

## 一类海-气振子模型的微扰解\*

韩祥临<sup>1)</sup> 石兰芳<sup>2)</sup> 莫嘉琪<sup>3)†</sup>

1)(湖州师范学院数学系, 湖州 313000)

2)(南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

3)(安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2013年10月8日收到; 2013年11月21日收到修改稿)

文章创建一个求解关于海-气振子模型非线性方程的渐近方法, 并且基于一类海-气振子模型, 借助于改进的微扰方法, 首先按时滞参数进行展开, 然后对两小参数的相对值分为三种情形进行讨论, 最后利用微分不等式理论得到了问题解的一致有效的渐近展开式.

关键词: 非线性, 近似方法, 微扰

PACS: 02.30.Sa

DOI: 10.7498/aps.63.060205

## 1 引言

海-气振子是发生在热带大气和海洋中的异常事件, 它严重地影响各地区气候和生态等方面的变化, 对其规律的研究和预防为当前学术界所关注<sup>[1-9]</sup>. 海洋和大气之间的交互作用, 影响着气候的波动, 对这种交互作用的研究特别集中在厄尔尼诺现象上. 厄尔尼诺的振荡性态是海-气流动的正负两种反馈的结果, 这两种反馈决定了海表温度(SST)变化, 并与南方涛动流动强度有关, 导致了弱信风沿着赤道行进. 弱信风驱动着海洋流动变化, 加强了SST的异常. 许多学者已使用不同的方法对海-气振子局部和整体的性态做了多方位的讨论<sup>[1-6]</sup>. 对于复杂的全球海-气耦合现象, 通过简化的海-气非线性相互作用物理过程, 得到的振子模型能描述海-气振子的某些重要物理现象. 因此许多学者提出了研究海-气振子的各种振子形式的动力系统模型<sup>[7-12]</sup>, 如充电-放电振子<sup>[7,8,11]</sup>、时滞振子<sup>[9]</sup>、平流-反射振子<sup>[10]</sup>等理论的研究. 近来, 许多学者研究了非线性微扰问题. 一些近似方法被优

化和改进, 包括边界层法、平均化法、匹配近似展开方法和多重尺度法等<sup>[13-17]</sup>. 文献<sup>[18-30]</sup>也利用微扰理论和方法研究了一类非线性问题. 本文讨论一类时滞海-气振子微扰振子. 众所周知, 对于“微扰”模型, 使用微扰方法来求其模型渐近解是十分有效的. 因为用微扰方法求出的渐近解序列与模型的精确解达到要求的精度较快, 有时只需求出序列的前一、二项就可得到满意的精度. 另外, 用微扰方法得到的渐近序列用的是解析表达式, 这样, 它还可对渐近解进行解析运算, 例如微分、积分等解析运算. 从而可进一步得到模型解更深层的性态. 此外, 在本文中讨论的是一个两参数时滞模型, 因此需要对原方法做适当的改进, 以得到带有时滞数的两参数情形下满意的渐近解. 因此, 在本文的讨论中采用改进的微扰方法求渐近解具有上述的特点和优越性.

## 2 海-气振子模型

考虑一个在西太平洋上的海-气振子时滞振子. 设信风强度异常与SST异常由Niño-4 (5°S—

\* 国家自然科学基金(批准号: 11202106)、江苏省高校自然科学基金项目(批准号: 13KJB170016)和浙江省自然科学基金(批准号: LY13A010005)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

5°N, 160°E, 160°E—150°W) 到 Niño-3 (5°S—5°N, 150°—90°W) 范围内具有强迫扰动的情形. 我们能得到如下赤道太平洋非线性时滞微扰振子模型:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{ad}{R}T - \frac{bd}{R}T(t-\tau) - \varepsilon Q(T(t-\tau)), \quad (1)$$

$$T(t) = c, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2)$$

其中  $T$  为 SST 异常,  $\tau$  为进行波由西太平洋边界转向到东太平洋的时滞参数,  $a$  为  $T$  的正反馈系数,  $b$  为在西边界的反射波负反馈系数,  $d$  为由 Niño-3 SST 异常到 Niño-4 信风强度异常的正反馈系数,  $R$  为阻尼系数,  $c$  为初始常数,  $\varepsilon Q(T)$  为强迫扰动项, 并设  $Q$  为解析有界函数, 而  $\tau$  和  $\varepsilon$  为两个正的小参数. 因为模型 (1), (2) 一般不能用初等方法来求出其精确解, 故本文采用改进了的微扰方法来求出它的一致有效的近似解.

