

# 交连值对斜率响应矩阵和迭代矩阵稀疏度的影响\*

程生毅<sup>1)2)3)</sup> 陈善球<sup>1)3)</sup> 董理治<sup>1)3)</sup> 刘文劲<sup>1)3)</sup> 王帅<sup>1)3)</sup> 杨平<sup>1)3)</sup>  
敖明武<sup>4)</sup> 许冰<sup>1)†</sup>

1)(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

2)(中国科学院大学, 北京 100049)

3)(中国科学院自适应光学重点实验室, 成都 610209)

4)(电子科技大学, 成都 610054)

(2013年10月11日收到; 2013年12月13日收到修改稿)

基于529单元自适应光学(AO)系统, 分析了变形镜到哈特曼波前传感器的斜率响应矩阵的稀疏特性、波前复原中迭代矩阵的稀疏特性. 在变形镜驱动器间距不变的条件下, 研究了驱动器交连值对斜率响应矩阵稀疏度、迭代矩阵稀疏度以及AO系统校正能力的影响. 研究表明, 斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度随交连值的增大而减小; 交连值过大或者过小都会影响AO系统的稳定性和校正能力. 最后, 综合斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度、系统稳定性和校正能力, 给出了交连值的合理取值范围.

**关键词:** 驱动器交连值, 斜率响应矩阵, 迭代矩阵, 稀疏度

**PACS:** 42.68.Wt, 95.75.Qr, 07.05.Tp

**DOI:** 10.7498/aps.63.074206

## 1 引言

自适应光学(adaptive optics, 简记为AO)技术作为一种实时校正光束波前畸变的技术, 已经广泛应用在天文观测、激光大气传输等领域<sup>[1-5]</sup>. 自适应光学系统的工作稳定性和误差传递与所采用的波前复原算法密切相关, 目前应用最广泛的波前复原算法是1990年Jiang等提出的直接斜率法<sup>[6]</sup>. 随着AO技术的发展, AO系统单元数会达到几千甚至上万, 运用直接斜率法进行波前复原和波前控制时运算量会急剧增大, 为解决该问题, 欧洲南方天文台和美国双子座天文台的大型望远镜AO系统中应用稀疏矩阵迭代算法进行波前复原<sup>[7,8]</sup>, 稀疏矩阵定义为矩阵元素大部分为零的矩阵, 稀疏度定义为矩阵中零元素占矩阵总元素的比例. 文献<sup>[9,10]</sup>中详细讲述了迭代算法波前复原算法的原

理. 迭代算法的运算复杂度与斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度密切相关, 高稀疏度的斜率响应矩阵和迭代矩阵不仅可以降低迭代算法波前复原算法的运算复杂度, 而且可以减小复原算法所占的存储空间.

AO系统中, 影响斜率响应矩阵和迭代矩阵稀疏度的参数很多. 国内外研究人员已经对AO系统的参数及其拟合能力做了很多的研究<sup>[11-15]</sup>, 斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度与AO系统的参数有直接关系, 研究AO系统的参数对斜率响应矩阵和迭代矩阵稀疏度的影响很有必要. 中国科学院光电技术研究所已经研制成功500单元级AO系统<sup>[16]</sup>, 单元数超过500时, 迭代算法波前复原算法的运算复杂度已经小于直接斜率波前复原算法<sup>[9]</sup>. 本文基于529单元AO系统, 分析了变形镜驱动器交连值对斜率响应矩阵和迭代矩阵稀疏度的影响, 给出了交连值的合理取值范围.

\* 国家自然科学基金(批准号: 11173008)和四川省杰出青年学术技术带头人资助计划(批准号: 2012JQ0012)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [bing\\_xu\\_joe@163.com](mailto:bing_xu_joe@163.com)

## 2 斜率响应矩阵

直接斜率法以各个驱动器的控制电压作为波前复原的计算目标, 根据各个驱动器施加单位电压时对个子孔径斜率的影响, 建立驱动器电压与子孔径斜率之间的关系矩阵<sup>[6]</sup>. 关系矩阵表达式如下:

$$G = R_{xy}V, \quad (1)$$

其中,  $V$  为加在驱动器上的控制电压,  $G$  是通过哈特曼波前传感器子孔径内的平均波前斜率量,  $R_{xy}$  为变形镜到哈特曼波前传感器的斜率响应矩阵. 以 529 单元自适应光学系统为例, 给出斜率响应矩阵  $R_{xy}$ .

