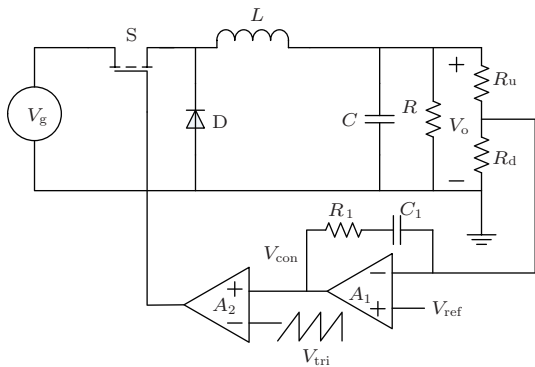


图1 基于PI控制的电压反馈型Buck变换器示意图

当开关管S导通时,有

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = V_g - V_o, \\ C \frac{dV_o}{dt} = i_L - \frac{V_o}{R}. \end{cases} \quad (1)$$

当开关管S关断时,有

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = -V_o, \\ C \frac{dV_o}{dt} = i_L - \frac{V_o}{R}, \\ i_L \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中,当变换器进入DCM工作模式时, $i_L$ 是零,故可加入限制条件 $i_L \geq 0$ .因此,(2)式中包含了CCM和DCM两种情况.(1)式和(2)式对应的齐次线性方程的系数矩阵一致,其特征根及特征向量分别为

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega, \quad V_{1,2} = \begin{bmatrix} \alpha C \pm j\omega C \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中,

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4R^2C/L - 1}}{2RC}.$$

Buck变换器在这两组光滑动力系统约束下工作,因而属于分段光滑系统.采用离散迭代法,对每个周期 $T$ 的起始时刻进行采样,令 $i_{L,n} = i_L(nT)$ ,  $V_{o,n} = V_o(nT)$ , CCM模式下系统在 $DT$ 时间内受(1)式控制,在 $(1-D)T$ 时间内受(2)式控制,令 $i_{L,m} = i_L(nT+DT)$ ,  $V_{o,m} = V_o(nT+DT)$ 为 $DT$ 时刻变换器的中间状态.

对于系统(1),有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_{L,m} \\ V_{o,m} \end{bmatrix} &= \mu_1 \left( \begin{bmatrix} i_{L,n} \\ V_{o,n} \end{bmatrix} \right) \\ &= G_1 X_1 + G_2 X_2 + \begin{bmatrix} V_g/R \\ V_g \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} G_1 &= V_{o,n} - V_g, \\ G_2 &= [i_{L,n} - V_g/R - (V_{o,n} - V_g)\alpha C]/(\omega C), \\ X_1 &= e^{-\alpha DT} \begin{bmatrix} \cos(\omega DT) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad - \sin(\omega DT) \begin{bmatrix} \omega C \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$X_2 = e^{-\alpha DT} \begin{bmatrix} \sin(\omega DT) \begin{bmatrix} \alpha C \\ 1 \end{bmatrix} \\ + \cos(\omega DT) \begin{bmatrix} \omega C \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

对于系统 (2), CCM 状态下有

$$\begin{bmatrix} i_{L,n+1} \\ V_{o,n+1} \end{bmatrix} = \mu_2 \left( \begin{bmatrix} i_{L,m} \\ V_{o,m} \end{bmatrix} \right) = G_3 X_3 + G_4 X_4, \quad (4)$$

其中,

$$G_3 = V_{o,m},$$

$$G_4 = [i_{L,m} - V_{o,m}\alpha C]/(\omega C),$$

$$X_3 = e^{-\alpha(1-D)T} \begin{bmatrix} \cos(\omega(1-D)T) \begin{bmatrix} \alpha C \\ 1 \end{bmatrix} \\ - \sin(\omega(1-D)T) \begin{bmatrix} \omega C \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$X_4 = e^{-\alpha(1-D)T} \begin{bmatrix} \sin(\omega(1-D)T) \begin{bmatrix} \alpha C \\ 1 \end{bmatrix} \\ + \cos(\omega(1-D)T) \begin{bmatrix} \omega C \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

DCM 状态时, 在 CCM 基础上, 增加下式

$$\begin{bmatrix} i_{L,n+1}^{DCM} \\ V_{o,n+1}^{DCM} \end{bmatrix} = \mu_3 \left( \begin{bmatrix} i_{L,n+1} \\ V_{o,n+1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{o,n+1} e^{-t_3/(RC)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中,  $t_3$  表示电流  $i_L$  为零的持续时间.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{CCM:} \begin{bmatrix} i_{L,n+1} \\ V_{o,n+1} \end{bmatrix} \\ \\ \\ \text{DCM:} \begin{bmatrix} i_{L,n+1}^{DCM} \\ V_{o,n+1}^{DCM} \end{bmatrix} \end{array} \right. = \mu_2 \left( \mu_1 \left( \begin{bmatrix} i_{L,n} \\ V_{o,n} \end{bmatrix} \right) \right), \quad (6)$$

$$= \mu_3 \left( \mu_2 \left( \mu_1 \left( \begin{bmatrix} i_{L,n} \\ V_{o,n} \end{bmatrix} \right) \right) \right).$$

根据 (3)—(5) 式可以得到离散迭代模型, 如 (6) 式所示, 其中  $\mu_1(\cdot)$  的输出是  $\mu_2(\cdot)$  的输入, 在 DCM 模式下,  $\mu_2(\cdot)$  的输出是  $\mu_3(\cdot)$  的输入. 根据离散迭代模型表达式可知, 变换器状态量存在固有的谐振频率  $\omega$ , 开关周期  $T$  及占空比  $D$  的变化同样会影响状态量的频率.