### 3 改进的微扰方法

模型 (1), (2) 为具有小时滞的问题, 我们也需要将通常的微扰方法进行改进. 为此, 先按  $\tau$  展开  $T(t-\tau)$ , 有

$$T(t-\tau) = T(t) - \frac{dT(t)}{dt}\tau + \frac{1}{2!} \frac{d^2T(t)}{dt^2}\tau^2 + \dots \quad (3)$$

于是由方程 (1) 得

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} = & \frac{ad}{R}T(t) - \frac{bd}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \tau^k \right] \\ & - \varepsilon Q \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \tau^k \right] \right). \end{aligned} \quad (4)$$

现分如下三种情形讨论.

(I) 当  $\varepsilon/\tau \rightarrow 0$  时

设  $\xi = \varepsilon/\tau$ , 即  $\varepsilon = \xi\tau$ . 于是由方程 (4) 得

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} = & \frac{ad}{R}T(t) - \frac{bd}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \tau^k \right] \\ & - \xi\tau Q \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \tau^k \right] \right). \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$T(t, \xi, \tau) \sim \sum_{i,j=0}^{\infty} T_{ij}(t) \xi^i \tau^j. \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 得

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{dT_{ij}(t)}{dt} \xi^i \tau^j$$

$$\begin{aligned} = & \frac{ad}{R} \sum_{i,j=0}^{\infty} T_{ij}(t) \xi^i \tau^j \\ & - \frac{bd}{R} \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^i \tau^{j+k} \\ & - \xi\tau Q \left( \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^i \tau^{j+k} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

再将 (7) 式按  $\xi, \tau$  展开非线性项, 合并  $\xi, \tau$  同次幂项的系数, 得到

$$\frac{dT_{0j}}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_{0j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$\frac{dT_{i0}}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_{i0} \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\frac{dT_{11}}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_{11} + \frac{bd}{R} \frac{dT_{10}}{dt} - Q(T_{00}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{ij}}{dt} = & \frac{(a-b)d}{R} T_{ij} - F_{ij}(t) - \bar{F}_{(i-1)(j-1)}(t) \\ & i, j = 1, 2, \dots, \quad i+j \neq 2, \end{aligned} \quad (11)$$

而

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) = & \left[ \frac{1}{i!j!} \frac{bd}{R} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \tau^j} \right. \\ & \left. \times \sum_{r,s,k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^r \tau^{s+k} \right) \right]_{\xi=\tau=0}, \\ \bar{F}_{ij}(t) = & \left[ \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \tau^j} Q \right. \\ & \left. \times \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^i \tau^{j+k} \right) \right]_{\xi=\tau=0}. \end{aligned}$$

由 (8)–(11) 式, 可分别得

$$T_{0j} = C_{j0} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$T_{i0} = C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} T_{11} = & C_{11} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - Q \left( C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} = & C_{ij} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \int_0^t \left[ F_{ij}(\eta) + \bar{F}_{(i-1)(j-1)}(\eta) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

其中  $C_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ) 为任意常数.

