

# 驱动模式对具有库源平衡的黏性流体中空间反射时间反演联合对称性的影响\*

陈曦<sup>1)</sup> Yu Whitney<sup>2)</sup> Joglekar Yogesh N<sup>3)</sup> 郑友取<sup>4)</sup>  
许友生<sup>4)†</sup> 吴锋民<sup>1)‡</sup>

1) (浙江师范大学物理系, 金华 321004)

2) (Department of Mechanical Engineering, Indiana University-Purdue University Indianapolis (IUPUI), Indiana USA 46202)

3) (Department of Physics, Indiana University-Purdue University Indianapolis (IUPUI), Indiana USA 46202)

4) (浙江科技学院, 杭州 310023)

(2013年9月10日收到; 2013年12月19日收到修改稿)

满足空间反射时间反演 parity and time-reversal (PT) 联合对称性的库源平衡宏观开放系统近几年成为一个研究热点. 本文将PT对称性引入到动力学系统, 用格子玻尔兹曼方法求解 Navier-Stokes 方程, 发现在二维黏性流体中, 如果进口和出口的条件完全等同, 在低雷诺数流动中, 流场的PT对称函数 ( $\rho$ ) 随雷诺数 ( $Re$ ) 的增高以  $\rho_n \sim Re^n$  指数增长. 用三种不同的速度剖面来驱动流体, 计算流场达到稳定状态时的PT对称性. 结果发现, 进出口平衡的黏性管流中,  $\rho_n \sim Re^n$  的规律在三种驱动模式中出现, 表明流场的PT对称性是由流体本身决定的, 与驱动模式没有关系, 从此论证所得到的指数率的谱适性.

**关键词:** 库源平衡, 格子玻尔兹曼, 空间反射时间反演联合对称, 低雷诺数

**PACS:** 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf, 78.47.dc

**DOI:** 10.7498/aps.63.060206

## 1 引言

在1998年发表的一篇开创性论文中<sup>[1]</sup>, Bender等证明了一类非厄米哈密顿量存在实数特征值和下边界. 他们发现具有复电势  $V_n(x) = x^2(ix)^\eta$  的哈密顿量  $H_\eta = -\partial_x^2 + x^2(ix)^\eta$  虽然是非厄米的, 但是这一类哈密顿函数仍然存在实特征值谱, 当  $\eta \geq 0$  时, 这个特征值谱为实数; 当  $\eta < 0$  时, 具有有限个实数特征值, 其余的为复共轭. 这是因为非厄米的哈密顿同时满足空间反射时间反演 (parity time-reversal, PT) 对称性. 对于一个哈密顿函数来说, 参数空间中的特征值为实数, 特征函数同时为PT运算的特征函数的区间, 我们称之为PT对

称相空间; 当特征值为复共轭形式时, 对称性被破坏. 这种从对称性相空间到非对称性相空间之间的转换通过非对称参数

$$\rho_{PT} = \sum_{\lambda} \int dx |\psi_{\lambda}(x) - \psi_{\lambda}^*(-x)|$$

来表达. 在PT对称相中  $\rho_{PT} = 0$ , 如果PT对称性被破坏, 不对称参数为非零.

近年来, 人们开始广泛研究在宏观连续介质<sup>[2-4]</sup>和格子模型<sup>[5-10]</sup>中的PT对称性. 实验表明, PT对称的哈密顿量不仅仅是一个数学上的问题, 它同时对应宏观开放非平衡系统中库 (sink) 和源 (source) 的平衡. 在过去的几十年中, 理论研究已经证明具有库源平衡的开放系统相对于传统

\* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 10932010)、国家自然科学基金 (批准号: 11072229, 11072220, U1262109, 11079029, 61274099) 和美国 (the National Science Foundation DMR-1054020 (YJ).) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: 113003@zust.edu.cn

‡ 通讯作者. E-mail: wfm@zjnu.cn

的开放系统具有一些新奇的性质<sup>[1,3]</sup>. 其中, 库源平衡的开放系统通过结合了PT对称的运动方程来描述, 但研究并没有涉及到对称性. 近三年里, 研究者引入了一系列具有库源平衡的开放系统的实验, 例如, 在光线传输中, PT对称可以通过一个微小的耦合光波导来实现, 一方面光子在传输中被吸收, 另一方面注入适量的光子使之达到库和源的平衡<sup>[11-14]</sup>. 此外还有耦合电子振荡器<sup>[15]</sup>和耦合机械振荡器<sup>[16]</sup>等也设计了同样的库源平衡, 用于维持由于耗散而趋于衰竭的开放系统能持续平稳地运作. 这些实验证明了具有库源平衡的开放系统具有一些惊人的性质, 例如视觉波长范围的单向隐形性质<sup>[17]</sup>. 研究表明, 具有空间反射时间反演联合对称的库源平衡开放系统会经历从完全PT对称的状态到PT不对称 $\rho_{PT} \neq 0$ 状态<sup>[18,19]</sup>的转换.