考虑到 PI 控制器中引入积分电容  $C_1$ , 因此, 系统状态量除了电感电流  $i_L$ , 输出电压  $V_o$  之外, 还多出了电容  $C_1$  的电压  $V_{C1}$ . 根据电路结构, 电压  $V_{C1}$  的变化通过  $V_{con}$  转化为占空比  $D$  的变化, 可得

$$V_{con} = \frac{R_1 + r}{r} V_{ref} + V_{C1} + \frac{R_1}{r} K V_o, \quad (7)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{V_M} \frac{dV_{con}}{dt} = \frac{1}{V_M} \left[ \frac{V_{ref}}{rC_1} - \frac{R_1 K}{rC} i_L + \left( \frac{R_1}{RC} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{K}{r} V_o \right], \quad (8)$$

其中,  $V_{con}$  是 PI 控制器的输出,  $V_M$  是三角波  $V_{tri}$  的峰值电压,  $r = R_u//R_d$ ,  $K = R_d/(R_u + R_d)$ ,  $D = V_{con}/V_M$ .

由于开关的导通和关断导致了变换器拓扑结构的变化, 描述电路行为的动力系统是分段光滑的, 进而会具有边界碰撞等复杂的动态特性. 本文通过使用 sigmoid 函数, 将该两个分段光滑的系统近似成为单一的光滑系统, 用统一的方程组描述. sigmoid 函数表达式如 (9) 式所示, 不同参数  $B$  对应的图形如图 2 所示; 当参数  $B$  趋向于无穷时, sigmoid 函数趋向于阶跃函数.

$$\text{sigmoid} = 1/(1 + \exp(B(t - T_{\text{threshold}}))). \quad (9)$$

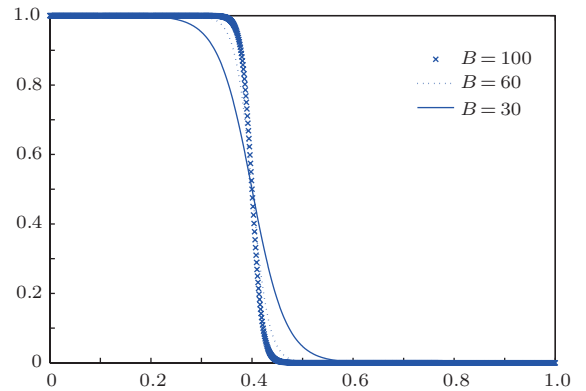


图2 sigmoid 函数示意图

将系统的状态量设为  $X = [i_L, V_o, D, \tau]$ , 其动

力学方程可写为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{1 + \exp B(\tau - DT)} V_g - V_o \right) & (i_L \geq 0), \\ \frac{dV_o}{dt} = \frac{1}{C} \left( i_L - \frac{V_o}{R} \right), \\ \frac{dD}{dt} = \frac{1}{V_M} \left[ \frac{V_{ref}}{rC_1} - \frac{R_1 K}{rC} i_L + \left( \frac{R_1}{RC} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{K}{r} V_o \right], \\ \frac{d\tau}{dt} = 1 \pmod{T}, \end{cases} \quad (10)$$

其中, 引入  $\tau$  将非自制系统转化为自治系统,  $T$  是三角波的周期;  $B$  是参数, 当  $B$  趋于正无穷时, (10) 式退化为 (1) 和 (2) 式. (10) 式是高维非线性微分方程组, 包含了 CCM 和 DCM 两种模式, 且将两个分段光滑的子系统统一成一个系统. 该系统中, 状态量  $D$  实际是离散变化的值, 每一个周期内仅有一个对应的值, 控制系统通过改变  $D$  来改变 Buck 变换器工作在开关管导通和关断的时间.

至此, 本文中使用了三种模型描述图 1 变换器, 它们分别是 (1) 式, (2) 式和 (8) 式 (模型 I); (6) 式 (模型 II) 以及 (10) 式 (模型 III). 其中, 模型 I 描述了变换器的连续时间域中的行为, 是分段光滑模型; 模型 II 是在模型 I 的基础上离散后的迭代模型, 用于本文的仿真计算; 模型 III 将分段光滑的模型 I 近似统一为光滑连续系统, 可以从更加全局的角度

描述系统的行为, 当模型 III 中的参数  $B$  趋于无穷时, 模型 III 退化为模型 I. 由于目前的动力系统学难以完全了解模型 III 的行为, 本文使用模型 III 得出系统吸引子的基本性质.

### 3 模型动力系统行为分析

将描述该变换器的方程分为功率和控制两个系统进行研究: 功率系统部分由 (1) 和 (2) 式描述的系统组成; 控制系统部分包括描述 PI 控制器及脉冲宽度调制 (PWM) 生成器的方程, 主要状态量包括描述稳态误差的电压  $V_{C1}$ , PI 控制器的输出  $V_{con}$  和体现最终控制结果的占空比  $D$ . 两个光滑的系统 (1) 和 (2) 在控制环路的作用下交替工作, 构成了分段光滑的动力系统, 塑造了 Buck 变换器的动力系统行为. 本文各参数取值情况如下:  $V_g = 20 \text{ V}$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 47 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $R = 10 \text{ }\Omega$ ,  $R_u = 90 \text{ k}\Omega$ ,  $R_d = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{ref} = 0.8 \text{ V}$ ,  $V_{tri}$  的最大值是  $1 \text{ V}$ , 最小值  $0 \text{ V}$ , 频率  $F = 5 \text{ kHz}$ ;  $R_1$  与  $C_1$  是 PI 控制器的参数, 若无说明,  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ , 本文重点研究这两个参数对 Buck 变换器行为的影响.