将 (12)—(15) 式代入 (6) 式, 并由 (2) 式, 可得方程 (4) 的形式渐近解

$$\begin{aligned} & T(t, \xi, \tau) \\ &= c \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \xi \tau \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - Q \left( C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \\ & - \left[ \sum_{\substack{i=j=1 \\ i+j \neq 2}}^{\infty} \int_0^t \left[ F_{ij}(\eta) + \bar{F}_{(i-1)(j-1)}(\eta) \right] \right. \\ & \left. \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \right] \xi^i \tau^j. \quad (16) \end{aligned}$$

(II) 当  $\varepsilon/\tau = O(1)$  时

这时可设  $\varepsilon = K\tau$ , 其中  $K$  为非零常数. 于是由方程 (4) 得

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{ad}{R} T(t) - \frac{bd}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \tau^k \right] \\ & - K\tau Q \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \tau^k \right] \right). \quad (17) \end{aligned}$$

令

$$T(t, \tau) \sim \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \tau^i. \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (17) 式, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{dT_i(t)}{dt} \tau^i \\ &= \frac{ad}{R} \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \tau^i - \frac{bd}{R} \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_i(t)}{dt^k} \tau^{i+k} \\ & - K\tau Q \left( \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_i(t)}{dt^k} \tau^{i+k} \right). \quad (19) \end{aligned}$$

再将 (19) 式按  $\tau$  展开非线性项, 合并  $\tau$  同次幂项的系数, 得到

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_0, \quad (20)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_1 + \frac{bd}{R} \frac{dT_{10}}{dt} - KQ(T_0), \quad (21)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_i - F_i(t)$$

$$- \bar{F}_{(i-1)}(t) \quad i = 2, 3, \dots, \quad (22)$$

而

$$F_i = \left[ \frac{1}{i!} \frac{bd}{r} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} \sum_{s,k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \tau^{s+k} \right) \right]_{\tau=0},$$

$$\bar{F}_i = \left[ \frac{K}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} Q \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_i(t)}{dt^k} \tau^{i+k} \right) \right]_{\tau=0}.$$

由 (20)—(22) 式, 可分别得

$$T_0 = C_0 \exp \frac{(a-b)d}{R} t, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= C_1 \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_0 \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - KQ \left( C_0 \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_i &= C_i \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \int_0^t [F_i(\eta) + \bar{F}_{(i-1)}(\eta)] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \\ & \quad i = 2, 3, \dots, \quad (25) \end{aligned}$$

其中  $C_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) 为任意常数.

将 (23)—(25) 式代入 (18) 式, 并由 (2) 式, 可得方程 (17) 的形式渐近解

$$\begin{aligned} T(t, \tau) &= c \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \tau \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_0 \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - KQ \left( C_0 \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \\ & - \left[ \sum_{i \neq 2}^{\infty} \int_0^t [F_i(\eta) + \bar{F}_{(i-1)}(\eta)] \right. \\ & \left. \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \right] \tau^i. \quad (26) \end{aligned}$$

(III) 当  $\tau/\varepsilon \rightarrow 0$  时

设  $\xi = \tau/\varepsilon$ , 即  $\tau = \xi\varepsilon$ . 于是由方程 (4) 得

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{ad}{R} T(t) - \frac{bd}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \xi^k \varepsilon^k \right] \\ & - \varepsilon Q \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T}{dt^k} \xi^k \varepsilon^k \right] \right). \quad (27) \end{aligned}$$

令

$$T(t, \xi, \varepsilon) \sim \sum_{i,j=0}^{\infty} T_{ij}(t) \xi^i \varepsilon^j. \quad (28)$$

将(28)式代入(27)式, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{dT_{ij}(t)}{dt} \xi^i \varepsilon^j \\ &= \frac{ad}{R} \sum_{i,j=0}^{\infty} T_{ij}(t) \xi^i \varepsilon^j \\ & - \frac{bd}{R} \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^{i+k} \varepsilon^{j+k} \\ & - \varepsilon Q \left( \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^{i+k} \varepsilon^{j+k} \right). \quad (29) \end{aligned}$$