仿真模拟 529 单元的自适应光学系统, 匹配关系如图 1. 其中, 变形镜驱动器个数为 529, 哈特曼波前传感器子孔径个数为 904, 外围的大圆圈表示入射光束的口径, 小圆圈表示变形镜驱动器的位置, 驱动器呈正六边形排布, 每个驱动器到最近的驱动器的距离相等, 小方框表示哈特曼波前传感器子孔径所在位置, 子孔径为正方形. 图中只给出了变形镜中参与波前校正的驱动器和哈特曼波前传感器中参与波前探测的子孔径.

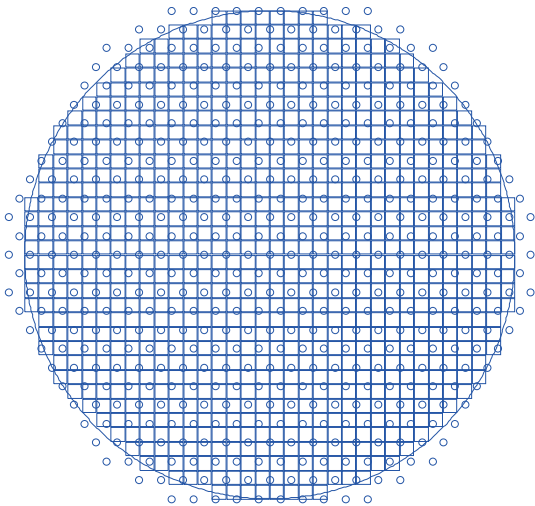


图1 529 单元自适应光学系统

变形镜的面形影响函数是指在变形镜的一个驱动器上施加电压时, 引起镜面变形的分布函数<sup>[17]</sup>. 一般情况下, 驱动器施加电压时, 驱动器中心处变形最大, 到边缘时变形量逐渐降低. 变形镜驱动器的光学影响函数一般近似为高斯或超高斯函数形式

$$V_i(x, y) = \exp[\ln \omega (\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} / d)^\alpha], \quad (2)$$

其中  $V_i(x, y)$  为第  $i$  个驱动器施加单位控制电压后对光束波前的影响函数,  $(x_i, y_i)$  为第  $i$  个驱动器的位置,  $d$  为驱动器间距,  $\alpha$  为高斯函数指数,  $\omega$  为驱动器交连值. 交连值  $\omega$  定义为一个驱动器工作时, 相邻驱动器中心的变形量与工作驱动器中心的最大变形量的比值. 交连值会影响系统工作的稳定性和对波前的拟合能力. 大的交连值会使控制系统各个通道间产生耦合, 小的交连值会造成波前拟合不足.

图 2 给出了驱动器交连值  $\omega = 0.09$  时 529 单元 AO 系统的斜率响应矩阵  $R_{xy}$ . 其中白色线条表示斜率响应矩阵中的非零元, 黑色部分表示斜率响应矩阵中的零元. 矩阵  $R_{xy}$  经过了预处理, 由于  $R_{xy}$  中绝对值小于最大值百分之一的元素对波前复原的影响可以忽略, 因而可以将这些元素按零元素处理.

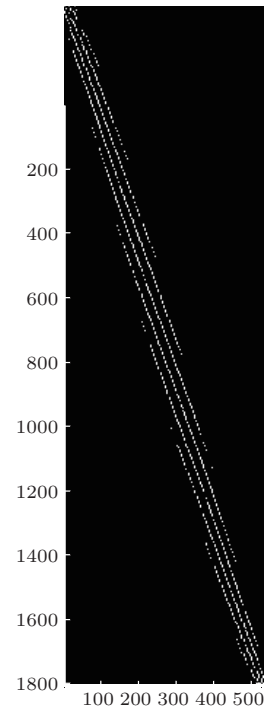


图2 529 单元 AO 系统斜率响应矩阵 ( $\omega = 0.09$ )

可以看出, 当  $\omega = 0.09$  时, 斜率响应矩阵非零元占矩阵元素总数的比例较低, 是一个稀疏矩阵. 斜率响应矩阵是稀疏矩阵的主要原因是工作驱动器只影响其附近的面形, 对离其较远位置处的面形基本没有影响.