#### 3.1 功率系统分析

考察功率系统的行为特点: 开关导通时 ((1) 式) 的不动点是  $(V_g/R, V_g)$ , 开关关断时 ((2) 式) 的不动点是  $(0, 0)$ . 这两个光滑系统的方向场如图 3 所示, 均为全局收敛, 从任意点出发的流形最终均收敛于各自的不动点.

$$\begin{cases} \int_T \left( \frac{1}{1 + \exp B(\tau - DT)} V_g - V_o \right) d\tau = 0 \\ i_L - \frac{V_o}{R} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{L\text{stable}} = \frac{D \cdot V_g}{R} \\ V_{\text{ostable}} = D \cdot V_g \end{cases} \quad (11)$$

系统达到稳态时是 1 周期, 根据 (10) 式, 周期内  $i_L$  和  $V_o$  的定点的平均值如 (11) 式使所示, 进而可得稳态时的系统状态  $(i_{L\text{stable}}, V_{\text{ostable}})$ , 通过其表达式可知, 点  $(i_{L\text{stable}}, V_{\text{ostable}})$  位于  $V_o = i_L \cdot R$  的负载线上, 受到占空比  $D$  的控制. 此时的系统流形环绕着点  $(i_{L\text{stable}}, V_{\text{ostable}})$  做 1 周期运动. 占空比的变化会引起系统稳态点  $(i_{L\text{stable}}, V_{\text{ostable}})$  的变化, 从而影响系统的行为, 产生分岔及混沌现象.

图 4 是 (1) 和 (2) 式合并后的相图, 其中实线和

虚线分别表示 (1) 和 (2) 式流形的方向, “\*” 点即为  $(i_{L\text{stable}}, V_{\text{ostable}})$  点, 其所在直线是负载线. 负载线将第一象限分为 A, B 两部分, 仅负载线上的电压变化率为零, 系统性质如表 1 所示, 当流形环绕点  $(i_{L\text{stable}}, V_{\text{ostable}})$  运动时, 根据状态量导数的正负性质分为四个状态: A-On, A-Off, B-On, B-Off, 其中  $\angle -90^\circ - 0^\circ$  表示 A-On 相应状态下流形前进方向的角度. 根据以上讨论可知, 流形围绕点  $(i_{L\text{stable}}, V_{\text{ostable}})$  在有限的区域内发生周期、分岔、混沌等现象, 不会趋于无穷, 并且点  $(i_{L\text{stable}},$

$V_{\text{ostable}}$ ) 是该系统的一个混沌吸引子.

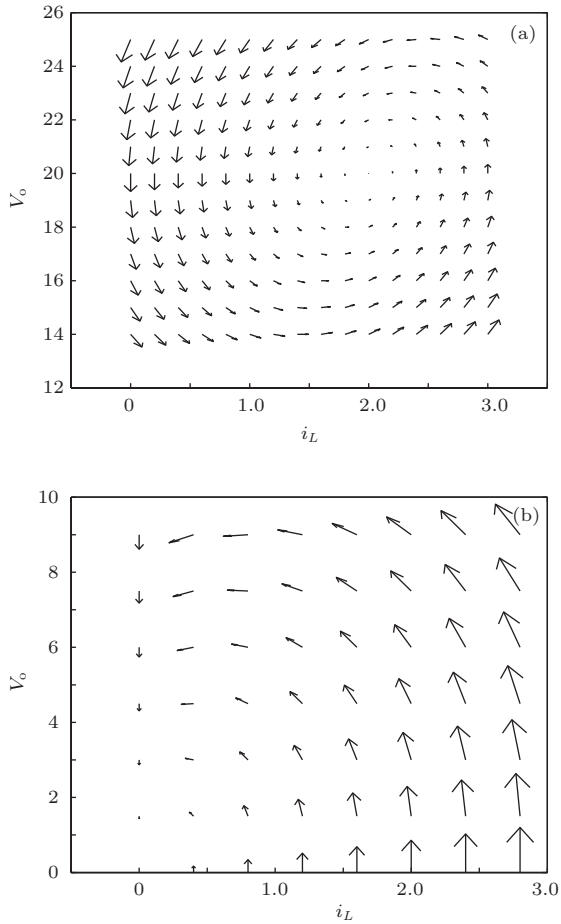


图3 (a) (1) 式动力系统所对应的方向场; (b) (2) 式动力系统所对应的方向场

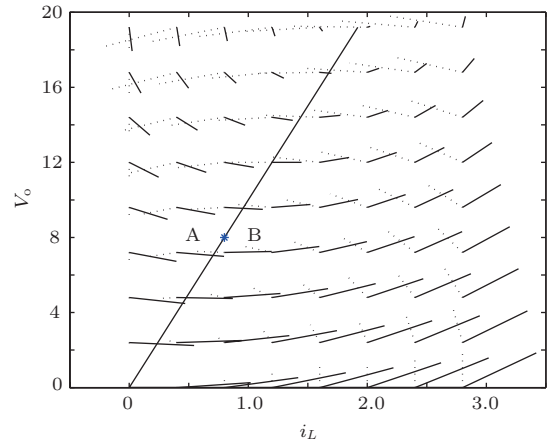


图4 Buck 变换器的方向场, 其中实线表示 (1) 式的方向场, 虚线表示 (2) 式的方向场

### 3.2 控制系统分析

考察控制环路, PI 控制器中电容  $C_1$  上的电压  $V_{C1}$  表示输出电压  $V_o$  与由  $V_{\text{ref}}$  设定的额定值之间的稳态误差, 可近似为一个常数, 如图 5 所示, 在给定  $R_1$  的情况下  $V_{C1}$  基本保持恒定. 根据 (7) 式所示的 PI 控制器输出电压  $V_{\text{con}}$  与功率部分输出电压  $V_o$  的关系, 可知  $V_{\text{con}}$  与  $V_o$  呈线性关系, 如图 6 所示. 可以看出, 当  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  时, 电压波动幅值较小, 使得占空比在合理的范围内变化; 当  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$  时, 电压波动幅值较大, 超出了三角波的幅值范围, 此时功率系统发生了 2 周期的分岔.