再将(29)式按  $\xi, \varepsilon$  展开非线性项, 合并  $\xi, \varepsilon$  同次幂项的系数, 我们得到

$$\frac{dT_{0j}}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_{0j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (30)$$

$$\frac{dT_{i0}}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_{i0} \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

$$\frac{dT_{11}}{dt} = \frac{(a-b)d}{R} T_{11} + \frac{bd}{R} \frac{dT_{10}}{dt} - Q(T_{00}), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{ij}}{dt} &= \frac{(a-b)d}{R} T_{ij} - F_{ij}(t) - \bar{F}_{i(j-1)}(t) \\ & i, j = 1, 2, \dots, \quad i + j \neq 2, \quad (33) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= \left[ \frac{1}{i!j!} \frac{bd}{R} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \varepsilon^j} \sum_{r,s,k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{k!} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^{r+k} \varepsilon^{s+k} \right) \right]_{\xi=\tau=0}, \\ \bar{F}_{ij}(t) &= \left[ \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \varepsilon^j} Q \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{d^k T_{ij}(t)}{dt^k} \xi^{i+k} \varepsilon^{j+k} \right) \right]_{\xi=\tau=0}. \end{aligned}$$

由(30)–(33)式, 可分别得

$$T_{0j} = C_{j0} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (34)$$

$$T_{i0} = C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \quad i = 1, 2, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{11} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - Q \left( C_{j0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right] \end{aligned}$$

$$\times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \quad (36)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= C_{ij} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \int_0^t [F_{ij}(\eta) + \bar{F}_{i(j-1)}(\eta)] \exp \frac{(a-b)d}{R} \\ & \times (t-\eta) d\eta \quad i, j = 1, 2, \dots; \quad i + j \neq 2, \quad (37) \end{aligned}$$

其中  $C_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ) 为任意常数.

将(34)–(37)式代入(28)式, 并由(2)式, 可得方程(27)的形式渐近解

$$\begin{aligned} T(t, \xi, \tau) &= c \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \xi \tau \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - Q \left( C_{j0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \\ & - \left[ \sum_{\substack{i=j=1 \\ i+j \neq 2}}^{\infty} \int_0^t [F_{ij}(\eta) + \bar{F}_{i(j-1)}(\eta)] \right. \\ & \left. \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \right] \xi^i \varepsilon^j. \quad (38) \end{aligned}$$

#### 4 解的一致有效性及其精度

为了证明由上一节得到形式渐近解的一致有效性, 用如下的微分不等式仅证明上一节中的第(I)种情形(16)式为一致有效的渐近解. 对于第(II), (III)种情形(26)和(38)式也为一致有效的渐近解, 其证明的方法与第(I)情形雷同, 在此从略.

现考虑上一节中的第(I)种情形, 即证明(16)式为模型(1), (2)解是关于小参数  $\xi$  和  $\tau$  一致有效的展开式. 先构造辅助函数  $\alpha$  和  $\beta$ :

$$\alpha = Z_m - \delta \zeta, \quad \beta = Z_m + \delta \zeta, \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad (39)$$

其中  $\delta$  为足够大的正常数, 它将在下面选定,  $T_0$  为充分大的正数,  $\zeta = \max(\xi^{m+1} \tau^m, \xi^m \tau^{m+1})$ , 以及

$$\begin{aligned} Z_m &= c \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \xi \tau \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - Q \left( C_{j0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R} (t-\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$- \left[ \sum_{\substack{i=j=1 \\ i+j \neq 2}}^m \int_0^t [F_{ij}(\eta) + \bar{F}_{(i-1)(j-1)}(\eta)] \right. \\ \left. \times \exp \frac{(a-b)d}{R}(t-\eta) d\eta \right] \xi^i \tau^j.$$

显然有

$$\alpha \leq \beta, \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad \alpha|_{t=0} \leq c \leq \beta|_{t=0}. \quad (40)$$