设  $g$  为需要校正的波前像差斜率测量值, 运用直接斜率法进行波前复原时, 将  $R_{xy}$  的广义逆矩阵作为复原矩阵, 复原关系表示如下:

$$v = R_{xy}^+ g, \quad (3)$$

其中,  $R_{xy}^+$  为直接斜率法波前复原算法的复原矩阵,

$v$  为需要施加到变形镜驱动器上进行波前校正的控制电压.  $R_{xy}^+$  的矩阵如图 3, 其中白色部分表示  $R_{xy}^+$  中的非零元, 黑色部分表示  $R_{xy}^+$  中的零元. 从图中可以看出, 复原矩阵  $R_{xy}^+$  是一个满矩阵, 非零元基本占满了整个矩阵.

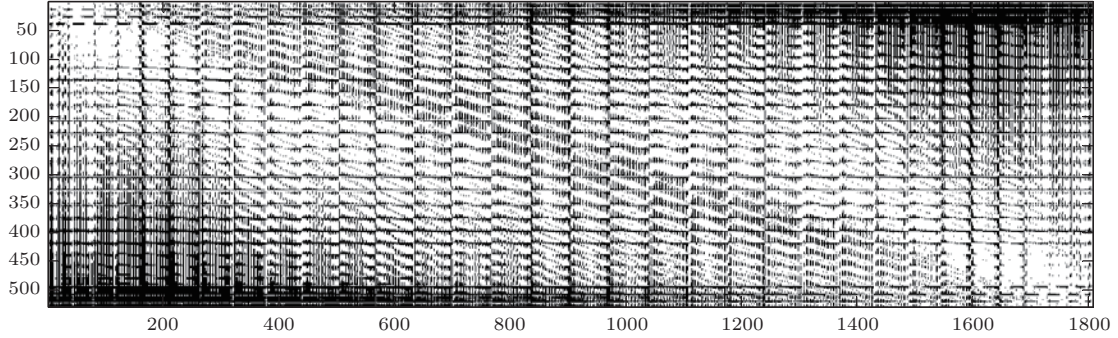


图3 529单元 AO 系统复原矩阵

### 3 迭代矩阵

对于单元数比较多的 AO 系统, 如果采用 (3) 式表示的复原算法进行波前复原, 运算量会非常大, 因而对于单元数较多的系统 [7,8], 我们采用迭代算法进行波前复原.

复原矩阵  $R_{xy}^+ = (R_{xy}^T R_{xy})^{-1} R_{xy}^T$ , 根据 (3) 式, 我们可以将直接斜率法的公式表示为

$$v = (R_{xy}^T R_{xy})^{-1} R_{xy}^T \cdot g. \quad (4)$$

对 (4) 式做变换, 得到

$$(R_{xy}^T R_{xy})v = R_{xy}^T g, \quad (5)$$

其中,  $g$  为需要校正的波前像差斜率测量值,  $R_{xy}^T$  为斜率响应矩阵的转置矩阵,  $v$  为需要施加到变形镜驱动器上进行波前校正的控制电压. (5) 式可以看作是  $Ax = b$  的形式,  $v$  可以看作  $Ax = b$  中的  $x$ , 迭代算法避免了对斜率响应矩阵求广义逆, 而是通过迭代的方法求解  $v$  的值 [18]. (5) 式中  $R_{xy}^T R_{xy}$  即为迭代矩阵, 如图 4 所示, 其中白色线条表示迭代矩阵中的非零元, 黑色部分表示斜率响应矩阵中的零元, 可以看出迭代矩阵也是一个稀疏矩阵.

由于迭代矩阵  $R_{xy}^T R_{xy}$  和斜率响应矩阵的转置矩阵  $R_{xy}^T$  都为稀疏矩阵, 因而在迭代算法中, 应用稀疏矩阵向量乘的技术, 可大大降低矩阵向量运算的运算复杂度, 同时可以降低复原算法所占的存储空间. 文献 [9] 中给出了迭代算法波前复原的

运算复杂度估计, 对于一个单元数较多的 AO 系统, 设单元数个数为  $n$ , 迭代算法的运算复杂度估计为  $O(n)$ , 传统的波前复原算法的运算复杂度估计为  $O(n^2)$ .

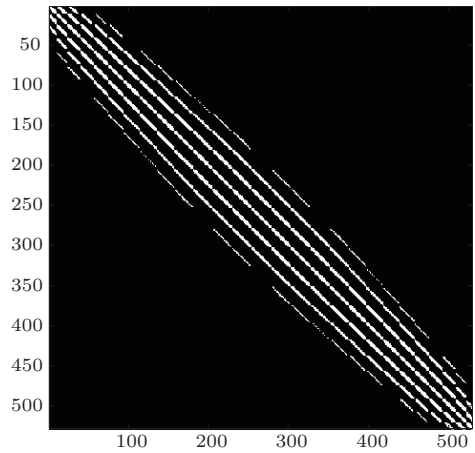


图4 529单元 AO 系统迭代矩阵

### 4 驱动器交连值对斜率响应矩阵和迭代矩阵稀疏度的影响

基于 529 单元自适应光学系统, 设定高斯函数指数取值为 2.3 [11,17], 在 [0.01, 0.99] 范围内按 0.02 的抽样率选取驱动器的交连值.

针对 529 单元 AO 系统中, 分析驱动器交连值对斜率响应矩阵  $R_{xy}$  和迭代矩阵  $R_{xy}^T R_{xy}$  稀疏度的影响. 图 5 和图 6 分别显示了斜率响应矩阵和迭代

矩阵中非零元所占各自矩阵总元素的比例. 从图中可以得出如下结论: 斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度随驱动器交连值的增大而减小, 即交连值越大, 斜率响应矩阵和迭代矩阵越稠密, 反之, 斜率响应矩阵和迭代矩阵越稀疏. 对此可做出如下解释: 与交连值较小的变形镜相比, 驱动器施加相同电压时, 交连值较大的变形镜的驱动器周边区域变形量较大, 因而斜率响应矩阵和迭代矩阵中非零元的个数较多.

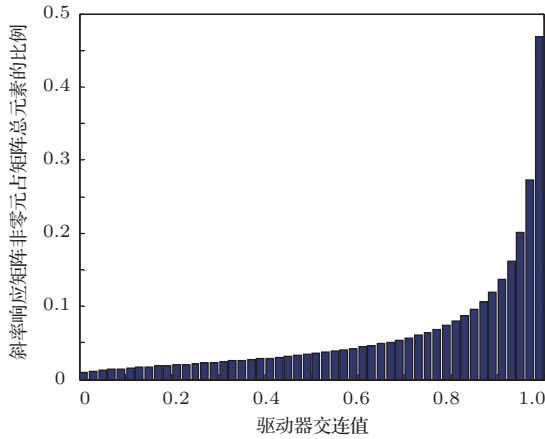


图5 交连值与斜率响应矩阵稀疏度的关系

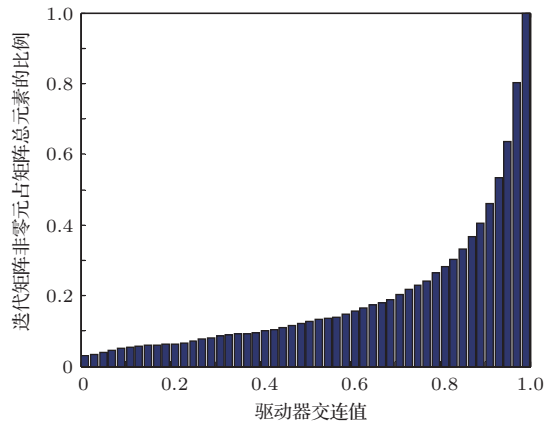


图6 交连值与迭代矩阵稀疏度的关系

为了更清楚的显示斜率响应矩阵和迭代矩阵稀疏度, 图7给出了它们的稀疏度随驱动器交连值变化的曲线.

由图5、图6和图7分析可知, 变形镜驱动器交连值的增大会降低斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度. 运用迭代算法进行波前复原时, 在迭代次数

确定的情况下, 迭代算法的运算量主要与迭代矩阵非零元的个数相关, 图8对比了不同交连值下迭代算法进行一次波前复原的乘法运算量.