表1 Buck 变换器单位周期内相图性质

变换器拓扑结构	导数 ( $di_L/dt, dV_o/dt$ ) 正负极性 & 流形方向		
	$i_L = 0, \text{DCM}$	A 区域	B 区域
(1) 式, 开关管导通	—	(+, -); A-On, $\angle -90^\circ - 0^\circ$	(+, +); B-On, $\angle 0^\circ - 90^\circ$
(2) 式, 开关管关断	(0, -); A-Off, $\angle -90^\circ$	(-, -); A-Off, $\angle -90^\circ - 180^\circ$	(-, +); B-Off, $\angle 90^\circ - 180^\circ$

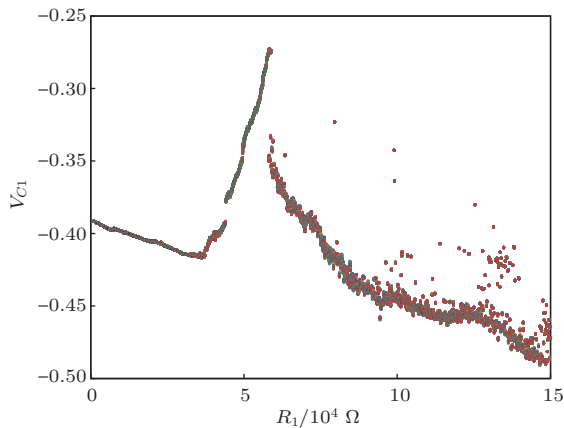


图5 PI 控制器中  $C_1$  电压  $V_{C1}$  与电阻  $R_1$  的关系

### 3.3 分岔分析

PWM 发生器产生占空比  $D$ , 其与  $V_{\text{con}}$  的关系如 (8) 式所示, 其中  $V_M$  是三角波的峰值. 因此,  $D$  的变化反映了输出电压  $V_o$  的波动, 从而起到了负反馈的作用, 稳定输出电压. 当变换器中其他参数不变, 仅将  $R_1$  变大, 即 PI 控制中的比例因子变大, 根据 (7) 式,  $V_{\text{con}}$  的直流部分将变大; 为了保持占空比不变,  $V_{\text{con}}$  只能增大波动, 以此抵消变大的直流分量, 从而将引起分岔、混沌等现象. 因此, 分岔将随着  $R_1$  的变大而出现, 分岔图如图 7 (a) 所示, 当  $R_1 = 36.93 \text{ k}\Omega$  时, 系统发生倍周期分岔, 输出电



压  $V_o$  由1周期变为2周期. 当电感电流出现零时, 变换器由CCM模式进入DCM模式, 从图7(b)可以看出, 当  $R_1 = 44.92 \text{ k}\Omega$  时, 电感电流出现零, 即系统发生边界碰撞, Buck变换器从CCM模式进入DCM模式.

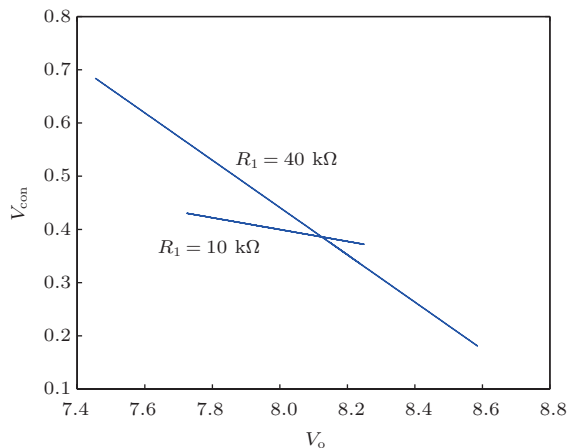


图6 PI控制器输出电压  $V_{con}$  与功率级输出电压  $V_o$  成近似线性关系

当变换器中其他参数不变, 仅将  $C_1$  变小, 即

PI控制中的积分因子变大, 此时输出电压可迅速收敛, 但过大的积分因子易产生分岔现象, 因此分岔将随着  $C_1$  的减小而出现. 比较PI参数  $R_1$  和  $C_1$  对变换器分岔的影响可知, 当  $R_1$  使得变换器发生分岔时,  $C_1$  无法将分岔消除, 故  $R_1$  起主导作用, 如图8所示.

图9(a)是1周期下电感电流  $i_L$  和输出电压  $V_o$  的相图, 此时  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ , 图中点  $M$  和点  $N$  的切线是水平的, 表明  $M$  和  $N$  点处的电压变化率为零, 从另一个角度看, 点  $M$  和点  $N$  在负载线上. 图中  $PN$  段对应于A-On状态,  $NQ$  段对应于B-On状态,  $QM$  段对应于B-Off状态,  $MP$  段对应于A-Off状态. 图9(b)是1周期下PI控制器输出电压  $V_{con}$  与三角波  $V_{tri}$  的相图, 图中的直线表示  $V_{con}$  等于  $V_{tri}$ , 即该线与相图的交点表明PWM发生器的输出发生反转. 从图中可以看出,  $V_{con}$  与  $V_{tri}$  的相图与直线有两个交点, 电路处于1周期状态. 图9(c)中虚线框内表示的是单位周期内变换器状态转换的路径, 可以看出此时是1周期下的变换器状态转换路径.