由假设, 对于小的  $\xi, \tau$ , 存在正常数  $M, N$ , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d\alpha}{dt} - \frac{ad}{R}\alpha + \frac{bd}{R}\alpha(t-\tau) + \xi\tau Q(\alpha(t-\tau)) \\ = & \frac{dZ_m}{dt} - \frac{ad}{R}(Z_m - \delta\zeta) + \frac{bd}{R}(Z_m(t-\tau) - \delta\zeta) \\ & + \xi\tau Q(Z_m(t-\tau)) + \xi\tau(Q(Z_m(t-\tau) \\ & - \delta\zeta) - \xi\tau Q(Z_m(t-\tau))) \\ \leq & \sum_{j=0}^m \left[ \frac{dT_{0j}}{dt} - \frac{(a-b)d}{R}T_{0j} \right] \tau^j \\ & + \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{dT_{i0}}{dt} - \frac{(a-b)d}{R}T_{i0} \right] \xi^i \\ & + \left[ \frac{dT_{11}}{dt} - \frac{(a-b)d}{R}T_{11} - \frac{bd}{R} \frac{dT_{10}}{dt} + Q(T_{00}) \right] \xi\tau \\ & + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \neq 2}}^m \left[ \frac{dT_{ij}}{dt} - \frac{(a-b)d}{R}T_{ij} + F_{ij} \right. \\ & \left. + \bar{F}_{(i-1)(j-1)} \right] \xi^i \tau^j + M\zeta - \delta N\zeta \\ = & (M - \delta N)\zeta, \end{aligned}$$

其中  $R$  为足够大的正常数. 选择  $\delta > M/N$ , 这时有

$$\begin{aligned} & \frac{d\alpha}{dt} - \frac{ad}{R}\alpha + \frac{bd}{R}\alpha(t-\tau) \\ & + \xi\tau Q(\alpha(t-\tau)) \leq 0 \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad (41) \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} & \frac{d\beta}{dt} - \frac{ad}{R}\beta + \frac{bd}{R}\beta(t-\eta) \\ & + \xi\eta Q(\beta(t-\eta)) \geq 0 \quad 0 \leq t \leq T_0. \quad (42) \end{aligned}$$

由(40)–(42)式,  $\alpha$ 和 $\beta$ 分别为问题(1), (2)的下解和上解<sup>[31]</sup>. 由微分不等式理论知, 问题(1), (2)存在一个解 $T(t, \xi, \tau)$ , 并成立 $\alpha(t, \xi, \tau) \leq y(t, \xi, \tau) \leq \beta(t, \xi, \tau)$ . 再由(39)式, 我们有关系式

$$\begin{aligned} & T(t, \xi, \tau) \\ = & c \exp \frac{(a-b)d}{R}t - \xi\tau \int_0^t \left[ \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_{i0} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \times \exp \frac{(a-b)d}{R}\eta - Q \left( C_{j0} \exp \frac{(a-b)d}{R}\eta \right) \right] \\ & \times \exp \frac{(a-b)d}{R}(t-\eta) d\eta \\ & - \left[ \sum_{\substack{i=j=1 \\ i+j \neq 2}}^m \int_0^t [F_{ij}(\eta) + \bar{F}_{(i-1)(j-1)}(\eta)] \right. \\ & \left. \times \exp \frac{(a-b)d}{R}(t-\eta) d\eta \right] \xi^i \tau^j + O(\zeta) \\ & 0 \leq t \leq T_0, \quad 0 < \xi = \varepsilon/\tau, \quad \tau \ll 1, \quad (43) \end{aligned}$$

其中  $\zeta = \max(\xi^{m+1}\tau^m, \xi^m\tau^{m+1})$ . 故由(43)式知, (16)式为问题(1), (2)解的一致有效的渐近展开式.

由(43)式我们还可得知, 利用改进的微扰方法得到的赤道太平洋时滞海-气振子模型(1), (2)的海表温度异常 $T$ 的展开式(16)具有很好的精度.