流体力学的控制方程是非线性的Navier-Stokes (NS)方程. 因此, 除了几种特殊的情况<sup>[20,21]</sup>之外, 求解其对称性并不简单, 甚至解析过程非常复杂. 我们知道, 在流体系统中, 流入(质量增益)和流出(质量损失)的概念很常见. 传统的黏性流体都是通过逆风流、压力差、边界移动来驱动的, 因此, 一般情况下稳定状态时出入口的速度场是不同的. 特别是在入口和出口具有固定的速度场的流体系统中, 对称性的研究仍然是一片未被探索的领域. 最近, 我们通过格子玻尔兹曼方法求解NS方程, 首次提出用进出口具有完全相同速度场的流体系统来研究具有库源平衡的二维不可压黏性流体的PT对称性<sup>[22]</sup>. 研究发现, 在低雷诺数( $Re$ )流动中, 流场的PT对称函数( $\rho$ )随雷诺数的增高以指数增长,  $\rho_n \sim Re^n$ .

本文用三种不同的速度剖面来驱动流体, 计算流场达到稳定状态时的PT对称性, 研究驱动模式对PT对称性的影响, 以检测指数增长规律的谱适性.

## 2 控制方程

格子玻尔兹曼方法(LBM)起源于格子气自动机, 它能更加深刻地反映流体的物理本质. 由于其在处理复杂流动现象<sup>[23,24]</sup>过程中物理和计算方面的优势, 目前已经发展成为一种很有前途的数值计算方法, 并已经被用于湍流、多相流、空气动力学和一些具有化学反应和复杂边界流场的计算<sup>[25-28]</sup>. 同时, LBM也处在一个不断发展和完善的过程中, 尤其在提高计算精度和范围上有了很大的改善<sup>[29,30]</sup>. LBM的基本思想就是为动力学控制方程构建空间和时间上离散的概率分布函数. 这些分布函数的发展结合介观物理的过程, 因此粒子遵循宏观控制方程<sup>[31]</sup>. 单松弛时间的格子Boltzmann方程是Boltzmann-BGK方程(Bhatnagar, Gross和Krook在1954年提出)的一种特殊的离散形式<sup>[32]</sup>, 碰撞项为<sup>[33,34]</sup>

$$f_\alpha(x + e_\alpha \delta t, t + \delta t) = f_\alpha(x, t) - \frac{1}{\tau} [f_\alpha - f_\alpha^{eq}] + F_\alpha, \quad (1)$$

这里 $f_\alpha(x, t)$ 是密度分布函数,  $e_\alpha$ 是各个方向上的离散速度,  $\delta t$ 是时间增量,  $\tau$ 是流体颗粒碰撞的弛豫时间,  $f_\alpha^{eq}$ 是平衡态分布函数. 在此项研究中, 我们使用二维模型中的D2Q9模型, 离散速度为

$$\begin{cases} 0 & i = 0 \\ \left( \cos \frac{(i-1)\pi}{2}, \sin \frac{(i-1)\pi}{2} \right) c & i = 1-4, \\ \sqrt{2} \left( \cos \left[ \frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right], \sin \left[ \frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right) c & i = 5-8 \end{cases} \quad (2)$$

不可压缩流的平衡态分布函数<sup>[35]</sup>为

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha + \left\{ \delta\rho + \rho_0 \left[ \frac{3e_\alpha \cdot u}{c^2} + \frac{9(e_\alpha \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right] \right\}, \quad (3)$$

方程中,  $\delta\rho$ 为密度函数,  $\rho_0$ 为系统中的平均密度常量, 通常设定为1, 格子速度 $c = \delta x / \delta t$ , 声速设

定为 $c_s = c/\sqrt{3}$ , 总的密度为 $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ . 在方程(3)中用 $\delta\rho$ 取代 $\rho$ 是为了减小格子玻尔兹曼方程(LBE)模拟<sup>[36,37]</sup>中的舍入误差, 其中, 权重系数为 $\omega_0 = 4/9$ ,  $\omega_{1-4} = 1/9$ ,  $\omega_{5-8} = 1/36$ . 质量方程和动量方程分别定义为

$$\delta\rho = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq}, \quad (4)$$

$$\rho_0 \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{\text{eq}}. \quad (5)$$

对于非热流体, 方程(1)中的外力项  $\mathbf{F}_{\alpha}$  为<sup>[38]</sup>

$$\mathbf{F}_{\alpha} = -3\omega_{\alpha}\rho_0 \frac{\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \delta t, \quad (6)$$

$\mathbf{a}$  为外力的加速度. 通过 Chapman-Enskog 展开, 方程(1)得到如下所示的流体力学方程:

$$\partial_t \rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{a}, \quad (8)$$

其中, 压强  $P = c_s^2 \rho / \rho_0$ , 运动黏滞系数与弛豫时间的关系为

$$\nu = \frac{1}{3}(\tau - 0.5)c^2 \delta t. \quad (9)$$

### 3 模拟与结果

#### 3.1 模型与公式

流场的几何结构是边长为  $W$  的正方形, 位于左端和右端的纵向边界的中正中开有宽度为  $w$  的入口和出口, 流体以完全相同的速度剖面由左边驱入, 右边吸出, 这样的系统满足 PT 对称性, 如图 1 所示.