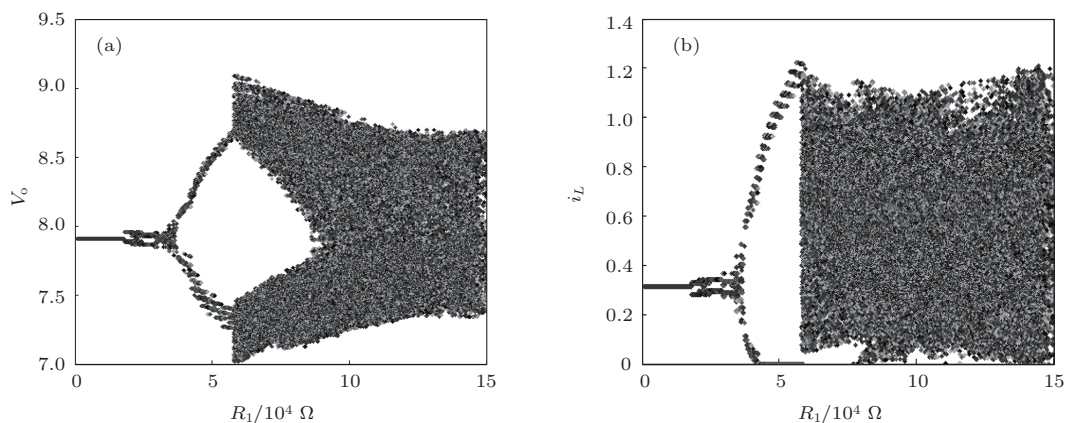


图7 (a) 输出电压  $V_o$  关于参数  $R_1$  的分岔图; (b) 电感电流  $i_L$  关于参数  $R_1$  的分岔图

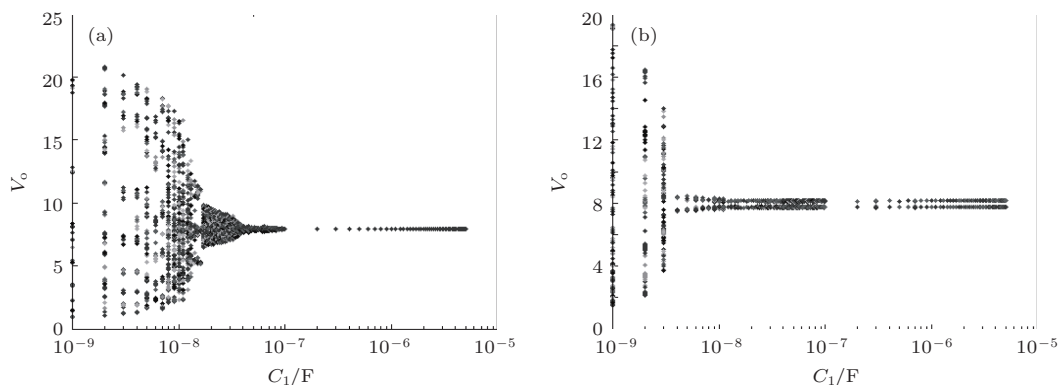


图8 在不同  $R_1$  条件下输出电压  $V_o$  关于参数  $C_1$  的分岔图 (a)  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ; (b)  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$

图 10(a) 是 2 周期下电感电流  $i_L$  和输出电压  $V_o$  的相图, 此时  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ , 图中点  $K, L, M, N$  处的切线是水平的, 表明这些点处的电压变化率为零, 即点  $K, L, M, N$  在负载线上. 图中  $PK$  段对应于 A-On 状态,  $KQ$  对应于 B-On 状态,  $QN$  对应于 B-Off 状态,  $NS$  对应于 A-Off 状态,  $SL$  对应于 A-On 状态,  $LT$  对应于 B-On 状态,  $TM$  对应于 B-Off 状态,  $MP$  对应于 A-Off 状态. 图 10(b) 是 2 周期下 PI 控制器输出电压  $V_{con}$  与三角波  $V_{tri}$  的相图, 可以看出  $V_{tri}$  有两次突变, 因此是 2 周期循环; 图中表示  $V_{con}$  与  $V_{tri}$  相等的直线与相图有四个交点, 再次表明每两个周期为一个循环. 图 10(c) 是 2 周期下变换器状态的转换路径, 可以看出最小状态循环的路径与 1 周期相同.

图 11(a) 是  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$  时的相图, 对比图 10 所示相图可知, 此时变换器处于 D-

CM 模式下, 其中,  $MN$  所在直线是负载线,  $PN$  对应 A-On,  $NQ$  对应 B-On,  $QS$  对应 B-Off,  $ST$  对应 B-On,  $TM$  对应 B-Off,  $MO$  对应 A-Off,  $OP$  对应 A-Off. 在图 11(b) PI 控制器输出电压  $V_{con}$  与三角波  $V_{tri}$  的相图中,  $V_{tri}$  有两次突变, 因此是 2 周期循环. 图 11(c) 是 2 周期下变换器状态的转换路径, 此时电路从 CCM 模式进入 DCM 模式, 可以看出当发生边界碰撞后, 单位周期内最小状态循环的路径发生了变化.

图 12 所示是  $R_1 = 10, 40, 60 \text{ k}\Omega$  时输出电压的功率谱密度, 可以看出, 在  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  时, 仅有  $5 \text{ kHz}$  的频率; 在  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$  时, 1 周期的  $5 \text{ kHz}$  的频率分为  $2.5 \text{ kHz}$  的 2 周期, 此时出现了分岔; 在  $R_1 = 60 \text{ k}\Omega$  时, 输出电压  $V_o$  进入混沌状态, 其功率谱密度已没有明显的频率峰值.