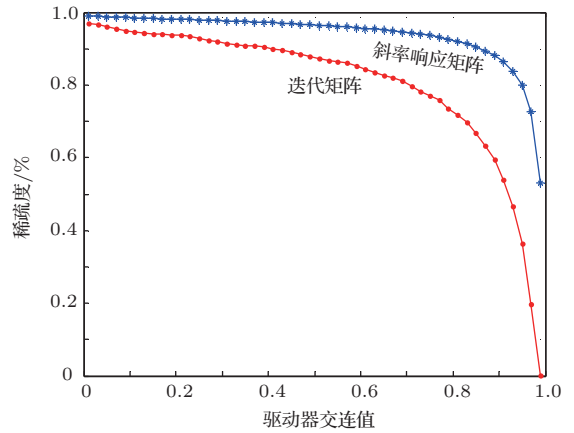


图7 斜率响应矩阵与迭代矩阵稀疏度对比

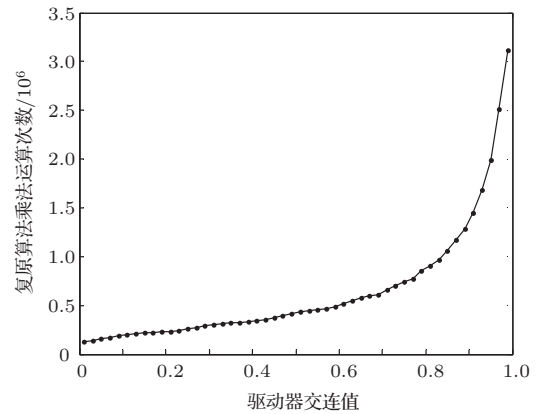


图8 波前复原过程乘法运算量对比

从图中可以看出, 随着驱动器交连值的增大, 迭代算法的运算量会逐渐增大. 交连值在(0, 0.7)区间内时, 迭代算法的运算量随交连值增大类似线性增长趋势; 交连值在(0.7, 1)区间内时, 迭代算法的运算量随交连值增大类似指数增长趋势. 出现这种情况的主要原因是: 交连值过大时, 迭代矩阵和斜率响应矩阵的稀疏度会急剧下降, 因而迭代算法的运算量会大大增大. 对于一个实际的AO系统, 变形镜驱动器交连值的取值范围要参考拟合能力来确定, 并在此范围内判断运用迭代算法进行波前复原是否可行. 但绝大多数AO系统中, 驱动器交连值远小于0.70, 这使得迭代算法波前复原成为可能.



## 5 529 单元 AO 系统最优交连值范围

由以上几节分析可知, 交连值的大小直接决定了斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度, 到底如何取值对于系统最有利, 就需要结合系统的稳定性和校正能力来判断. 本文用校正后的残余波前的 RMS 值判断系统的校正能力, 用变形镜到哈特曼波前传感器的斜率响应矩阵的矩阵条件数判断系统的稳定性.

### 5.1 交连值的大小对残余波前 RMS 值的影响

为了能够清楚的显示变形镜对单阶像差的校正能力, 取待校正像差分别为圆域内 1 到 65 阶 Zernike 像差, 每一阶像差的 RMS 值均为  $1 \mu\text{m}$ <sup>[19]</sup>, 校正后残余波前的 RMS 值如图 9, 其中,  $x$  坐标表

示交连值的大小,  $y$  坐标表示不同阶次的 Zernike 像差,  $z$  坐标表示残余波前的 RMS 值. 从  $y$  方向来看, 变形镜对低阶像差校正能力较强, 对高阶像差校正能力较差. 从  $x$  方向来看, 随着驱动器交连值变化, 残余波前 RMS 的大小成不规则变化. 而且当交连值为 0.01 时, 残余波前的 RMS 值远远大于交连值取其他值的 RMS 值. 出现此现象的主要原因是交连值为 0.01 的变形镜拟合能力太差.

为了清楚的显示交连值对变形镜校正能力的影响, 我们除去交连值取 0.01 时的数据, 取出 4 组不同的 Zernike 像差来研究, 如图 10 所示. 其中, 交连值在 0.07 到 0.5 的区间内时, 残余波前的 RMS 随交连值成连续变化, 而交连值在 0.5 到 0.99 的区间内时, 低阶像差校正后残余波前的 RMS 基本呈现下降趋势, 而高阶像差校正后残余波前的 RMS 存在较大振荡.

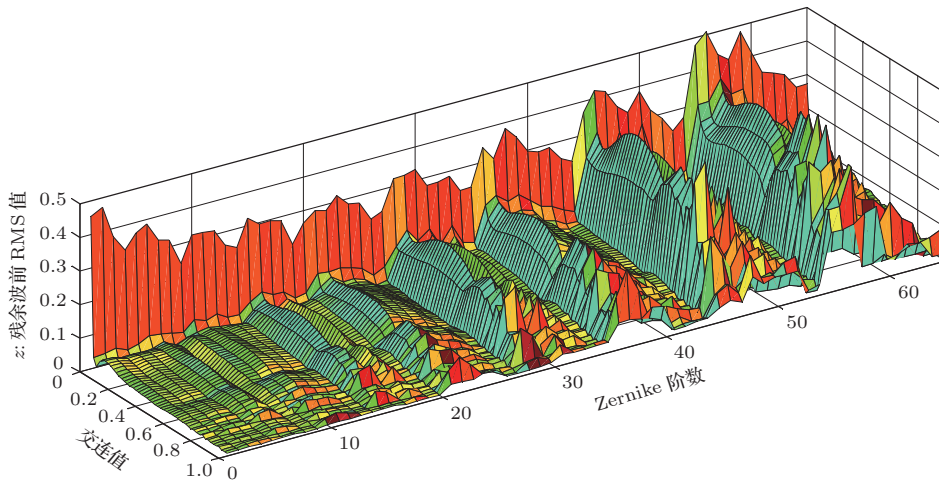


图 9 (网刊彩色) 交连值和 Zernike 阶次对残余波前 RMS 值的影响 ( $\mu\text{m}$ )

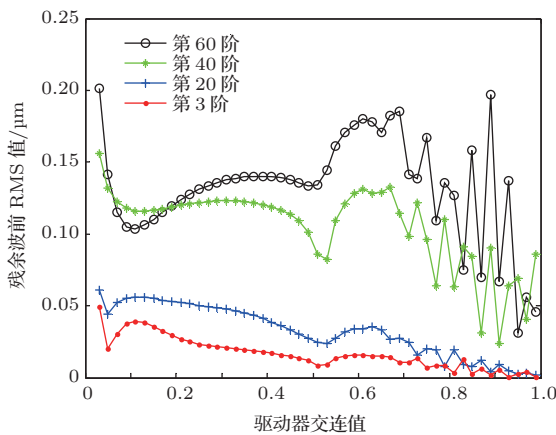


图 10 (网刊彩色) 残余波前 RMS 值与交连值的关系

### 5.2 交连值对斜率响应矩阵的条件数的影响

斜率响应矩阵的条件数是评价 AO 系统稳定性的主要判据, 在高矩阵条件数的情况下, AO 系统不能稳定工作. 图 11 给出了变形镜到哈特曼波前传感器的斜率响应矩阵的条件数随交连值的变化趋势. 文献 [10] 指出, 当交连值过大 (大于 0.70) 时, 斜率响应矩阵的条件数随交连值的增大呈指数形式增长, 通常 AO 系统交连值取值小于 0.7. 因而作图时, 只给出了驱动器交连值在 0 到 0.70 之间的数据.

从图 11 中可以明显看出, 当驱动器交连值较

大或者较小时,斜率响应矩阵条件数都会很大.当驱动器交连值在0.07到0.37之间时,变形镜到哈特曼波前传感器的斜率响应矩阵条件数较小,在此区间内,自适应光学系统有良好的稳定性,控制系统各通道间耦合数较小.

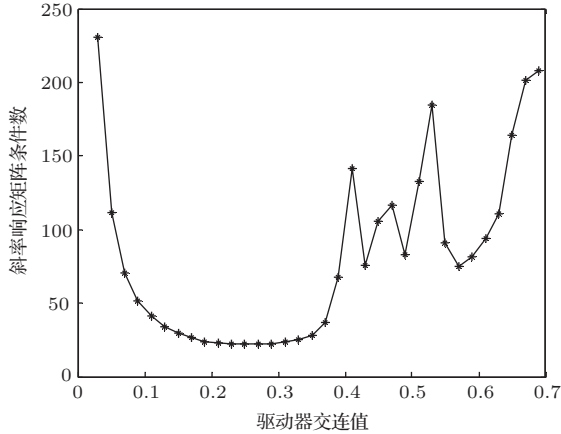


图 11 斜率响应矩阵的条件数与驱动器交连值的关系曲线

### 5.3 交连值的大小对大气湍流波前校正能力的影响

大气湍流引起的像差通常符合 Kolmogorov 统计规律<sup>[20]</sup>,为了分析大气湍流环境下变形镜对像差的校正效果,本文利用前65阶 Zernike 多项式,随机生成100组符合 Kolmogorov 统计规律的大气湍流畸变波前,计算了不同交连值下变形镜的校正效果,给出了100组计算结果的平均值,如图12所示.

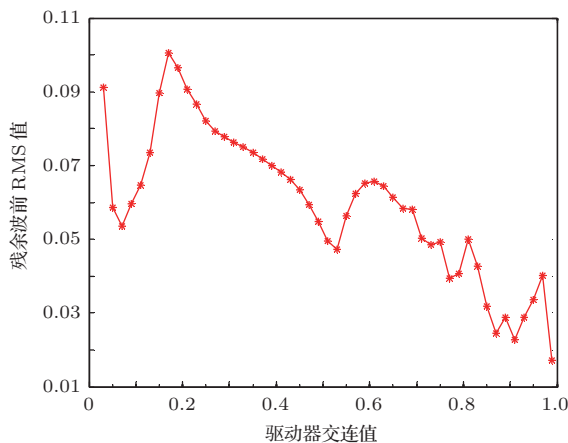


图 12 大气湍流残余波前 RMS 值与交连值的关系 (100 组结果均值)

整体来看,图12中的曲线与图10中低阶像差残余波前 RMS 值的曲线类似,这是因为满足 Kol-

mogorov 统计规律的大气湍流引起的波前畸变中,低阶像差占主要成分.从图中还可看出,交连值在0.17时,校正后的残余波前 RMS 最大,当交连值大于0.17时,校正后残余波前 RMS 值随着交连值增大呈下降趋势.

综合以上分析,对于一个特定的 AO 系统,驱动器的交连值会有一个最优的范围,太大或者太小都会影响系统的性能.对于529单元 AO 系统,从图11得出,交连值在0.07到0.37的区间内时,斜率响应矩阵条件数较小,系统相对稳定.结合图11和图12得出,交连值在区间(0.07, 0.13)和(0.29, 0.37)之间时,变形镜对大气湍流引起的波前畸变校正效果较好.从图8可以看出,变形镜交连值越小,迭代算法波前复原算法的运算量越小.当驱动器交连值在范围0.07—0.13时,迭代矩阵的稀疏度在94.4%—95.6%之间,斜率响应矩阵的稀疏度在98.4%—98.7%之间,运用迭代算法进行波前复原时,由于迭代矩阵和斜率响应矩阵稀疏度较高,因而会大大减小复原算法所占的存储空间,同时降低复原算法的运算复杂度.因而综合可得(0.07, 0.13)是交连值的最优取值范围.

## 6 结 论

本文基于529单元自适应光学系统,研究了变形镜驱动器交连值对斜率响应矩阵和迭代矩阵稀疏度的影响,给出了仿真条件约束下的最优交连值的范围.研究表明,对于529单元自适应光学系统,驱动器交连值在0.07—0.13内时,斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度较高;当交连值取0.07时,斜率响应矩阵和迭代矩阵的稀疏度达到最大值.在实际系统中,变形镜最优交连值的选取还要结合变形镜工艺特性等因素综合给出.虽然本文研究的系统为529单元 AO 系统,但是得出的结论和规律对千单元、万单元 AO 系统同样具有指导意义.

感谢中国科学院光电技术研究所的姜文汉院士和郭友明博士对论文工作的帮助与指导.

### 参考文献

[1] Jiang W H, Zhang Y D, Rao C H, Ling N, Guan C L, Li M, Yang Z P, Shi G H 2011 *Acta Optica Sinica* **31** 9

- (in Chinese) [姜文汉, 张雨东, 饶长辉, 凌宁, 官春林, 李梅, 杨泽平, 史国华 2011 光学学报 **31** 9]
- [2] Jiang W H 2006 *Chinese Journal of Nature* **28** 1 (in Chinese) [姜文汉 2006 中国自然杂志 **28** 1]
- [3] Zhang L Q, Gu N T, Rao C H 2013 *Acta. Phys. Sin.* **62** 169501 (in Chinese)[张兰强, 顾乃庭, 饶长辉 2013 物理学报 **62** 169501]
- [4] Ren Z J, Liang X Y, Liu M B, Xia C Q, Lu X M, Li R X, Xu Z Z 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 124203
- [5] Yu L H, Liang X Y, Ren Z J, Wang L, Xu Y, Lu X M, Yu G T 2012 *Chin. Phys. B* **21** 014201
- [6] Jiang W H, Li H G 1990 *Proc. SPIE* The Hague, Netherlands, March 01, 1990 p82
- [7] Feng L, Fedrigo E, Bechet C 2012 *Applied Optics* **51** 3564
- [8] Antonin H B 2010 *Proc. SPIE* San Diego, CA, August 02, 2009 p1
- [9] Luc G, Curtis R, Vogel, Brent L 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1817
- [10] Eric T, Michel T 2010 *J. Opt. Soc. Am. A* **27** 1046
- [11] Shao L, Xian H 2004 *Opto-Electronic Engineering* **31** 8 (in Chinese) [邵力, 鲜浩 2004 光电工程 **31** 8]
- [12] Yang H F, Rao C H, Zhang Y D, Jiang W H 2009 *Acta Optica Sinica* **29** 587 (in Chinese) [杨华峰, 饶长辉, 张雨东, 姜文汉 2009 光学工程 **29** 587]
- [13] Lu F, He Z W 2012 *Computer Simulation* **29** 38 (in Chinese) [卢飞, 何忠武 2012 计算机仿真 **29** 38]
- [14] Liu J, Zhao C J 2012 *High Power Laser and Particle Beams* **24** 1029 (in Chinese)[刘娟, 赵楚军 2012 强激光与粒子束 **24** 1029]
- [15] Ning Y, Zhou H, Yu H, Rao C H, Jiang W H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1089
- [16] Jiang W H, Rao C H, Zhang Y D, Ling N, Guan C L 2009 *Proc. SPIE* San Jose, CA, January 24, 2009 p1
- [17] Dong L Z, Yang P, Xu B 2009 *Applied Physics B* **96** 527
- [18] Zhu Y G 2010 *Matrix Analysis and Calculation* (Beijing: National Defense Industry Press) pp160–183 (in Chinese)[朱元国 2010 矩阵分析与计算 (北京: 国防工业出版社) 第160—183页]
- [19] Ning Y, Yu H, Zhou H, Rao C H, Jiang W H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4717 (in Chinese)[宁禹, 余浩, 周虹, 饶长辉, 姜文汉 2009 物理学报 **58** 4717]
- [20] Noll R J 1976 *J. Opt. Soc. Am. A* **66** 207

## Influence of coupling coefficient on sparseness of slope response matrix and iterative matrix\*

Cheng Sheng-Yi<sup>1)2)3)</sup> Chen Shan-Qiu<sup>1)3)</sup> Dong Li-Zhi<sup>1)3)</sup> Liu Wen-Jin<sup>1)3)</sup> Wang Shuai<sup>1)3)</sup>  
 Yang Ping<sup>1)3)</sup> Ao Ming-Wu<sup>4)</sup> Xu Bing<sup>1)†</sup>

1) (The Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China)

2) (University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

3) (Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China)

4) (University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

( Received 11 October 2013; revised manuscript received 13 December 2013 )

### Abstract

Based on a 529-actuator adaptive optic (AO) system, the sparseness of slope response matrix from deformable mirror to Hartmann wavefront sensor and the sparseness of iterative matrix in wavefront reconstruction are analyzed. The influence of actuator coupling coefficient on the slope response matrix sparseness, the iterative matrix sparseness, and the AO system correction quality are also studied under the condition of constant actuator spacing. Larger coupling coefficient results in a lower sparseness of slope response matrix and an iterative matrix. Too large or too small coupling coefficient will lead to lower stability and correction quality of AO system. Finally, the optimal range of coupling coefficient is provided by the balancing correction quality, sparseness of slope response matrix, and stability.

**Keywords:** actuator coupling coefficient, slope response matrix, iterative matrix, sparseness

**PACS:** 42.68.Wt, 95.75.Qr, 07.05.Tp

**DOI:** 10.7498/aps.63.074206

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11173008), and the Sichuan Province Outstanding Youth Academic Technology Leaders Program (Grant No. 2012JQ0012).

† Corresponding author. E-mail: [bing\\_xu\\_ioe@163.com](mailto:bing_xu_ioe@163.com)