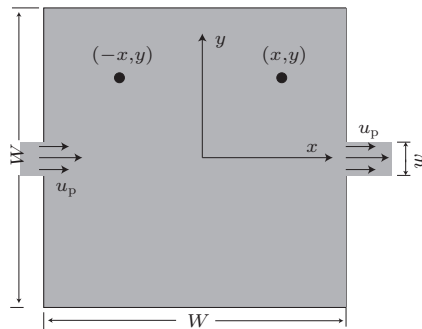


图1 流场图示 正方形边长  $W$ , 中心处为几何原点, 流体由完全相同的速度剖面从左边驱入, 右边吸出

在二维方形管道中, 边界处采用反弹边界来保证无滑移, 出入口采用速度边界条件. 如图 2 所示,

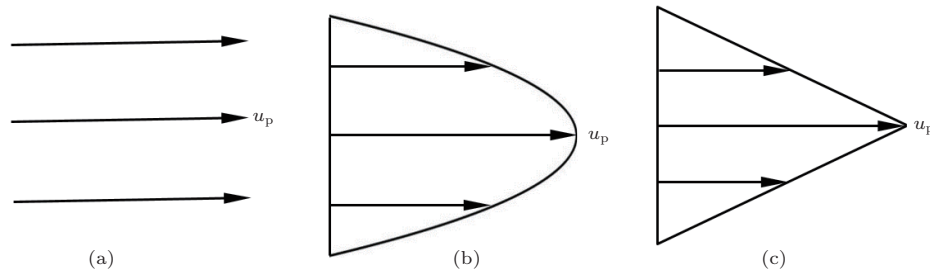


图2 三种驱动模式 (a) 直线, 均匀速度  $u_p$ ; (b) 抛物线, 中间处的速度为  $u_p$ , 出入口边界处的速度为 0; (c) 三角形, 中间处速度为  $u_p$ , 出入口边界处的速度为 0

我们采用三种驱动模式, (a) 直线, 即以相同的速度  $u_p$  驱动; (b) 抛物线, 中间处的速度为  $u_p$ , 出入口边界处的速度为 0; (c) 三角形, 中间处速度为  $u_p$ , 出入口边界处的速度为 0. 抛物线和三角形驱动模式分别为

$$u_x = u_p [1 - y^2 / (w/2)^2], \quad (10)$$

$$u_x = u_p [1 - |y| / (w/2)]. \quad (11)$$

在 LBM 模拟中, 流场的网格是  $300 \times 300$ , 出入口的宽度是流场边界宽度的十分之一, 因此出入口网格数为 30. 这个网格数是经过网格收敛性测试以后确定的. 物理速度分别为  $10^{-7}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$  m/s 的模型, 对应的格子速度分别为  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ , 弛豫时间  $\tau = 1.418$ . 根据流场的几何结构和平衡进出口的 PT 对称性, 我们以原点处的纵轴为对称轴, 分别对速度矢量场、动能和涡度标量构造如下函数来衡量系统的 PT 非对称性:

$$\rho^u = \frac{1}{u_p^2 \times N^2} \times \sum_{x>0} \sum_y [u_x(x, y) - u_x(-x, y)]^2 + [u_y(x, y) + u_y(-x, y)]^2, \quad (12)$$

$$\rho^\omega = \frac{1}{(u_p/w)^2 \times N^2} \times \sum_{x>0} \sum_y [\omega(x, y) - \omega(-x, y)]^2, \quad (13)$$

$$\rho^{KE} = \frac{1}{(0.5\rho u_p^2)^2 \times N^2} \times \sum_{x>0} \sum_y [KE(x, y) - KE(-x, y)]^2, \quad (14)$$

其中, 动能的计算公式为  $KE = \frac{1}{2}\rho u^2$ , 涡旋  $\omega(x, y) = \nabla \times u(x, y)$ . 系统雷诺数定义为  $Re = u_p w / \nu$ .