### 5 举 例

**例1** 由非线性时滞模型(1), (2), 为了简单起见, 我们选择抽象的无量纲扰动项为  $0.05 \sin T(t-\tau)$  以及相对无量纲参数:  $a = 1, b = 3, \varepsilon = 0.05, d = 2, R = 1, c = 2, \tau = 0.2$ . 在上一节改进的微扰方法第(I)中情形下, 由(16)式, 则不难得到时滞模型(1), (2)的 $\xi^1\tau^1$ 次的渐近解 $T_{asy}(t)$ :

$$\begin{aligned} T_{asy}(t) = & 2 \exp(-4t) - 0.05 \int_0^t \left[ -32 \exp(-4\eta) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sin(2 \exp(-4\eta)) \right] \\ & \times \exp 4(\eta - t) d\eta. \quad (44) \end{aligned}$$

由(44)式及模型(1), (2)可得到微扰渐近解 $T_{asy}(t)$ 和数值模拟精确解 $T_{eca}(t)$ 的图形曲线(参见图1)和数值(参见表1)比较. 由此又可看出近似解 $T_{asy}(t)$ 具有良好的精度.

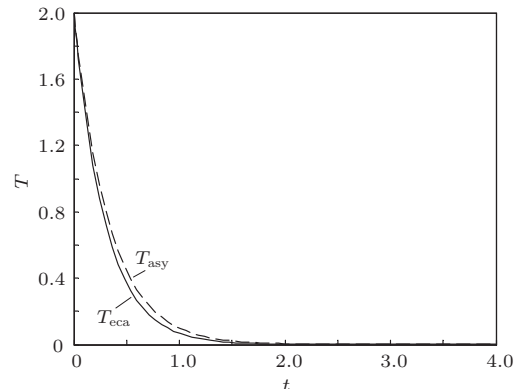


图1 微扰渐近解 $T_{asy}(t)$ 和数值模拟解 $T_{eca}(t)$ 的曲线比较 ( $a = 1, b = 3, \varepsilon = 0.05, d = 2, R = 1, c = 2, \tau = 0.2$ )

**例 2** 由非线性时滞模型 (1), (2), 我们选择抽象的无量纲扰动项为  $0.5 \sin T(t - \tau)$  以及相对无量纲参数:  $a = 2.5, b = 2, \varepsilon = 0.02, d = 2, R = 3, c = 2, \tau = 0.05$ . 在上一节改进的微扰方法第 (I) 中情形下, 由 (16) 式, 则不难得到时滞模型 (1), (2) 的  $\xi^1 \tau^1$  次的渐近解  $T_{asy}(t)$ :

$$T_{asy}(t) = 2 \exp\left(\frac{t}{2}\right) - 0.05 \int_0^t \left[\frac{8}{9} \exp \frac{\eta}{2}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sin\left(2 \exp \frac{\eta}{2}\right)\right] \times \exp \frac{1}{2}(t - \eta) d\eta. \quad (45)$$

由 (45) 式及模型 (1), (2) 可得到微扰渐近解  $T_{asy}(t)$  和数值模拟精确解  $T_{eca}(t)$  的数值 (参见表 2) 比较. 由此能够看出近似解  $T_{asy}(t)$  也具有良好的精度.

表 1 微扰渐近解  $T_{asy}(t)$  和数值模拟解  $T_{eca}(t)$  的数值比较 ( $a = 1, b = 3, \varepsilon = 0.05, d = 2, R = 1, c = 2, \tau = 0.2$ )

$t$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$T_{eca}(t)$	2.00	0.71	0.14	0.03	0.01	0	0	0	0
$T_{asy}(t)$	2.00	0.80	0.20	0.05	0.01	0	0	0	0

表 2 微扰渐近解  $T_{asy}(t)$  和数值模拟解  $T_{eca}(t)$  的数据比较 ( $a = 2.5, b = 2, \varepsilon = 0.02, d = 2, R = 3, c = 2, \tau = 0.05$ )

$t$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$T_{eca}(t)$	2.00	2.11	2.22	2.35	2.47	2.61	2.75	2.90	3.07	3.24	3.43
$T_{asy}(t)$	2.00	2.13	2.27	2.42	2.57	2.73	2.89	3.06	3.24	3.42	3.59

## 6 预测和预防

由上述第 4, 5 节的讨论知:

1) 当 SST 异常的正反馈的系数  $a$  小于由西太平洋边界反射波负反馈的系数  $b$  时, 由 (16) 式得知, SST 异常的  $T$  为指数衰减的函数, 于是 SST 异常的  $T$  是稳定的; 由第 5 节图 1 和表 1 及  $b > a$ , 我们也能够看出具有强迫扰动的非线性海-气振子时滞模型 (1), (2) 解 SST 异常  $T$ , 一般是稳定的, 这时 SST 不会产生大幅度的变化, 对应的气候处于平稳状态;

2) 当 SST 异常的正反馈的系数  $a$  大于由西太平洋边界反射波表示的负反馈的系数  $b$  时, 由 (16) 式得知, SST 异常的  $T$  为指数增加的函数, 于是 SST 异常  $T$  是不稳定的; 由表 2 及  $b < a$ , 我们也能够看出具有强迫扰动的非线性海-气振子时滞模型 (1), (2) 解 SST 异常  $T$ , 一般是不稳定的; 在这种情况下, 加上外因素的作用, 导致了 SST 异常进入混沌状态, 海表能量逐渐增大, 形成气候急剧的异常, 甚至会导致灾难性的气候, 造成很大的自然灾害, 在这种情形下, 最后只有再由“外界”因素 (例如遇到岛屿与陆地等) 的影响, 致使能量衰减才能使 SST 异常趋于平稳而转向正常.

下面以第 (I) 种情形为例. 我们还可对渐近解 (16) 式对  $t$  求导数, 得到  $\frac{dT}{dt}$  的渐近表示式:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{(a-b)cd}{R} \exp \frac{(a-b)d}{R} t \\ & - \left( \frac{(a-b)bd^2}{R^2} C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right. \\ & \left. - Q \left( C_{i0} \exp \frac{(a-b)d}{R} \eta \right) \right) \xi \tau \\ & - \sum_{\substack{i=j=1 \\ i+j \neq 2}}^{\infty} [F_{ij} + \bar{F}_{(i-1)(j-1)}] \xi^i \tau^j, \end{aligned} \quad (46)$$

(46) 式表示 SST 异常按时间  $t$  的变化率. 也就是说, 我们不仅由 (10) 式得到 SST 异常的渐近解, 而且还能由 (46) 式得到 SST 异常的变化率的渐近表示式.

因此, 我们可以通过测得的模型 (1), (2) 的参数得到模型的渐近解 (16) 式, 然后对所得 SST 异常的结果对所在区域内的大气异常情况做出预报, 并且由 (46) 式等方面的运算结果, 还可依据所得的相关物理量, 例如 SST 异常变化率  $\frac{dT}{dt}$ , 得到更详细的预报数据.

由此, 综合所得的相关物理量, 可得更详细的气候异常情况 (这是用简单的数值模拟是达不到的). 从而根据气候异常的严重程度, 使我们采取适当的预防措施, 达到灾难带来的危害降到最低.

## 7 结 论

1) 海-气振子是一个复杂的自然现象. 因此需要把它在不同的情形下简化为海-气振子基本动力学模型, 并利用合适的近似方法去求解它. 在具有时滞的海气振子为微扰的情形下, 经过改进的微扰方法就是一个简单而有效的方法.

2) 经过改进的微扰方法是一个渐近的解析方法, 它与一般的数值模拟方法不同, 通过这个改进的微扰方法得到的近似解还可进行解析运算. 于是由(10)式, 我们还能进一步进行解析运算, 从而可得到赤道太平洋有关海表温度异常的其他相关物理量的定量和定性方面的物理性态.

3) 利用改进的微扰方法得到海-气振子的渐近解, 具有良好的精度, 并通过解的渐近表达式, 能得到海表温度 SST 异常的信息, 进而对所在的区域范围内, 对气候做出预测, 并采取预防措施, 使灾难减小到最低.