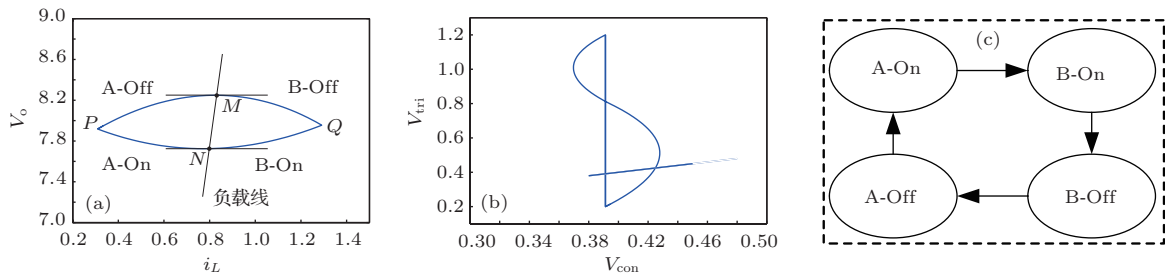


图 9 CCM 模式 1 周期状态下的相图 (a)  $i_L$  与  $V_o$  的相图; (b)  $V_{con}$  与  $V_{tri}$  的相图; (c) 变换器状态转换路径

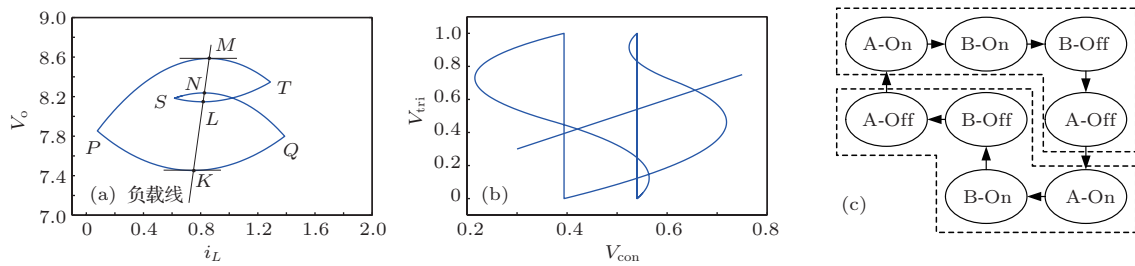


图 10 CCM 模式 2 周期状态下的相图 (a)  $i_L$  与  $V_o$  的相图; (b)  $V_{con}$  与  $V_{tri}$  的相图; (c) 电路状态转换路径

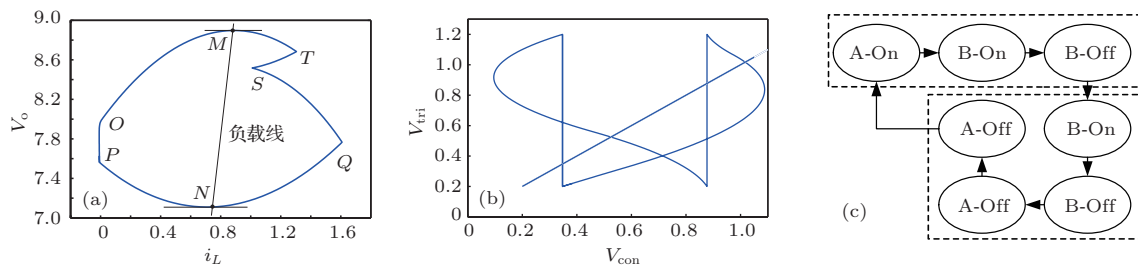


图 11 DCM 模式 2 周期下的相图 (a)  $i_L$  与  $V_o$  的相图; (b)  $V_{con}$  与  $V_{tri}$  的相图; (c) 电路状态转换路径

### 4 实验结果与讨论

实验电路原理图如图 13 所示. 各主要参数取值情况如下:  $V_g = 20\text{ V}$ ,  $L = 1\text{ mH}$ ,  $C = 47\text{ }\mu\text{F}$ ,  $R = 10\text{ }\Omega$ ,  $R_u = 90\text{ k}\Omega$ ,  $R_d = 10\text{ k}\Omega$ ,  $V_{\text{ref}} = 0.8\text{ V}$  (LM358 的 3 脚),  $V_{\text{tri}}$  的最大值是  $1\text{ V}$ , 最小值  $0\text{ V}$ , 频率  $F = 5\text{ kHz}$ ,  $C_1 = 1\text{ }\mu\text{F}$ ,  $R_1$  可调.

图 14 是  $R_1$  取不同值时的测量结果, 其中, 当  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$  时的测量结果如图 14 中 (a) 组所示, 与图 9 一致, 此时变换器处于 1 周期 CCM 模式; 当  $R_1 = 40\text{ k}\Omega$  时的测量结果如图 14 (b) 组所示, 与图 10 一致, 此时变换器处于 2 周期 CCM 模式; 当  $R_1 = 50\text{ k}\Omega$  的测量结果如图 14 (c) 组所示, 与图 11 一致, 此时变换器处于 2 周期 DCM 模式. 实验结果验证了文中的理论分析与仿真结果.

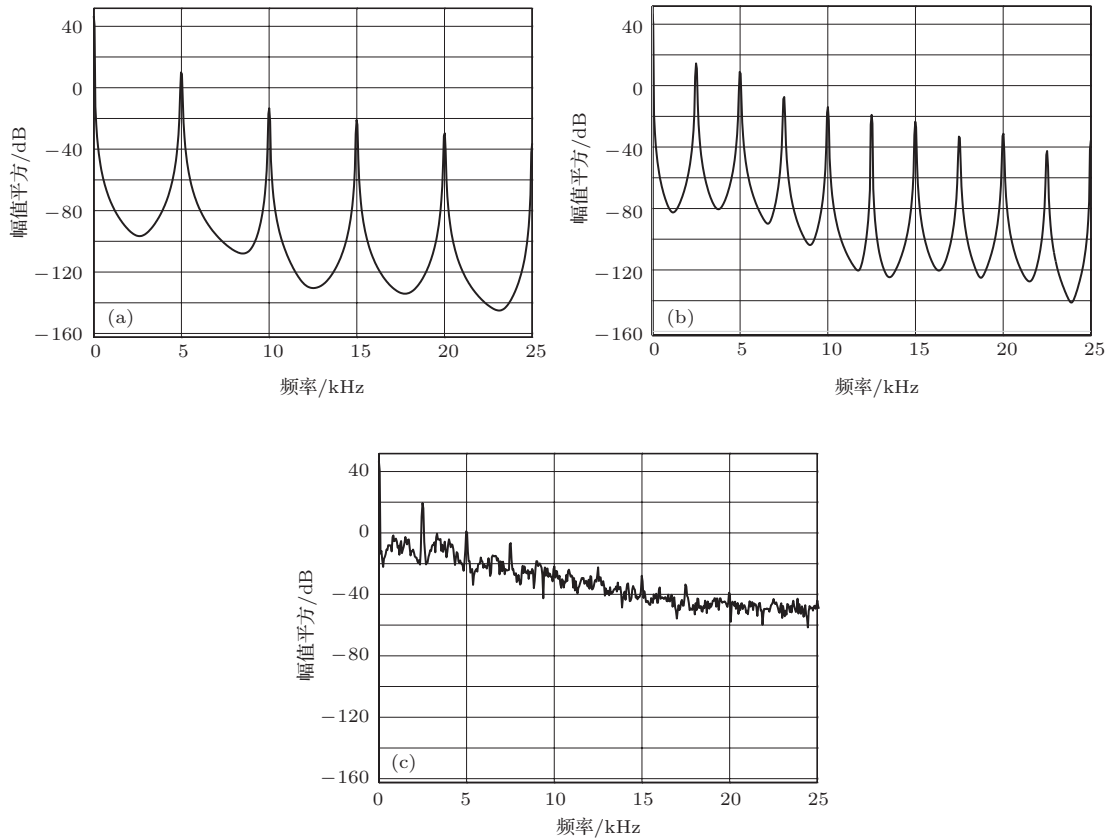


图 12 输出电压  $V_o$  的功率谱密度 (a)  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ ; (b)  $R_1 = 40\text{ k}\Omega$ ; (c)  $R_1 = 60\text{ k}\Omega$

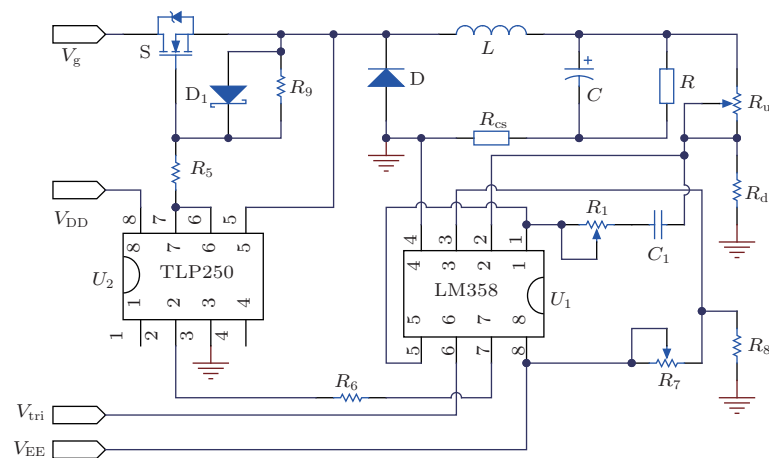


图 13 基于 PI 控制的电压反馈型 Buck 变换器原理图



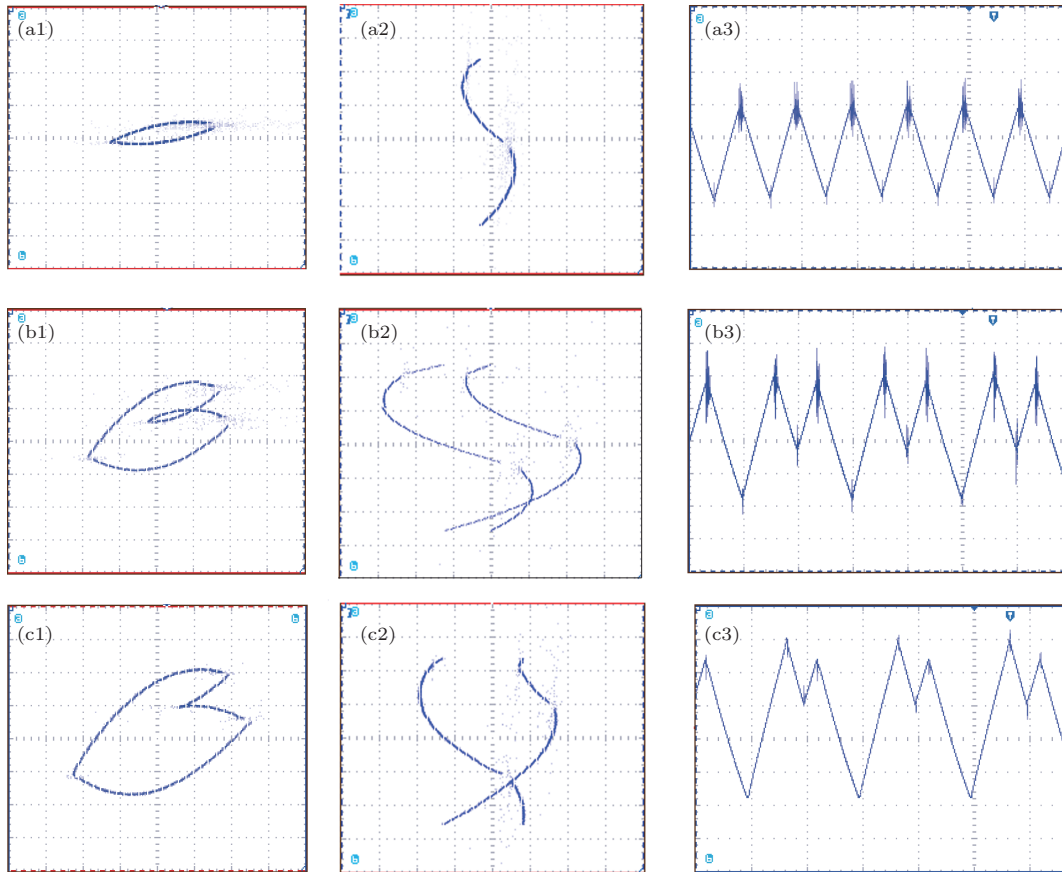


图 14 (a) 组图在  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  条件下测量; (b) 组图在  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$  条件下测量; (c) 组图在  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$  条件下测量; 第一列是  $i_L-V_o$  相图, 第二列是  $V_{con}-V_{tri}$  相图, 第三列是  $i_L$  波形图

## 5 结 论

本文以基于PI控制的电压反馈型Buck变换器作为研究对象, 对Buck变换器中的各种拓扑结构建立线性动力系统模型, 这些模型构成的分段光滑动力系统模型描述了Buck变换器的动力学行为; 分析每段动力系统模型的方向场, 指出Buck变换器的混沌吸引子, 其系统状态的流形将围绕该吸引子在有限的区域内运动; 推导出PI控制系统的输出控制量与输出电压之间的关系, 指出PI控制系统中比例因子与积分因子的作用; 分析变换器的倍周期分岔、边界碰撞及混沌等动力学行为, 给出了基于PI系数的分岔条件, 展示了变换器的状态转移过程. 仿真结果及实验结果验证了理论分析的正确性. 本文对DC-DC变换器的设计及稳定性分析具有指导意义.

## 参考文献

- [1] Sha J, Bao B C, Xu J P, Gao Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120501 (in Chinese)[沙金, 包伯成, 许建平, 高玉 2012 物理学报 **61** 120501]
- [2] Huang M, Wong S C, Tse C K, Ruan X B 2013 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **60** 1062
- [3] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020505
- [4] Zhao Y B, Feng J C, Chen Y F 2013 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **23** 1350113
- [5] Basak B, Parui S 2010 *IEEE Trans. Power Electr.* **25** 1556
- [6] Xie F, Yang R, Zhang B 2011 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **58** 2269
- [7] Yang N N, Liu C X, Wu C J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 080503
- [8] Xie F, Zhang B, Yang R 2013 *IEEE Tran. Ind. Electron.* **60** 3145
- [9] Deivasundari P, Uma G, Poovizhi R 2013 *IET Power Electr.* **6** 763
- [10] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4742
- [11] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060508
- [12] Yang P, Xu J P, He S Z, Bao B C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160501 (in Chinese)[杨平, 许建平, 何圣仲, 包伯成 2013 物理学报 **62** 160501]

- [13] Bao B C, Yang P, Ma Z H, Zhang X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220502 (in Chinese)[包伯成, 杨平, 马正华, 张希 2012 物理学报 **61** 220502]
- [14] Xie L L, Gong R X, Zhuo H Z, Ma X H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 058401 (in Chinese)[谢玲玲, 龚仁喜, 卓浩泽, 马献花 2012 物理学报 **61** 058401]
- [15] He S Z, Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Yang P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110503 (in Chinese)[何圣仲, 周国华, 许建平, 包伯成, 杨平 2013 物理学报 **62** 110503]
- [16] Liu F, 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080511

## Bifurcation of proportion-integration-based voltage-mode Buck converter\*

Yang Yi-Wei<sup>†</sup> Liu Jia-Lin Li Bin

(College of Electronic and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

( Received 17 October 2013; revised manuscript received 5 November 2013 )

### Abstract

Based on the piecewise smooth model, the smooth model and the discrete iterative model of proportion-integration (PI)-based voltage-mode Buck converter are derived. In this paper, it is proved that the chaotic attractor moves on the load line and is controlled by duty cycle, and that the manifold of the model moves around the chaotic attractor accompanied by the occurrences of period 1, period 2 and chaos phenomenon. The linear relationship between output voltage of the PI-controller and output voltage of Buck converter is derived, and then reveals that the proportional factor is a dominant one in PI controller. The period-doubling bifurcation, border collision and chaos are analyzed, and the state transfer process is exhibited. Experimental results verify that the theoretical modeling analysis and the simulation are correct.

**Keywords:** PI-based, voltage-mode, Buck converter, bifurcation

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.040502

\* Project supported by the Fundamental Research Fund for the Central Universities of China (Grant No. 2013ZM0015).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yangyiwei@scut.edu.cn