### 3.2 结果讨论

#### 3.2.1 流场对称性随雷诺数增加的变化 (驱动模式为图 2(b))

图 3 所示为不同雷诺数下稳定状态时系统的速度场, 包括速度值  $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  (用灰度表示) 和流线. 在雷诺数按数量级增加的过程中, 很明显, 随着雷诺数增加, 速度场相对于纵轴越来越明显地呈现出不对称性. 当  $Re = 0.01$  (图 3(a)), PT 非对称性很小, 不容易被发现; 当  $Re = 10$  (图 3(b)) 和  $Re = 30$  (图 3(c)) 时, 不对称性则变得相对清晰可见; 当  $Re = 100$  (图 3(d)) 时, 在入口处出现大的涡旋而使得流场完全不对称. 可以预见, 当雷诺数继续增加, 流场会产生紊乱, 继而从层流过度到湍流.

图 4 所示为不同雷诺数下稳定状态时系统的动能场. 在雷诺数按数量级增加的过程中, 与速度场相似, 动能场相对于纵轴呈现出的不对称性

越来越明显. 当  $Re = 0.01$  (图 4(a)), PT 非对称性很小, 不容易被发现; 当  $Re = 10$  (图 4(b)) 和  $Re = 30$  (图 4(c)) 时, 不对称性则变得相对清晰可见; 当  $Re = 100$  (图 4(d)) 时, 动能场的不对称性变得更加突出.

图 5 所示为不同雷诺数下稳定状态时系统的涡度场. 在雷诺数按数量级增加的过程中, 与速度场和动能场相似, 涡度场相对于纵轴呈现出的不对称性越来越明显. 当  $Re = 0.01$  (图 5(a)), PT 非对称性很小, 不容易被发现; 当  $Re = 10$  (图 5(b)) 和  $Re = 30$  (图 5(c)) 时, 不对称性则变得相对清晰可见; 当  $Re = 100$  (图 5(d)) 时, 涡度场的不对称性变得更加突出.

需要指出的是, 随着雷诺数增加而破坏的流场的对称性是相对于  $y$  轴 (纵轴) 而言. 相对于  $x$  轴, 没有惯性项出现, 相当于 Stokes 流, 所以流场完全对称, 并且不随横向驱动的增加而变化. 因此, 流场对称的破坏完全是由惯性 (驱动) 导致的.

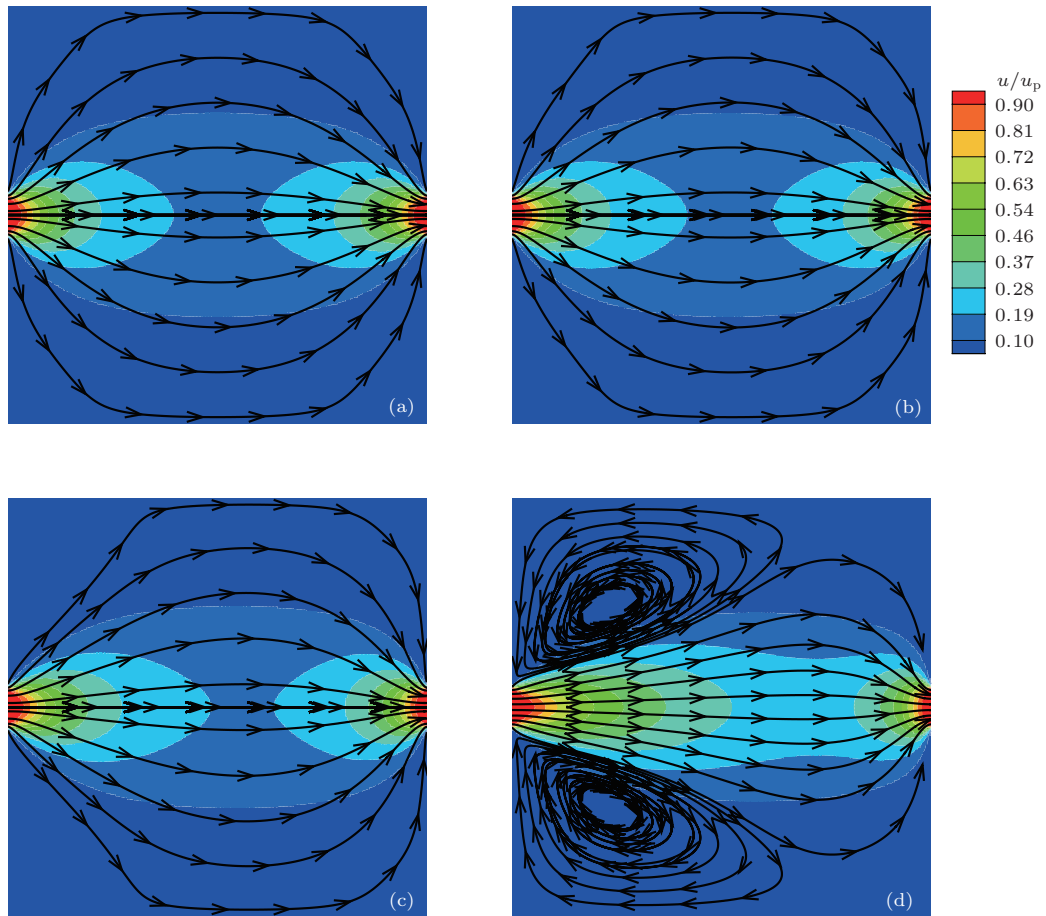


图 3 (网刊彩色) 不同雷诺数下的速度大小和流线分布, 流场通过进口和出口处完全相同的抛物型速度剖面驱动 (a)  $Re = 0.01$ ; (b)  $Re = 10$ ; (c)  $Re = 30$ ; (d)  $Re = 100$ ; 在小雷诺数下, 速度大小和流线基本处于对纵轴镜像对称, 当雷诺数增加时, 关于纵轴的非对称性产生; 当雷诺数达到 100 时, 进口处出现涡旋而出口处不出现

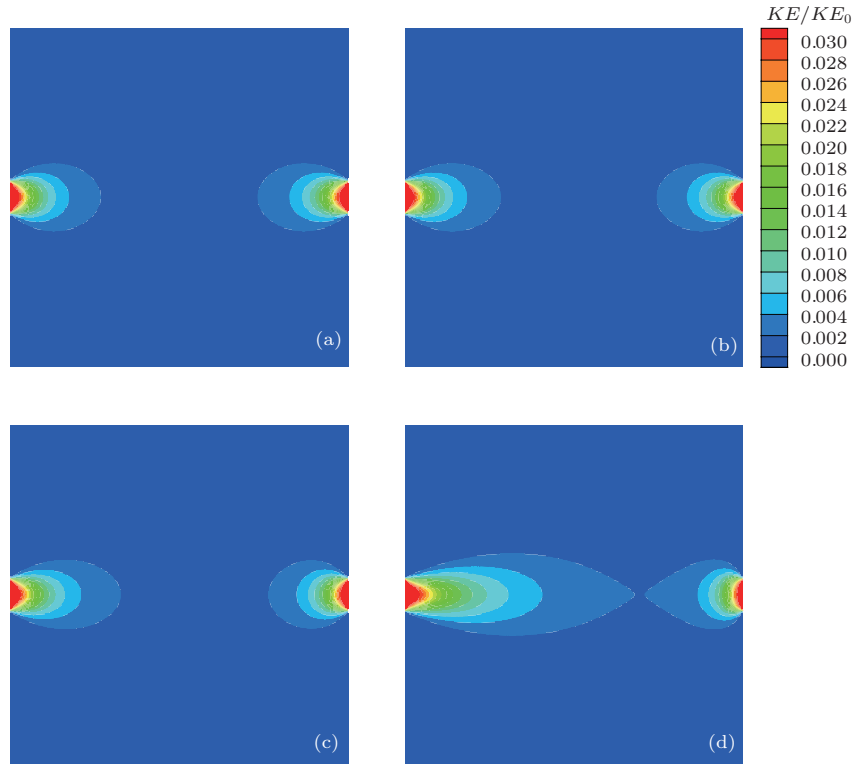


图4 (网刊彩色) 不同雷诺数下的动能场, 流场通过进口和出口处完全相同的抛物型速度剖面驱动 (a)  $Re = 0.01$ ; (b)  $Re = 10$ ; (c)  $Re = 30$ ; (d)  $Re = 100$ ; 在小雷诺数下, 流场中的动能分布近似处于对纵轴的镜像对称, 当雷诺数增加时, 关于纵轴的非对称性产生; 雷诺数越大, 非对称性越明显

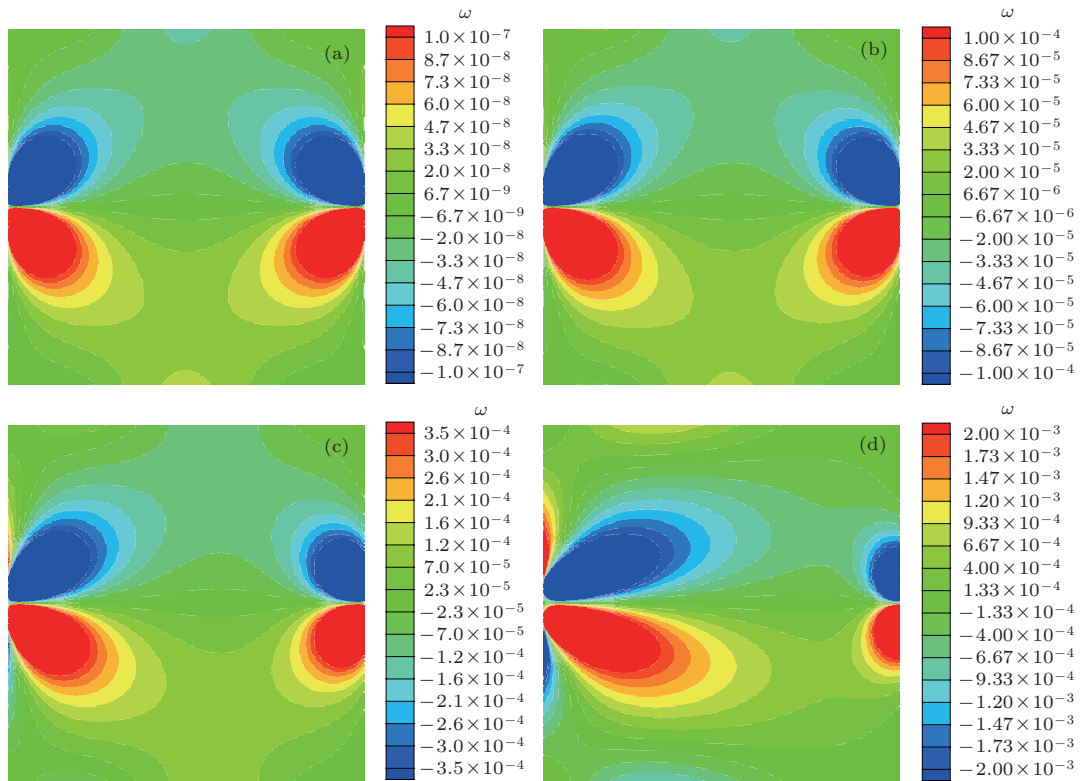


图5 (网刊彩色) 不同雷诺数下的涡度场, 流场通过进口和出口处完全相同的抛物型速度剖面驱动, 大小相等方向相反的涡旋成对出现 (a)  $Re = 0.01$ ; (b)  $Re = 10$ ; (c)  $Re = 30$ ; (d)  $Re = 100$ ; 在小雷诺数下, 进口和出口处的涡旋对近似处于对纵轴的镜像对称, 当雷诺数增加时, 进口出口处的涡旋对关于纵轴的非对称性产生; 雷诺数越大, 非对称性越明显

### 3.2.2 PT非对称标度

用图2所示的三种驱动模式定量计算出流场随雷诺数增加是PT对称性破坏的标度,与文献[20]所得到的结果一致,三种流场包括速度(矢量)场,动能(标量)场,和涡度(标量)场的标度都是 $Re$ 的平方,即 $\rho^u = A^u Re^2$ ,  $\rho^\omega = A^\omega Re^2$ ,  $\rho^{KE} = A^{KE} Re^2$ .图6所示为流场PT非对称函数(方程(8))在不同驱动模式下相对雷诺数的标度率.三种驱动模式(分别用方形、菱形和三角形图标区分)下三种流场:(a)速度(矢量)场,(b)涡度场和(c)动能(标量)场的PT非对称函数对雷诺数的标度都是平方,表明平方标度率是谱适的.对每一种

流场,三角形驱动下的流场对称性最好,抛物型驱动次之,直线驱动最差,而平方标度率的系数有所不同,如图7所示.

图7所示为流场PT非对称函数平方标度率系数 $A^i (i = u, \omega, KE)$ 在不同驱动模式下相对雷诺数的标度率.三种驱动模式(分别用方形、菱形和三角形图标区分)下三种流场:(a)速度(矢量)场,(b)涡度场和(c)动能(标量)场的平方标度系数中,直线驱动的平方标度系数最大,抛物型驱动次之,三角形驱动的平方标度系数最小.而对于同一个流场,其平方标度系数在不同的雷诺数下为定值.

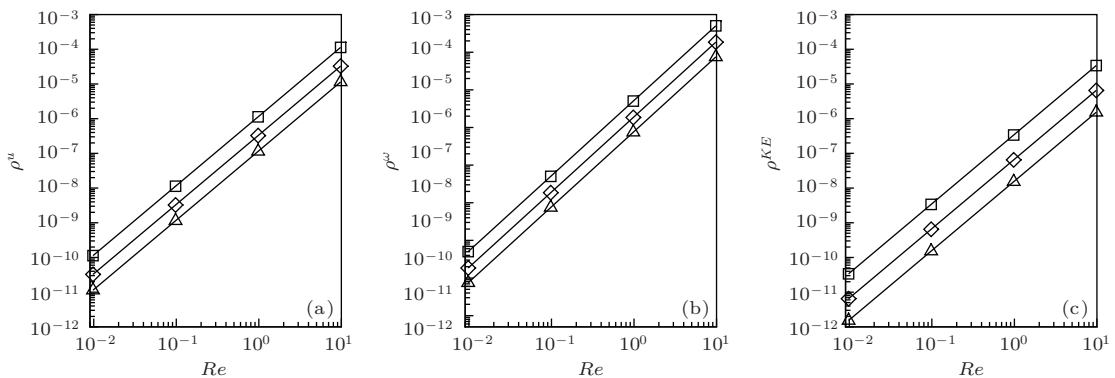


图6 流场PT非对称函数(方程(8))在不同驱动模式下相对雷诺数 $Re$ 的平方标度率,  $\rho^i = Re^2 (i = u, \omega, KE)$  (a)速度(矢量)场;(b)动能(标量)场;(c)涡度场;三种驱动模式:正方形为均匀速度驱动;菱形为抛物形分布驱动;三角形为三角形分布驱动

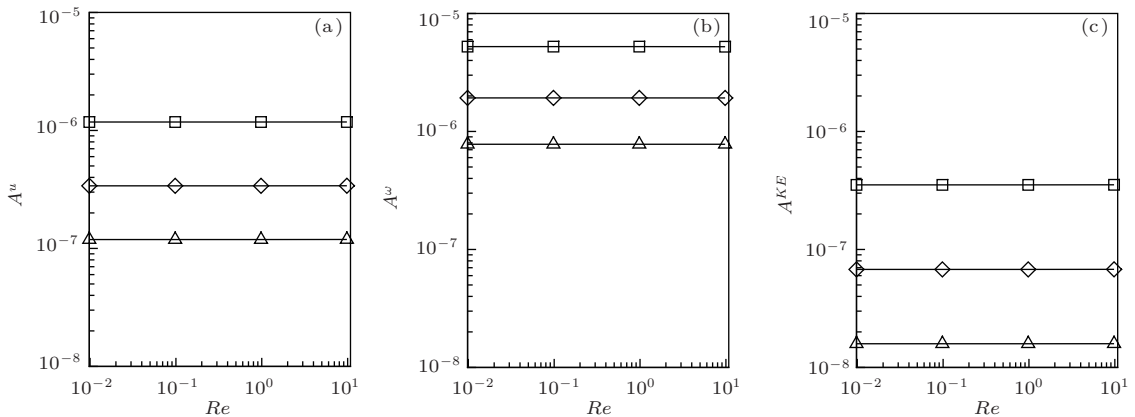


图7 流场PT非对称函数平方标度率系数 $A^i (i = u, \omega, KE)$  (a)速度(矢量)场;(b)动能(标量)场;(c)涡度场;三种驱动模式:正方形为均匀速度驱动;菱形为抛物形分布驱动;三角形为三角形分布驱动

## 4 结 论

本文研究了库源平衡的黏性不可压缩流体的PT对称性.由于相互作用所造成的损失使得 $\rho_{PT} \neq 0$ ,鉴于对称性的破坏,我们以流体速度、

动能密度、涡度作为参量,提出PT非对称性函数 $\rho_n^i (i = u, \omega, KE, n = 2)$ ,研究在不同速度驱动模式下系统的非对称性.

研究结果表明,与传统的边界条件相比,具有库源平衡边界条件的黏性不可压缩流体在低雷诺数尤其是 $Re \leq 1$ 的情况下,具有更好的对称性,随

着  $Re$  数的增加, 对称性逐渐破坏, 当  $Re > 100$  时, 对称性破坏的已经非常明显. 需要说明的是, 这里的非对称性函数缺乏有限的非零阈值是由方程 (7) 中的黏性耗散项和非线性项引起的. 这种稳定状态下对称性的增强表明, 我们所采用的构造比传统的构造在抑制涡旋形成方面更具有优势.

尽管非线性叠加原理在这里不能使用, 使得判断这些变量的对称性变得困难, 但是我们发现在广泛的几何尺寸以及不同的驱动模式下, 速度场、动能场和涡度场的 PT 非对称函数对雷诺数的标度都是平方, 即  $\rho_E^i = A^i Re^2 (i = u, \omega, KE)$ , 表明平方标度率是谱适的. 对每一种流场, 三角形驱动下的流场对称性最好, 抛物型驱动次之, 直线驱动最差, 对应的平方标度率的系数也有所不同. 其中, 直线驱动的平方标度系数最大, 抛物型驱动次之, 三角形驱动的平方标度系数最小. 而对于同一个流场, 其平方标度系数在不同的雷诺数下为定值.

## 参考文献

- [1] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [2] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
- [3] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [4] Mostafazadeh A 2010 *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **7** 1191
- [5] Bendix O, Fleischmann R, Kottos T, Shapiro B 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 030402
- [6] Jin L, Song Z 2009 *Phys. Rev. A* **80** 052107
- [7] Joglekar Y N, Scott D, Babbey M, Saxena A 2010 *Phys. Rev. A* **82** 030103(R)
- [8] Znojil M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 052113
- [9] Znojil M 2011 *Phys. Lett. A* **375** 3435
- [10] Joglekar Y N, Saxena A 2011 *Phys. Rev. A* **83** 050101(R)
- [11] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
- [12] Ruter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
- [13] Feng L, Ayache M, Huang J, Xu Y L, Lu M H, Chen Y F, Fainman Y, Scherer A 2011 *Science* **333** 729
- [14] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
- [15] Schindler J, Li A, Zheng M C, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101(R)
- [16] Bender C M, Berntson B K, Parker D, Samuel E 2013 *Am. J. Phys.* **81** 173
- [17] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E B, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nat. Mater.* **12** 108
- [18] Kottos T 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
- [19] Zheng M C, Christodoulides D N, Fleischmann R, Kottos T 2010 *Phys. Rev. A* **82** 010103(R)
- [20] Wang C Y 1990 *Acta Mech.* **81** 69
- [21] Wang C Y 1991 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23** 159
- [22] Yu W, Chen Xi, Xu Y S, Joglekar Y N 2014 *Phys. Rev. E* (in press)
- [23] Chen S, Doolen G D 1998 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30** 329
- [24] Aidun C K, Clausen J R 2010 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **42** 439
- [25] Zeng J B, Li L J, Liao Q, Chen Q H, Cui W Z, Pan L M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 178 (in Chinese)[曾建邦, 李隆键, 廖全, 陈清华, 崔文智, 潘良明 2010 物理学报 **59** 178]
- [26] Shi Z Y, Hu G H, Zhou Z W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2595 (in Chinese)[石自媛, 胡国辉, 周哲玮 2010 物理学报 **59** 2595]
- [27] Wu W, Sun D K, Dai T, Zhu M F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 150501 (in Chinese)[吴伟, 孙东科, 戴挺, 朱鸣芳 2012 物理学报 **61** 150501]
- [28] Wen B H, Liu H Y, Zhang C Y, Wang Q 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4353
- [29] Yu H D, Zhao K H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 816 (in Chinese)[俞慧丹, 赵凯华 2000 物理学报 **49** 816]
- [30] Yu H D, Zhao K H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1470 (in Chinese)[余慧丹, 赵凯华 1999 物理学报 **48** 1470]
- [31] He X, Luo L S 1997 *Phys. Rev. E* **55** R6333
- [32] Bhatnagar P L, Gross E P, Krook M 1954 *Phys. Rev.* **94** 511
- [33] Chen H, Chen S, Matthaeus H W 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5339
- [34] Qian Y H, d'Humieres D, Lallemand P 1992 *Europhys. Lett.* **17** 479
- [35] He X, Luo L S 1997 *J. Stat. Phys.* **88** 927
- [36] Skordos P A 1993 *Phys. Rev. E* **48** 4823
- [37] d'Humieres D, Ginzburg I, Krafczyk M, Lallemand P, Luo L S 2002 *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **360** 437
- [38] Luo L S 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4982

# The influence of different driving patterns on parity time-reversal symmetry\*

Chen Xi<sup>1)</sup> Yu Whitney<sup>2)</sup> Joglekar Yogesh N<sup>3)</sup> Zheng You-Qu<sup>4)</sup>  
Xu You-Sheng<sup>4)</sup>† Wu Feng-Min<sup>1)</sup>‡

1) (Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

2) (Department of Mechanical Engineering, Indiana University-Purdue University Indianapolis (IUPUI), Indiana 46202, USA)

3) (Department of Physics, Indiana University-Purdue University Indianapolis (IUPUI), Indiana 46202, USA)

4) (Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

( Received 10 September 2013; revised manuscript received 19 December 2013 )

## Abstract

In the past few years, the balanced sink and source macroscopic open system, which satisfies the parity and time-reversal symmetry, has become a research hot point. We introduce parity and time-reversal (PT) symmetry into fluid system by setting up balanced inflow and outflow in a two-dimensional channel. The flow is governed by Navier-Stokes equation and we use lattice Boltzmann method to solve them. Defining configuration-dependent asymmetric functions in velocity, kinetic energy density, and vorticity fields, we find that the PT function of the flow increases with the increase of the 2th power of Reynolds number i.e.,  $\rho_n \sim Re^n$ . In this work, we use three different velocity profiles to drive the flow. It is demonstrated that in the three driven modes, the power-law schedule holds true. It is concluded that PT asymmetry of the viscous flow is determined by the flow dynamics not by the driven modes, thereby verifies the universality of the power-law scaling in viscous flow with balanced inflow and outflow.

**Keywords:** balanced sink source, lattice Boltzmann method, parity and time-reversal symmetry, low Reynolds number

**PACS:** 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf, 78.47.dc

**DOI:** 10.7498/aps.63.060206

---

\* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10932010), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11072229, 11072220, U1262109, 11079029, 61274099), and the National Science Foundation DMR-1054020 (YJ).

† Corresponding author. E-mail: [113003@zust.edu.cn](mailto:113003@zust.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [wfm@zjnu.cn](mailto:wfm@zjnu.cn)