

加性和乘性泊松白噪声联合激励下光滑非连续振子的随机响应*

岳晓乐[†] 徐伟 张莹 王亮

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2013年9月7日收到; 2013年12月8日收到修改稿)

利用广义胞映射方法, 研究了加性和乘性泊松白噪声联合作用下SD振子 (smooth and discontinuous oscillator) 的随机响应问题. 基于图分析算法, 获得确定SD振子的吸引子、吸引域、域边界、鞍和不变流形等全局特性. 基于矩阵分析算法, 计算了SD振子在泊松白噪声激励下的瞬态和稳态响应. 结果表明: 随机响应的概率密度函数演化方向和确定情况下的不稳定流形形状之间存在密切联系. 蒙特卡罗模拟结果表明, 所使用的方法是有效且准确的.

关键词: 光滑非连续振子, 广义胞映射方法, 随机响应, 泊松白噪声

PACS: 05.45.-a, 74.40.De, 82.40.Bj

DOI: 10.7498/aps.63.060502

1 引言

泊松白噪声是一组具有随机幅值和随机到达时刻的脉冲序列, 属于非高斯噪声, 其模型常常用来描述结构振动中的海浪、风、地震等激励. 近几十年来, 关于泊松白噪声激励下非线性动力系统的响应问题有一系列的研究成果, 但在这些成果中仅有个别系统的解具有解析表达式^[1,2]. 因此, 数值和逼近方法仍然占据主导地位, 像随机平均法^[3,4]、路径积分法^[5]、胞映射方法^[6,7]、指数多项式闭合法^[8,9]、等效线性化法^[10]等. 在这些研究方法中, 胞映射方法是一种既能分析确定性动力系统全局特性, 又能够分析随机动力系统响应问题的有效数值工具.

胞映射方法最初由Hsu^[11,12]提出, 并用于分析确定性动力系统的全局特性, 分为简单胞映射方法和广义胞映射方法. 随后, 众多学者又提出了一系列改进方法^[13-17]并展开了相关研

究^[18,19]. 在随机动力系统研究中, 通过有效地计算一步转移概率矩阵, 可以得到系统响应的概率密度函数^[20,21]. 本文利用广义胞映射方法, 基于图分析算法^[14-16,22]确定吸引子、吸引域、边界、鞍和不变流形等定性性质, 基于矩阵分析算法^[23]计算随机响应的瞬态和稳态概率密度函数.

光滑非连续振子(SD振子)由Cao等^[24]提出, 它的动力学特性取决于一个光滑参数 α , 当 $\alpha = 0$ 时系统具有不连续特性, 当 $\alpha > 0$ 时则表现为光滑特性. SD振子的动力学模型^[24]由一个质量为 m 和一对刚性固定且可以压缩和伸展的弹簧 k 连接而成. 关于该振子的动力学特性研究, 已经有一系列丰富的研究成果, 如极限环响应^[25]、余维2分岔^[26]、Hopf分岔^[27]和共振^[28]等特性. 然而随机激励下SD振子的动力学性质研究, 目前的结论甚少^[29]. 本文利用胞映射方法, 研究泊松白噪声激励下SD振子的随机响应问题.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11302170, 11172233, 11302171, 11102155)、陕西省自然科学基金 (批准号: 2012JQ1004) 和西北工业大学基础研究基金资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xiaoleyue@nwpu.edu.cn

2 SD 振子全局特性分析

考虑非线性黏滞阻尼情况下受谐和激励作用的SD振子, 方程如下^[24,26]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(\xi + \gamma x^2)y - x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) \\ \quad + f \cos(\omega t) \end{cases}, \quad (1)$$

其中 ξ 和 γ 可取任意实数, f 和 ω 分别为谐和激励的幅值和频率, α 为光滑参数. 利用广义胞映射方法分析系统(1)的全局特性时, 系统参数选取如下:

$$\begin{aligned} \xi &= 0.02, \quad \gamma = 0.4, \quad \alpha = 0.2, \\ f &= 0.52, \quad \omega = 0.8. \end{aligned} \quad (2)$$

选取感兴趣区域为

$$\begin{aligned} D = \{(x, y) \mid -2.0 \leq x \leq 2.0, \\ -2.0 \leq y \leq 2.0\}, \end{aligned} \quad (3)$$

将区域 D 划分为 1000×1000 个胞, 每个胞内均匀选取 35×35 个小胞, 一步转移时间长度为谐和激励的周期 $\Delta T = T = 2\pi/\omega$. 利用图分析算法, 可以得到系统(1)的全局特性如图1所示.

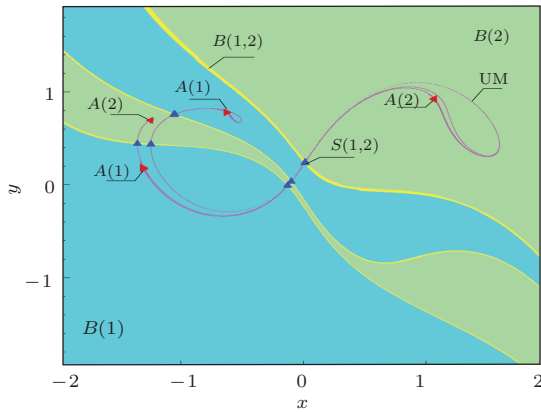


图1 系统(1)的全局特性

由图1可知, 系统在参数取(2)式时存在两个周期2的吸引子 $A(1)$ 和 $A(2)$, $B(1)$ 和 $B(2)$ 分别为两个吸引子所对应的吸引域, $S(1,2)$ 为位于吸引域边界 $B(1,2)$ 上的周期鞍, UM 为鞍 $S(1,2)$ 所对应的不稳定流形, 此时的稳定流形为吸引域边界 $B(1,2)$. 接下来, 我们考虑系统(1)受泊松白噪声激励时的响应问题.

3 泊松白噪声激励下SD振子的响应

考虑系统(1)受加性和乘性泊松白噪声共同作用的情况, 如下式所示:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(\xi + \gamma x^2)y - x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) \\ \quad + f \cos(\omega t) + \eta_1(t) + x\eta_2(t) \end{cases}, \quad (4)$$

式中 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 为两个独立的泊松白噪声, 其表达式为

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i \delta(t - T_i). \quad (5)$$

其中 $N(t)$ 为泊松计数过程, 表示在时间 $[0, t]$ 内到达的脉冲数, 其平均到达率为 $\lambda > 0$; $\{R_i, i \geq 1\}$ 表示服从概率分布为 $p_R(r)$ 的脉冲幅值. 泊松白噪声的强度记为 $I = \lambda E[R^2]$, $E[\cdot]$ 表示数学期望. 泊松白噪声的数值模拟方法参见文献[3], 模拟时取 $p_R(r)$ 为零均值的正态分布.

在利用矩阵分析算法计算随机响应的概率密度函数时, 选取感兴趣的状态空间为

$$D' = \{(x, y) \mid -2.5 \leq x \leq 2.2, -1.5 \leq y \leq 2.5\},$$

将 D' 分为 100×100 个胞, 每个胞又均匀分为 25 个小胞, 从每个小胞出发随机产生 2500 条样本轨线, 则从每个胞出发共有 62500 条随机轨线来确定此胞的一步转移概率, 一步转移时间长度仍取为 $\Delta T = T = 2\pi/\omega$. 文中蒙特卡罗模拟时, 在区域 D' 内均匀选取 400 个采样点, 每个采样点随机发出 10^5 条样本轨线, 最后对这 4×10^7 条随机样本进行统计平均得到系统响应的概率密度函数. 计算时系统(4)的参数选取同(2)式.

3.1 稳态响应分析

固定平均到达率 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, 考虑系统(4)的响应随着强度 I_1 和 I_2 变化时的情况. 当 $I_1 = I_2 = 0.001$ 时, 系统受到的随机扰动较小, 表现为在两个周期吸引子周围有微小扰动, 如图2(a)所示. 随着强度 I_1 和 I_2 的增大, 从联合概率密度函数图上可以看出系统在两个吸引子附近的随机性增强, 如图2(b)—(f)所示. 图3给出了联合概率密度函数图所对应的等值线图, 可以发现随着泊松白噪声强度 I_1 和 I_2 的增加, 系统的稳态概率密

度函数的演化方向和不稳定流形的形状(如图1所示)保持一致. 图4为蒙特卡罗模拟结果和胞映射方法的对比为, 为了能够清晰地说明问题, 选取了 $I_1 = I_2 = 0.005, 0.01, 0.05, 0.15$ 等四组参数. 从图上可以看出两者符合较好, 也说明了矩阵分析算法分析稳态响应时的有效性.

对泊松白噪声而言, 若保持强度 I 不变, 当

平均到达率 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 则其趋近于强度为 I 的高斯白噪声. 为了验证这一点, 图5给出了当 $I_1 = I_2 = 0.05$ 时系统(4)位移 (x) 的稳态响应对应的边缘概率密度函数. 由图可知, 随着 λ_1 和 λ_2 的增大, 泊松白噪声的结果和高斯白噪声的结果越来越接近, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 > 10$ 时两者已基本一致, 说明此时的泊松白噪声已经非常接近于高斯白噪声.

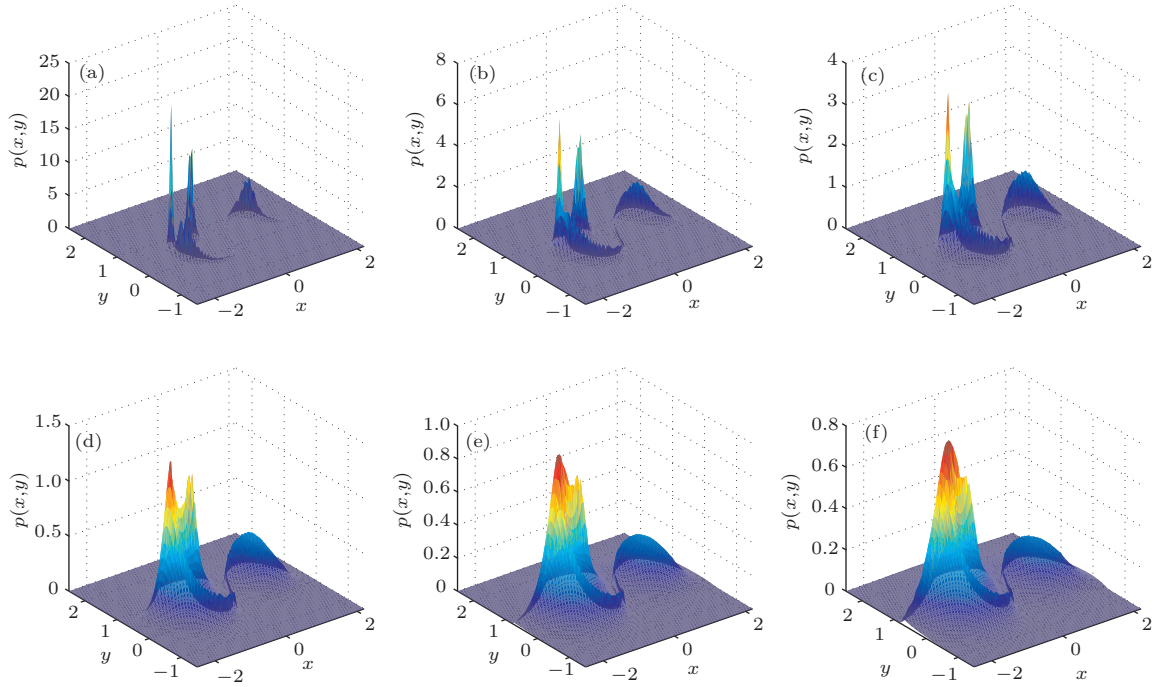


图2 (网刊彩色) 不同泊松白噪声强度下系统(4)稳态响应的联合概率密度函数 (a) $I_1 = I_2 = 0.001$; (b) $I_1 = I_2 = 0.005$; (c) $I_1 = I_2 = 0.01$; (d) $I_1 = I_2 = 0.05$; (e) $I_1 = I_2 = 0.1$; (f) $I_1 = I_2 = 0.15$

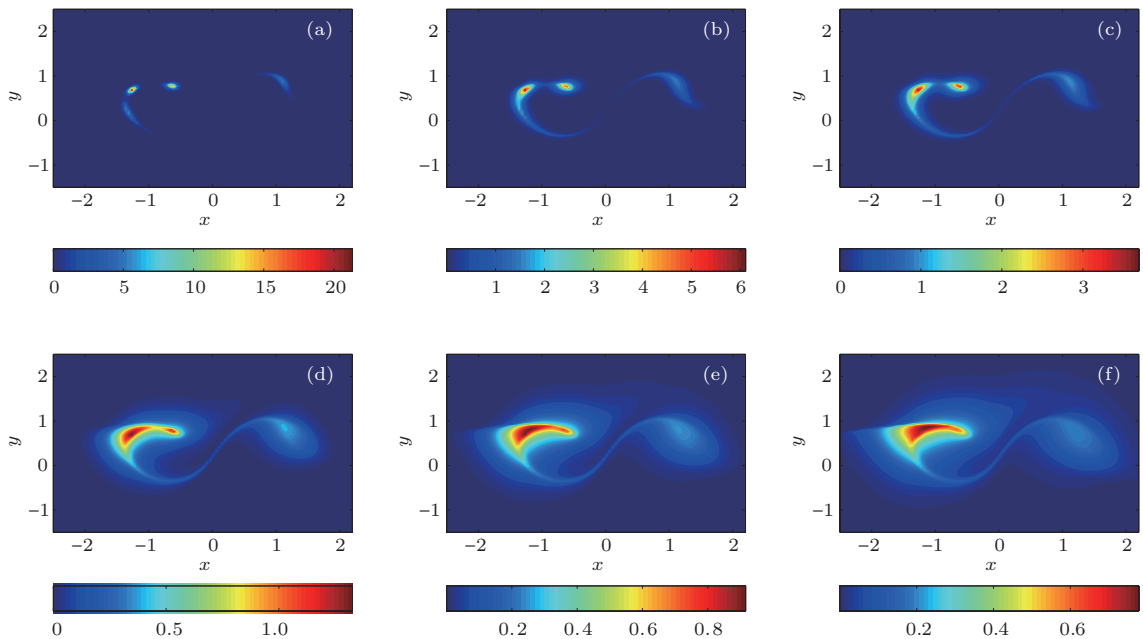


图3 (网刊彩色) 不同泊松白噪声强度下系统(4)稳态响应的联合概率密度函数对应的等值线图, 噪声强度参数如图2所示

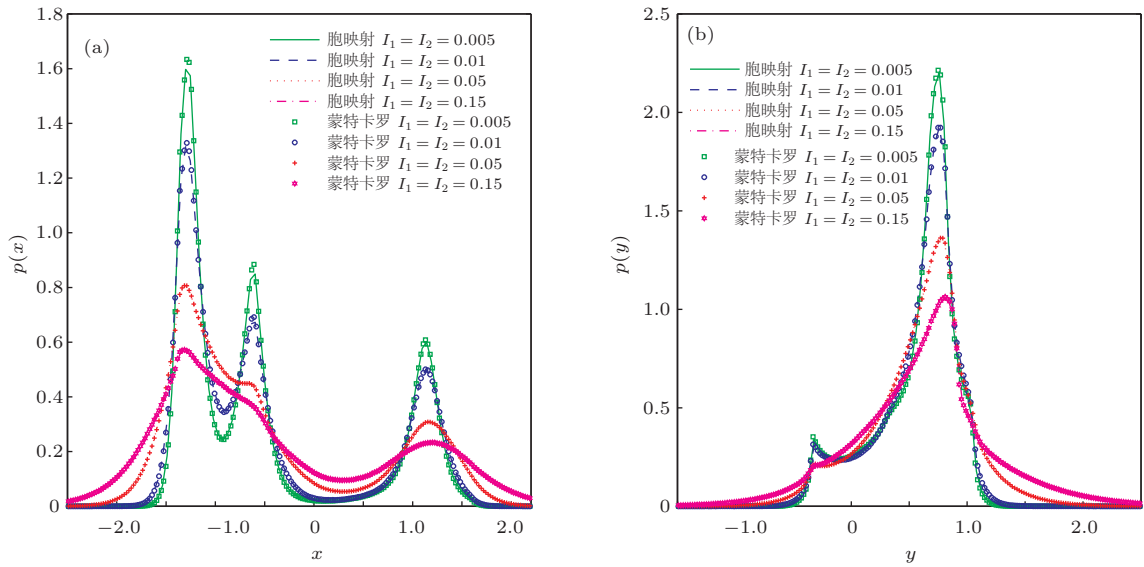


图4 (网刊彩色) 稳态响应边缘概率密度函数对比 线形表示胞映射方法结果, 符号表示蒙特卡罗模拟结果

3.2 瞬态响应分析

考虑系统(4)在加性和乘性泊松白噪声作用下的瞬态响应时, 固定参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, $I_1 = I_2 = 0.01$. 当系统的初始分布为均匀分布时, 随时间演化的联合概率密度函数等值线如图6所示. 由图可见, 对SD振子而言, 瞬态响应的概率密度函数的演化方向也和确定性系统下的不稳定流形形状(如图1所示)保持一致. 图7给出了不同时刻下系统(4)的瞬态边缘概率密度函数, 可见基于矩阵分析算法的胞映射结果与蒙特卡罗模拟结果符合很好, 说明了矩阵分析算法在分析泊松

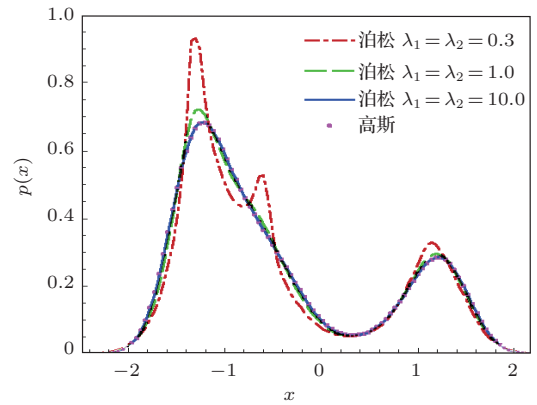


图5 (网刊彩色) 位移(x) 稳态边缘概率密度函数 线形表示泊松白噪声结果, 符号表示高斯白噪声结果

白噪声激励下SD振子瞬态响应问题时的有效性.

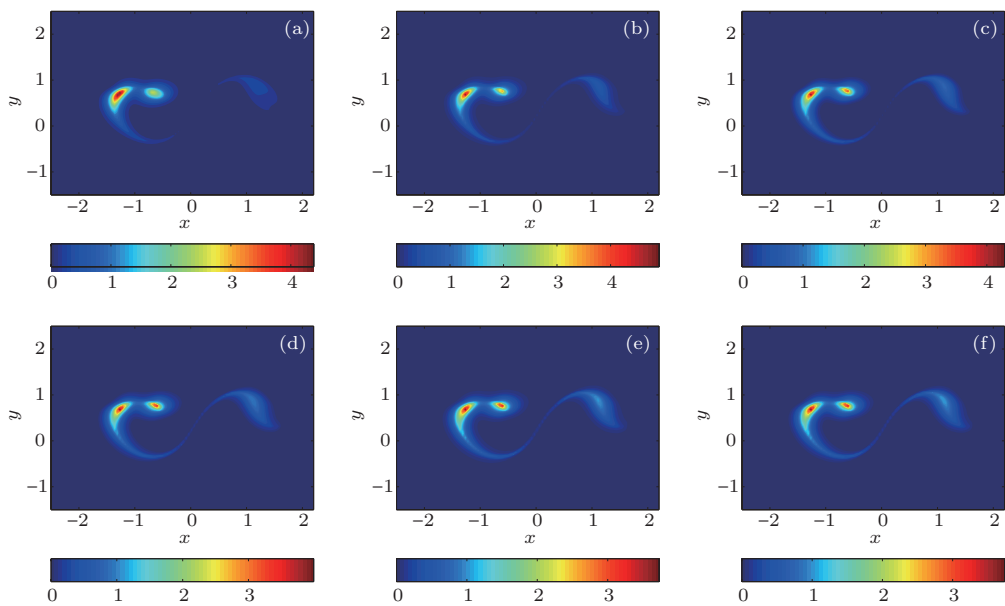


图6 (网刊彩色) 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, $I_1 = I_2 = 0.01$ 时不同时刻系统(4)的联合概率密度函数对应的等值线 (a) $t = 1T$; (b) $t = 3T$; (c) $t = 5T$; (d) $t = 7T$; (e) $t = 50T$; (f) $t = 500T$

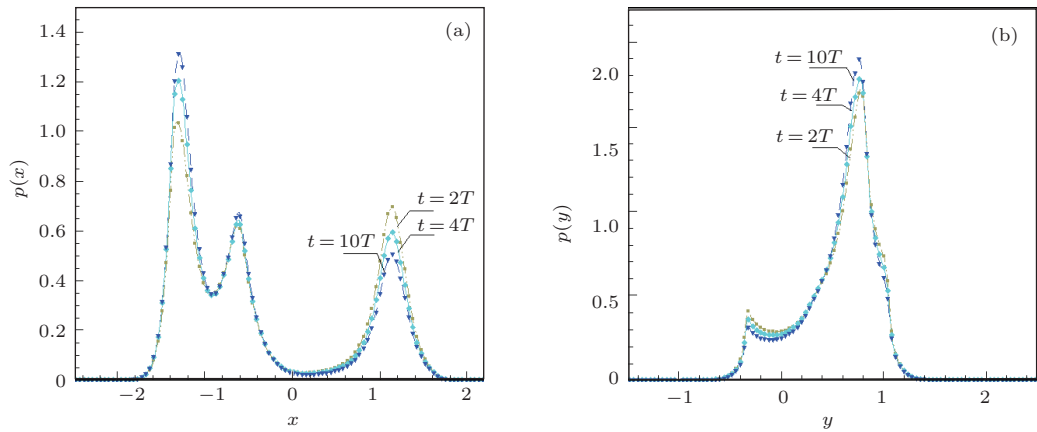


图7 不同时刻时系统(4)响应的边缘概率密度函数对比 线形表示胞映射方法结果,符号表示蒙特卡罗模拟结果

4 结 论

本文利用广义胞映射方法研究了泊松白噪声激励下SD振子的随机响应,利用图分析算法得到了确定性系统的不稳定流形等信息,利用矩阵分析算法计算了随机系统的稳态和瞬态响应的概率密度函数.研究发现对SD振子而言,无论是稳态响应还是瞬态响应,其对应的概率密度函数的演化方向始终和确定性系统的不稳定流形形状保持一致.蒙特卡罗模拟结果也表明矩阵分析算法在计算响应问题时的准确性和有效性.

对于多吸引子共存的动力系统而言,不管是确定系统还是随机系统,广义胞映射方法都是一种有效的分析工具.图分析算法能有效地得到系统的定性特性,矩阵分析算法能准确得到随机响应的稳态和瞬态概率密度函数.

参考文献

[1] Vasta M 1995 *Int. J. Non-linear Mech.* **30** 407
 [2] Proppe C 2003 *Int. J. Non-linear Mech.* **38** 557
 [3] Wu Y, Zhu W Q 2008 *Phys. Lett. A* **372** 623
 [4] Zeng Y, Zhu W Q 2011 *J. Appl. Mech.* **78** 021002
 [5] Pirrotta A, Santoro R 2011 *Probab. Eng. Mech.* **26** 26
 [6] Köyliüoğlu H U, Nielsen S R K, Çakmak A Ş 1995 *Struct. Saf.* **17** 151
 [7] Wu Y, Zhu W Q 2008 *Phys. Rev. E* **77** 041911
 [8] Er G K, Zhu H T, Iu V P, Kou K P 2009 *Nonlinear Dynam.* **55** 337

[9] Zhu H T, Er G K, Iu V P, Kou K P 2011 *J. Sound Vib.* **330** 2900
 [10] Grigoriu M 1995 *Probab. Eng. Mech.* **10** 45
 [11] Hsu C S 1980 *J. Appl. Mech.* **47** 931
 [12] Hsu C S 1981 *J. Appl. Mech.* **48** 634
 [13] Jiang J, Xu J X 1994 *Phys. Lett. A* **188** 137
 [14] Hong L, Xu J X 1999 *Phys. Lett. A* **262** 361
 [15] He Q, Xu W, Li S, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 743 (in Chinese)[贺群,徐伟,李爽,肖玉柱 2008 物理学报 **57** 743]
 [16] He Q, Xu W, Li S, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4021 (in Chinese)[贺群,徐伟,李爽,肖玉柱 2008 物理学报 **57** 4021]
 [17] Zou H L, Xu J X 2009 *Sci. China Tech. Sci.* **52** 787
 [18] Hong L, Xu J X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2694 (in Chinese)[洪灵,徐健学 2002 物理学报 **51** 2694]
 [19] Hong L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030513
 [20] Sun J Q, Hsu C S 1988 *J. Sound Vib.* **124** 233
 [21] Sun J Q, Hsu C S 1990 *J. Appl. Mech.* **57** 1018
 [22] Hsu C S 1995 *Int. J. Bifurc. Chaos* **5** 1085
 [23] Yue X L, Xu W, Wang L, Zhou B C 2012 *Probab. Eng. Mech.* **30** 70
 [24] Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, Grebogi C, Thompson J M T 2006 *Phys. Rev. E* **74** 046218
 [25] Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, Grebogi C, Thompson J M T 2008 *Int. J. Non-Linear Mech.* **43** 462
 [26] Tian R L, Cao Q J, Yang S P 2010 *Nonlinear Dynam.* **59** 19
 [27] Tian R L, Cao Q J, Li Z X 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 074701
 [28] Cao Q J, Xiong Y P, Wiercigroch M 2011 *J. Appl. Anal. Comput.* **1** 183
 [29] Yue X L, Xu W, Wang L 2013 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **56** 1010

Stochastic response of smooth and discontinuous oscillator under additive and multiplicative Poisson white noise excitation*

Yue Xiao-Le[†] Xu Wei Zhang Ying Wang Liang

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 7 September 2013; revised manuscript received 8 December 2013)

Abstract

The stochastic response of the smooth and discontinuous (SD) oscillator under additive and multiplicative Poisson white noise excitation is studied by the generalized cell mapping method. Based on the digraph analysis algorithm, the attractors, basins of attraction, basin boundaries, saddles and invariant manifolds of the SD oscillator can be obtained. The transient and stationary responses of the SD oscillator under Poisson white noise excitation are computed based on the matrix analysis algorithm. It can be found that there is a close relationship between the evolution direction of probability density and the unstable manifold. Monte Carlo results are used to verify the efficiency and accuracy of the matrix analysis algorithm.

Keywords: SD oscillator, generalized cell mapping method, stochastic response, Poisson white noise

PACS: 05.45.-a, 74.40.De, 82.40.Bj

DOI: [10.7498/aps.63.060502](https://doi.org/10.7498/aps.63.060502)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11302170, 11172233, 11302171, 11102155), the National Natural Science Foundation of Shaanxi, China (Grant No. 2012JQ1004) and the Northwestern Polytechnical University Foundation for Fundamental Research, China.

[†] Corresponding author. E-mail: xiaoleyue@nwpu.edu.cn