## 参考文献

- [1] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese)[封国林, 董文杰, 贾晓静, 曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [2] Guan X P, He Y H, Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese)[关新平, 何宴辉, 范正平 2003 物理学报 **52** 276]
- [3] Li C G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2114 (in Chinese)[李春贵 2003 物理学报 **52** 2114]
- [4] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [5] Lin J, Xu Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049
- [6] Hu Y Q 2002 *Introductory to Atmospheric Thermodynamics and Dynamics—Linear and Nonlinear Thermodynamics of the Atmospheric Non-equilibrium State* (Beijing: Geology Pub.) (in Chinese) [胡隐樵 2002 大气热力动力学导论——大气非平衡态线性和非线性热力学 (北京: 地质出版社)]
- [7] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 811
- [8] Li X J, Chen X Q, Yan J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160202 (in Chinese)[李晓静, 陈绚青, 严静 2013 物理学报 **62** 160202]
- [9] Li X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030201
- [10] Wang C 2001 *J. Adv. Atmosph. Sci.* **18** 674
- [11] Zhao Q, Liu S K, Liu S D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220201 (in Chinese)[赵强, 刘式适, 刘式达 2012 物理学报 **61** 220201]
- [12] Liu S K, Liu S D 2012 *Nonlinear Equations in Physics* (Beijing: Peking University Press) (in China) [刘式适, 刘式达 2012 物理学中的非线性方程 (北京: 北京大学出版社)]
- [13] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)
- [14] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)
- [15] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
- [16] D'Aprile T, Pistoia A 2010 *J. Diff. Eqs.* **248** 556
- [17] Faye L, Frenod E, Seck D 2011 *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **29** 1001
- [18] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2001 *Prog. Nat. Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛, 季仲贞, 王斌 2002 自然科学进展 **12** 102]
- [19] Lin W T, Mo J Q 2003 *Chin. Sci. Bull.* **48** suppl. II 5
- [20] Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 010204
- [21] Han X L, Zhao Z J, Cheng E J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110202 (in Chinese)[韩祥临, 赵振江, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 110202]
- [22] Han X L, Du Z J, Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200208 (in Chinese)[韩祥临, 杜增吉, 莫嘉琪 2012 物理学报 **61** 200208]
- [23] Shi L F, Ouyang C, Chen L H, Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050203 (in Chinese)[石兰芳, 欧阳成, 陈丽华, 莫嘉琪 2012 物理学报 **61** 050203]
- [24] Shi L F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010201 (in Chinese)[石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 010201]
- [25] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T, Chen L H 2012 *Chin. Geog. Sci.* **22** 42
- [26] Mo J Q 2009 *Sci. China G* **39** 568
- [27] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080202 (in Chinese)[莫嘉琪, 林万涛, 林一骅 2011 物理学报 **60** 080202]
- [28] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090203 (in Chinese)[莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 090203]
- [29] Mo J Q 2011 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
- [30] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205
- [31] Chang K W, Howes F A 1984 *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications* (New York: Springer-Verlag)

# Small perturbed solution for a class of sea-air oscillator model\*

Han Xiang-Lin<sup>1)</sup> Shi Lan-Fang<sup>2)</sup> Mo Jia-Qi<sup>3)</sup>†

1) (*Departmentt of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China*)

2) (*College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

3) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

( Received 8 October 2013; revised manuscript received 21 November 2013 )

## Abstract

In this paper, we create an asymptotic method of solving the nonlinear equation for the sea-air oscillator model. And based on a class of oscillator of the sea-air oscillator model. We first expanding the time delay, then discussing the relative values for the small parameters in the case of three copies, and finally, obtain uniformly valid asymptotic expansion by using the theory of the differential inequity.

**Keywords:** nonlinear, approximate method, small perturbation

**PACS:** 02.30.Sa

**DOI:** [10.7498/aps.63.060205](https://doi.org/10.7498/aps.63.060205)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202106), the Natural Sciences Fundation from the Universities of Jiangsu Province, China (Grant No. 13KJB170016) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LY13A010005).

† Corresponding author. E-mail: [mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn](mailto:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn)