独立函数元: 模型、方法和应用*

马勇[1)] 成谢锋[2)†]

1) (南京理工大学计算机科学与工程学院, 南京 210094)

2) (南京邮电大学电子科学与工程学院, 南京 210003)

(2013 年 7 月 17 日收到; 2013 年 12 月 17 日收到修改稿)

针对常规线性变换获得的多分量成分可能不相干, 但通常不满足统计独立的特点, 提出了一种基于独立函数元的信号分解和重构的方法. 该方法不仅继承了线性变换的诸多优点, 而且还有统计域表征的优点. 讨论了独立函数元的模型、定义和获取方法, 详细分析了心音独立函数元在心音信号处理方面的应用. 实验验证了所述方法的有效性和实用性.

关键词: 独立函数元, 统计域表征, 模型和方法

PACS: 87.85.–d, 43.60.Hj **DOI:** 10.7498/aps.63.068703

1 引 言

实际工程中的信号通常是时间序列, 但研究人员感兴趣的是检测信号的特征, 这些特征在时间序列里往往不一定明显. 为了突显信号的某些物理特征, 将时域信号变换到其他变换域起到至关重要的作用[1]. 最常见的傅里叶变换 (FFT)、小波变换、黄变换、时频联合分析 (JTFA)、多通道信号分析等[1−8], 它们各有其优点, 也存在一定的不足[7−9].

本文研究一种信号在统计域进行处理的新方法. 针对常规线性变换获得的多分量成分可能不相干, 但通常不满足统计独立的特点, 提出了一种基于独立函数元的信号分解和重构的方法. 作者认为, 一个信号可以变换成一系列独立函数元的线性叠加, 这种变换可理解为 N 维时域空间数据向 M 维独立子空间投影的问题, 通过独立成分分析 (ICA) 凸显出原本隐藏在信号中的那些不相关性, 使得新空间的数据具有统计独立性. 这种方法不仅继承了线性变换的诸多优点, 并且实现了信号的统计域表征. 在理论方面, 重点讨论了独立函数元的模型、定义和获取方法; 在应用方面, 详细分析了心音独立函数元的获取步骤, 以及在心音分类识别和单路心音混合信号盲分离中的应用, 通过这两个实验, 验证了所述方法的有效性和实用性.

2 独立函数元

设 $x(t)$ 为多维数据的线性组合:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}a_i x_i(t), \tag{1}$$

x_i 之间并非完全相互独立, 而是 x_i 可以划分为 k 元组 (k-tuples), 在 k 元组内, x_i 之间可互相关, k 元组之间不相关且独立. 通过寻找一种内在的因子, 使得 N 维空间的数据到 M 维空间的变换能凸显原本隐藏在 $x(t)$ 中的这种不相关, 并且使新空间的数据具有统计独立性. 换句话说, 上述变换可理解为 N 维时域空间数据向 M 维独立子空间投影的问题[2,3].

(1) 式的一般线性变换模型为

$$\boldsymbol{C}_m=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}a_i x_i \psi_m(t), \tag{2}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 61271334) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: chengxf@njupt.edu.cn

式中 ψ_m 为基函数, (2) 式表明, 选定一组完备基 $\{\psi_m(t)\}$ 可对 $x(t)$ 做分解性变换. 显然, 不同基函数对 $x(t)$ 所做线性变换后的系数向量具有不同的形式和不同的概率分布.

特别地, 当 $x(t) \in L^2(R)$ 时, 有惟一的分解, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t) \\ &= \cdots + g_{-1}(t) + g_0(t) + g_1(t) + \cdots . \end{aligned} \quad (3)$$

设 $\phi(t)$ 是正交尺度函数, $\psi(t)$ 是相互正交的小波, 用基底表示为

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{k,n}\phi(2^k t - n), \\ g_k(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{k,n}\psi(2^k t - n), \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$c_{k,n} = \sum_l a_{l-2n} c_{k+1,l} \quad 和$$

$$d_{k,n} = \sum_l b_{l-2n} c_{k+1,l}.$$

令 $\boldsymbol{Z}$ 为上式线性变换分数向量的集合, 即

$$\boldsymbol{Z} = [c_{k,n}, d_{k,n}]^{\mathrm{T}}, \quad (5)$$

其协方差矩阵 $\boldsymbol{c}_x = \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\}$, $\boldsymbol{E} = (e_1 \cdots e_m)$ 是以 $\boldsymbol{c}_x$ 的单位范数特征向量为例的矩阵, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1 \cdots d_m)$ 是以 $\boldsymbol{c}_x$ 的特征值为对角元素的对角矩阵, 则有:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{Z}, \quad (7)$$

对于白化后的新数据 $\boldsymbol{y}$, 我们要寻找一种组合:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{y}, \quad (8)$$

使 $\boldsymbol{b}$ 为独立成分.

定理 1 如果 G 是一个足够光滑的偶函数, 那么在约束 $E\{(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^2\} = ||\boldsymbol{w}|| = 1$, 当 $\boldsymbol{E}\{G(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})\}$ 取相应的局部极大值或极小值, 满足下式:

$$\boldsymbol{E}\{b_j g(b_j) - g'(b_j)\} > 0(\mathrm{resp} < 0), \quad (9)$$

则相应行对应的 b_j 是独立成分, 式中 $g(\cdot)$ 是函数 $G(\cdot)$ 的导数, $g'(\cdot)$ 是 $g(\cdot)$ 的导数.

这个定理表明, 实际上任何非二次型函数 G 都可以用于实现信号的独立成分分析 [8].

推论 1 设 $\boldsymbol{x} = \sum_{n=1}^{N} a_i x_i(t)$, 即使 x_i 之间彼此非完全独立, 但必可以通过某种线性变换, $b_i = \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}x_i$ 来消除 x_i 中相互依赖的成分, 使得 b_i 尽可能地独立.

换句话说, 通过小波变换、Gabor 变换或傅里叶变换等手段, 可以获得 $\boldsymbol{x}$ 的一个线性不变特子空间, 即将单路信号分解成多层信号 $\boldsymbol{y}$. 将这些多层信号在独立子空间上再投影, 可获得 $\boldsymbol{x}$ 的不变高阶特征值, 实现 $\boldsymbol{x}$ 的独立成分分解, 获得独立成分 b_i.

在定理 1 中, G 以期望 $\boldsymbol{E}\{G(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}y)\}$ 的形式给出了这种高阶统计信息 (高阶特征).

定理 2 当 G 具有下式的形式时, $\boldsymbol{W}$ 的渐进方差的迹最小,

$$G_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{b}) = c_1 \log p_i(\boldsymbol{b}) + c_2\boldsymbol{b}^2 + c_3, \quad (10)$$

式中 p_i 是密度函数, c_1, c_2, c_3 是任意常量.

为了使 b_i 尽可能地独立, 选择 G 时, 可考虑 $G_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{b}) = \log p_i(\boldsymbol{b})$. 这表明负熵是非高斯性的最优度量之一, 有负熵 J 为

$$J(\boldsymbol{b}) = H(\boldsymbol{b}\mathrm{Gauss}) - H(\boldsymbol{b}), \quad (11)$$

近似为

$$J(\boldsymbol{b}) = 1/12\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{b}^3\}^2 + 1/48kw\partial t(\boldsymbol{b})^2. \quad (12)$$

为了获取更好的负熵近似, 取非二次型函数 G 为以下形式 [7,8]:

$$G_1(\boldsymbol{b}) = 1/a_1 \log\cosh a, \boldsymbol{b}, \quad (13)$$

或

$$G_2(\boldsymbol{b}) = -\exp(-\boldsymbol{b}^2/2), \quad (14)$$

则有

$$J(\boldsymbol{b}) \propto [[\boldsymbol{E}\{G(\boldsymbol{b})\} - \boldsymbol{E}\{G(\nu)\}]^2, \quad (15)$$

其中 ν 为一个标准化的高斯随机变量.

定义 1 如果 $\boldsymbol{b}$ 统计独立, 且是通过 $\boldsymbol{x}$ 的独立成分分解获得, 称 b_i 为 $\boldsymbol{x}$ 的独立函数元.

计算独立函数元 $\boldsymbol{b}$ 的一般算法步骤可归纳如下:

1) 利用线性变换等手段, 将单路信号 $\boldsymbol{x}$ 分解成多层信号 $\boldsymbol{y}$;

2) 白化预处理 $\boldsymbol{y}$;

3) 赋予初始值;

4) 据 (7) 和 (8) 式对 $\boldsymbol{y}$ 进行独立成分分析 (I-CA);

5) 获得 $\boldsymbol{x}$ 的独立函数元 $\boldsymbol{b}$.

定理 3 如果 $f \in L^2(R)$, 则有重构公式[1,13]:

$$f(t) = \sum_{j,k} < f, \psi_{j,k} > \tilde{\psi}_{j,k}(t). \tag{16}$$

推论 2 若 $\boldsymbol{x} \in L^2(R)$, 且 b_j 是 $\boldsymbol{x}$ 中分离出的一个独立成分, 则有重构公式:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{M} C_j b_j. \tag{17}$$

独立函数元 $\boldsymbol{b}$ 的获取与重构过程如图 1 所示:

与常见的FFT、小波变换、黄变换、JTFA、多通道信号分析等比较, 本文所述方法提供了一种信号在统计域进行处理的新方法. 如图 2 所示. 该方法将信号转换到统计域进行表征, 突显了信号的统计独立特征.

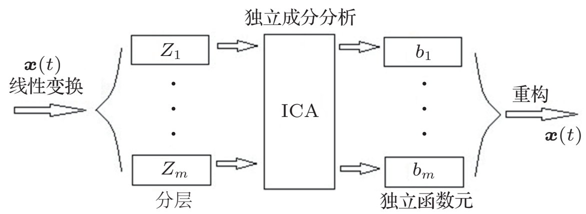

图 1 独立函数元的获取与重构过程示意图

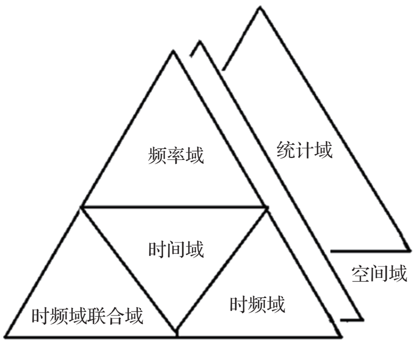

图 2 信号转换到统计域表征的示意图

3 心音独立函数元的获取与应用

心音是一种人体的自然信号, 是人体心脏生理信息的外在反映, 具备普遍性、独特性和可采集性. 对心音信号进行去噪、特征提取和分类方法的研究, 在心音智能听诊和心音身份识别方面具有积极的意义[9–11].

一个周期的心音信号可描述为

$$s_T(t) = \sum_{t=1}^{T}(c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) + c_3 s_3(t) + c_4 s_4(t) + c_5 s_5(t)), \tag{18}$$

其中, s_1, s_2 为第一、二心音信号; 第三、四心音 s_3, s_4 较弱, s_5 代表心音杂音, c 为合成系数.

心音有以下特点:

1) 周期性, 一个人的心音信号是周期重复的, 有 $s_T(t) = \sum\limits_{t=1}^{T}\sum\limits_{j=1}^{5} c_j s_j(t)$;

2) 能量集中性, 心音的能量主要集中在第一心音 s_1 和第二心音 s_2 中, 即有

$$P_{s_T} = \sum_{j=1}^{5} P_{s_j} \approx \sum_{j=1}^{2} P_{s_j};$$

3) 相对稳定性, 同一个人的心音在一定时间范围内可保持相对稳定不变, 有 $s_T(t-\Delta t) = s_T(t)$, 如果有突变发生, 说明心脏可能发生了病变[12].

根据前面的论述, 心音信号显然可以变换成一系列独立函数元的线性叠加. 因此, 按照计算独立函数元的一般步骤, 首先需要对单路单周期心音信号 $s_T(t)$ 进行分层处理, 即将 $s_T(t)$ 分解为一系列满足一定要求的分层信号的组合: $s_T = a_1 s_T^1 + a_2 s_T^2 + \cdots + a_K s_T^K$, 然后再对它进行独立成分分析, 获取心音独立函数元, 并且可由这些心音独立函数元重构出 $s_T(t)$.

对心音信号 $s_T(t)$ 进行分层的原则是:

1) 分层信号 s_T^K 与 s_T^{K+1} 之间应尽可能满足相互正交;

2) 分层信号 s_T^K 一定可重构出原信号;

3) 分层信号 s_T^K 与原信号 $s_T(t)$ 应具有相同长度.

第 1 条原则表明, 信号分层的效果相当于在一组正交基上投影, 分层信号的这种正交性则有利于进行下一步的独立成分分析, 获取心音独立函数元; 第 2 条原则表明了信号分层应具有可重构性; 第 3 条原则是使分层信号满足盲源分离的基本条件, 即各源信号之间的长度是相同的.

显然, 小波变换 (WT) 满足所述分层原则, 用标准的小波变换包模型可获得 (5) 式中的 Q 层系数向量, 有 $\boldsymbol{Z} = \sum\limits_{q=1}^{Q} \boldsymbol{Z}_q$, 利用插值法使 $\boldsymbol{Z}_q$ 为等长, 然后对 $\boldsymbol{Z}$ 进行独立成分分析, 即有

$$\sum_{q=1}^{Q} b_q = \sum_{p=1,q=1}^{P,Q} C_{p,q} \boldsymbol{Z}_q, \tag{19}$$

对 (19) 式可采用 fastica, dwt_ica 或 ext_ica 等算法来实现, 从而获得一组心音独立函数元 b_q. 经过我们较多的实验结果表明 [7,12], 利用 dwt_ica 方法获得的 b_q 具有较好的稳定性.

并且根据 (17) 式有心音信号的重构表达式:

$$S_T = \sum_{q=1}^{Q} d_q b_q. \tag{20}$$

一组心音独立函数元 b_q 获取的结果如图 3 所示, 其中 S 是一段心音信号, 按其周期性可分为 S_{T1}, S_{T2}, S_{T3}, S_{T4} 等 4 个周期, 任取其中的一个, 如 S_{T3}, 按照心音信号的分层原则, 基于小波包 (或者黄变换) 方法进行两层分层, 可得图中的 s_{T3}^1 和 s_{T3}^2, 再基于 dwt_ica 方法对 s_{T3}^1, s_{T3}^2 进行独立成分分析, 可得两个心音独立函数元 b_1 和 b_2.

3.1　在分类识别中的应用

根据 $s_T(t)$ 的周期性, 任意一个周期的 $s_T(t)$ 应包含了一个人心音信号的主要特征, 显然某一个周期的心音独立函数元 b_q 就是这种特征的一种表征形式. 将心音独立函数元 b_q 作为一种生物特征, 令 b_q^i 为标准组, 被识别的 b_q^j 为被测组. 定义它们的相异距离为

$$d_k = 1 - \frac{\left|\sum\limits_{t=1}^{M} b_q^i(t) b_q^j(t)\right|}{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{M} b_q^{i2}(t) \sum\limits_{t=1}^{M} b_q^{j2}(t)}}, \tag{21}$$

d_k 越小, b_q^j 与 b_q^i 越相似, 当 b_q^j 与 b_q^i 相同时, $d_k = 0$.

将被测组心音独立函数元 b_q^j 与标准组心音独立函数 b_q^i 逐一进行模式匹配 [11,12], 通过 (21) 式可对心音进行识别和分类.

表 1 是同一个人不同时间段心音独立函数元所具有的平均相异距离. 由于它们的相异距离未发生突变, 所以该人的心脏器官也应该未发生明显病变. 该人每年的常规身体检查也证明这个结论是正确的.

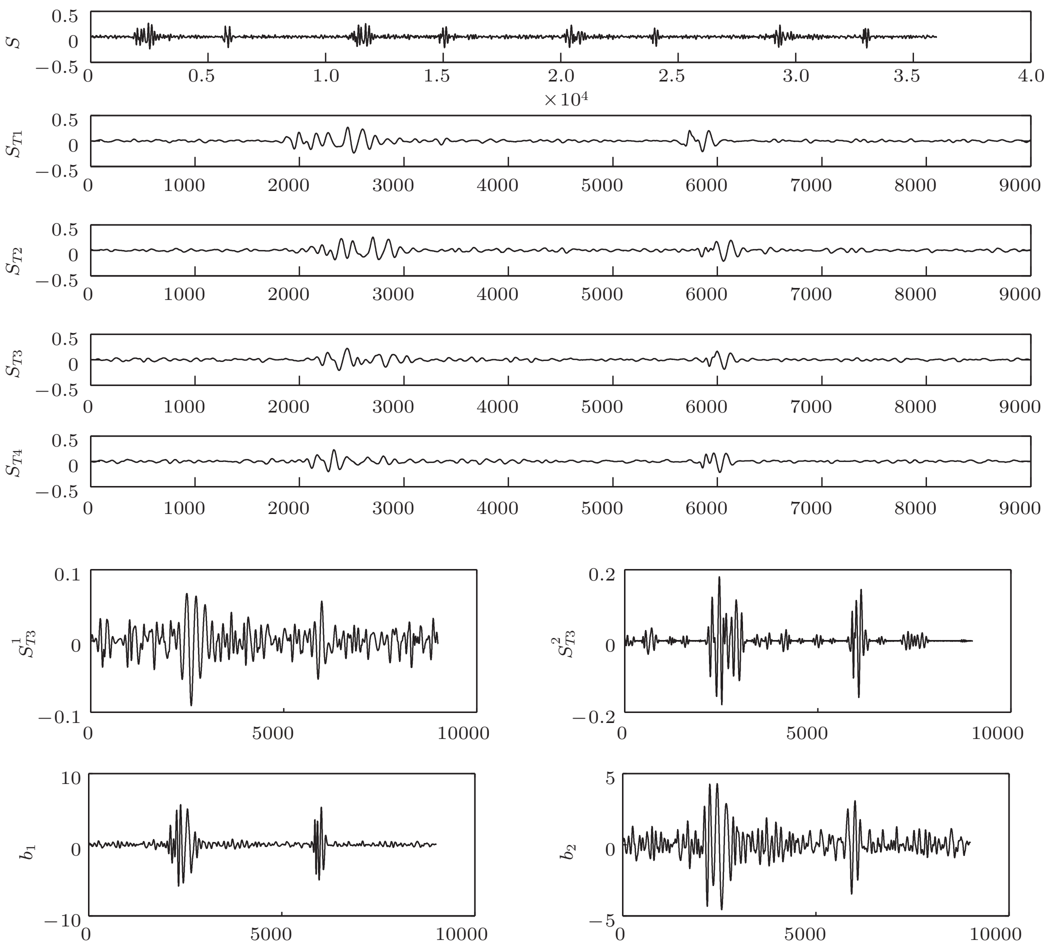

图 3　一组心音独立函数元 b_q 的获取过程

3.2 在单路含噪混合信号盲源分离中的应用

信号去噪是信号处理的核心内容之一[14,15], 心音信号的去噪能为后续处理奠定一个良好的基础. 取前面实验中同一个人不同周期的心音信号 S_{T1}, S_{T3}, 用 S_N 表示心音检测时的背景噪声 (白噪声). 假设背景噪声与心音之间是统计独立的, 那么有混合信号:

$$S = S_{T1} + S_N, \tag{22}$$

这为单路单周期含噪心音信号模型, 直接进行盲源分离 (BSS) 处理是一个病态方程[7,8]. 因为只有一路信号却有两个未知变量. 如果我们将心音独立函数元 b_q 作为先验知识, 利用 b_q 可将 (22) 式欠定问题转换为适定问题或超定问题.

表 1 同一个人不同时间段心音独立函数元的平均相异距离

d_k	S_{T2}	2011 年	2012 年	2013 年
S_{T3}	0.0014	0.1413	0.1750	0.1638

令 S_{T3} 的心音独立函数元为 b_{qk} $(k = 1, 2, \cdots)$, 那么, 将 b_{qk} 加入 S 中, 即有组合信号:

$$H = (S, b_{q1}, \cdots, b_{qk})^{\mathrm{T}} (k \geqslant 2), \tag{23}$$

(23) 式将 (22) 式的单路信号转换为 $k+1$ 个多路信号, 满足 BSS 算法的要求. 从而实现欠定 BSS 向超定 BSS 的转化, 有:

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \vdots \\ \hat{s}_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1(k+1)} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{q1} & w_{q2} & \cdots & w_{q(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ b_{q1} \\ \vdots \\ b_{qk} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

对 (22) 式只有两路源信号的单路单周期混叠信号的欠定盲分离算法, 其具体的步骤如下:

1) 混叠信号 S;

2) 将 S_{T3} 的两个心音独立函数元 $b1$ 和 $b2$ 加入到 S 中, 把单路 S 转换为 3 路信号的组合;

3) 通过对这 3 路信号进行 ICA 分解, 得到源信号的一组估计 $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$ 和 $\hat{s}_3$, 其中 $\hat{s}_1$ 就是 S_{T1} 的一种估计, 这样就实现了单路心音信号和背景噪声信号的有效分离. 图 4 是按上述方法获得的一个结果.

与参考文献 [16] 相比较, 该文所提出的双声道心音信号的欠定盲分离方法至少需要知道两路混合信号, 并且要求源信号具有稀疏特性. 而本文提出的基于心音独立函数元的单路混合信号欠定盲分离方法只需要知道一路混合信号, 并且对源信号也没有什么特殊的要求, 显然具有更广泛的普适性.

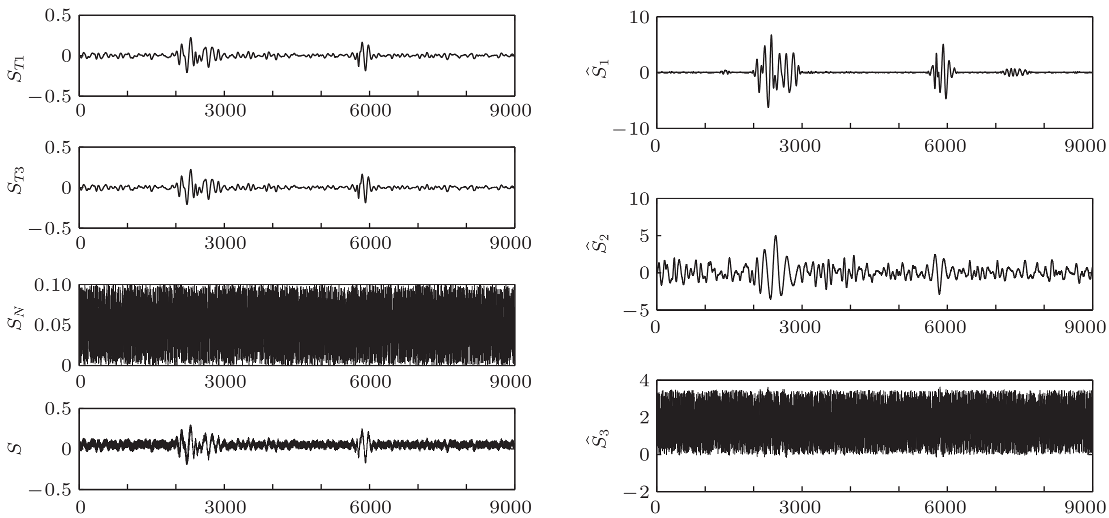

图 4 单路单周期含噪心音信号欠定盲分离的一个结果

4 结 论

1) 独立函数元是信号在统计域进行分解和重构的一种基本单元, 具有统计独立性的特征;

2) 独立函数元可形成信号处理的一种新方法, 可获得独到的信号分析效果, 独立心音函数元就是这样的一个典型应用例, 不论是心音的特征识别, 还是含噪心音的欠定盲分离, 都产生了其他方法不可替代的效果;

3) 独立函数元获取方法规范, 物理意义明确, 应用过程也比较简单, 具有潜在的推广应用价值.

参考文献

[1] Fan Y B, Pan Z K, Wang Z Y 2011 *Wavelets: Theory, Algorithms and Filter Banks* (Vol. 1) (Beijing: Science Press) pp47–204 (in Chinese) [范延滨, 潘振宽, 王正彦 2011 小波理论算法与滤波器组 (第 1 卷) (北京: 科学出版社) 第 47—204 页]

[2] You R Y, Huang X J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 20505

[3] Omran S, Tayel M 2004 *Communications and Signal Processing* p235

[4] Zhang L, Yang X H 2011 *2011 Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference* Harbin, China, July 26–30, 2011 p1115

[5] Zhao L, Feng J, Zhai G J, Zhang L H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1943 (in Chinese)[赵莉, 冯稷, 翟光杰, 张利华 2005 物理学报 **54** 1943]

[6] Liu X Y, Pei L Q, Wang Y, Zhang S M, Gao H L, Dai Y D 2011 *Chin. Phys. B* **20** 47401

[7] Cheng X F, Ma Y, Zhang X J 2011 *Acta Electron. Sin.* **39** 2317 (in Chinese)[成谢锋, 马勇, 张学军 2011 电子学报 **39** 2317]

[8] Jang G J, Lee T W 2004 *J. Mach. Learn. Res.* **28** 365

[9] Guo X, Ding X, Lei M 2012 *Acta Phys. Hungar.* **99** 382

[10] Cheng X F, Ma Y, Zhang S B, Zhang Y, Guo Y F 2010 *Chin. J. Sci. Instrum.* **31** 1712 (in Chinese)[成谢锋, 马勇, 张少白, 张瑛, 郭宇锋 2010 仪器仪表学报 **31** 1712]

[11] Cheng X F, Ma Y, Liu C, Guo Y H, Zhang X J 2012 *Sci. China Inf. Sci.* **55** 281

[12] Wang P, Kim Y, Soh C B 2005 *Engineering in Medicine and Biology Society, 2005. IEEE-EMBS 2005. 27th Annual International Conference* 17–18 January, 2006 p7572

[13] Cheng X F, Zhang Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 168701 (in Chinese)[成谢锋, 张正 2013 物理学报 **62** 168701]

[14] Ye H L, Wu Y, Zhang J T 2012 *Chin. Phys. B* **21** 125201

[15] Xie Z B, Feng J C 2011 *Chin. Phys. B* **20** 50504

[16] Wang L F, Sun K X 2012 *J. Nanjing Univ. Posts and Telecommun.* **32** 9 (in Chinese) [王路飞, 孙科学 2012 南京邮电大学学报 **32** 9]

Independent function element: model, method and application*

Ma Yong[1)] Cheng Xie-Feng[2)†]

1) (School of Computer Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

2) (College of Electronic Science and Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

(Received 17 July 2013; revised manuscript received 17 December 2013)

Abstract

In the paper, we present a new method for signal processing in statistical domain. The multiple components obtained from the conventional linear transformation are possibly irrelevant, and usually do not possess the characteristics of statistical independence. Therefore a method of signal decomposition and reconstruction is proposed based on the independent function element. This method not only inherits the advantages of linear transformation, but also has the capability of signal representation in the statistical domain. In this paper, the model, definition and obtaining method of independent function element are discussed, and the applications of heart sounds independent function element in the heart sound signal processing are also analyzed in detail. The validity and practicability of the method are demonstrated through two experiments.

Keywords: independent function element, signal representation in the statistical domain, model and method

PACS: 87.85.–d, 43.60.Hj **DOI:** 10.7498/aps.63.068703

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61271334).

† Corresponding author. E-mail: chengxf@njupt.edu.cn