

一类含时变间隙的强非线性相对转动系统 分岔和混沌*

刘彬¹⁾ 赵红旭¹⁾ 侯东晓^{2)†} 刘浩然¹⁾

1)(燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

2)(东北大学秦皇岛分校控制工程学院, 秦皇岛 066004)

(2013年10月26日收到; 2013年12月17日收到修改稿)

建立一类具有时变间隙的两质量相对转动系统的强非线性动力学方程. 应用MLP方法求解出变换参数, 并运用多尺度法求解该系统发生1/2亚谐共振时的分岔响应方程, 采用奇异性理论分析得到系统稳态响应的转迁集, 并且得到系统在非自治情形下的分岔特性以及系统的分岔形态. 最后通过数值仿真得到系统在间隙和阻尼参数变化下的分岔和混沌行为, 发现随着系统参数变化系统将出现周期运动、倍周期运动以及混沌等多种不同的运动形态.

关键词: 相对转动, 时变间隙, 强非线性, 混沌

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.074501

1 引言

自Carmeli于1995年建立转动相对论力学理论^[1,2],1996年Luo建立了转动相对论系统的力学理论以来^[3,4],转动相对论系统及其分岔和混沌的研究在各行各业得到了迅速发展. 文献^[5]利用Melnikov方法研究一类约瑟夫森结系统异宿混沌的生成和抑制. 文献^[6]研究了在强迫周期力作用下具有三势阱Duffing系统的混沌和分岔. 文献^[7—10]研究一类具有强非线性动力学系统的稳定性、分岔和混沌. 文献^[11, 12]研究了一类相对转动系统非线性动力学方程的混沌和控制. 文献^[13]建立谐和激励与随机噪声联合作用下的强非线性随机动力系统, 通过构造合适的同伦映射, 将对强非线性随机动力系统响应的求解转化为对一组线性随机微分方程的求解.

本文建立一类具有时变间隙的两质量相对转动系统的强非线性动力学方程. 应用MLP方法求

解出变换参数, 并运用多尺度法求解该系统发生1/2亚谐共振时的分岔响应方程, 通过奇异性分析得到系统稳态响应的转迁集. 最后采用数值方法验证了上述理论成果的有效性.

2 具有时变间隙的相对转动强非线性动力学方程

间隙是动力系统中比较常见非线性因素, 考虑间隙各个分段的非线性特性, 可得具有间隙的非线性刚度可表示为

$$f(x) = \begin{cases} (x - e_c) + \delta(x - e_c)^3, & x > e_c > 0, \\ 0, & e_c \leq x \leq e_c, \\ (x + e_c) + \delta(x + e_c)^3, & x < -e_c < 0, \end{cases} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 51105324)、河北省自然科学基金(批准号: E2014501006)、河北省科技支撑计划项目(批准号: 13211907D)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: N110323008)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: houdongxiao1982@163.com

其中, e_c 是系统结构间隙, δ 是非线性项系数, x 为相对转角变化量.

由于工程实际中三次刚度项同样存在扰动现象, 为了更加接近实际情况, 所以本文考虑一次刚度项和三次刚度项同时存在扰动的 Mathieu-Duffing 振子, 其动力学模型为

$$g(t) = K(t) (\tilde{x} + \tilde{x}^3),$$

其中

$$K(t) = \tilde{k}_0^2 + \tilde{k} \cos 2t.$$

故具有时变间隙的非线性刚度项可以用下式表示:

$$h(t) = K(t) f(x). \quad (2)$$

考虑具有时变间隙的两质量相对转动系统, 该系统的动能为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2. \quad (3)$$

具有 (2) 式形式非线性刚度的两质量相对转动系统势能为

$$U = \frac{1}{2} K(t) f^2(\theta_1 - \theta_2). \quad (4)$$

系统的广义力为

$$Q_j = \sum_{i=1}^2 F_i^i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

其中 $J_i (i = 1, 2)$ 为该相对转动系统的转动惯量, $\theta_i (i = 1, 2)$, $\dot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 分别为系统的转角和转速. $F_i^i = T_i + F_i^c$, T_i 为广义外力, F_i^c 为系统广义阻尼. $q_j (j = 1, 2)$ 为广义坐标.

令

$$F_1^c = -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad F_2^c = -C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1),$$

则

$$\begin{aligned} F_1^1 &= T_1 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \\ F_2^2 &= T_2 - C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 C 为线性阻尼系数, 将 (3) 式、(4) 式、(5) 式、(6) 式代入如下的 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j,$$

得

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(t) f(\theta_1 - \theta_2) = T_1, \quad (7)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + K(t) f(\theta_2 - \theta_1) = T_2, \quad (8)$$

式中 $\ddot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 为系统转动惯量的角加速度. 对于相对转动动力系统, 考虑相对转角的变化, (7) 式乘以 $1/J_1$ 减去 (8) 式乘以 $1/J_2$ 得到

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ & + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} K(t) f(\theta_1 - \theta_2) \\ & = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 T_1 - J_1 T_2). \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$x = \theta_1 - \theta_2, \dot{x} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \ddot{x} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2,$$

$$\mu = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} C,$$

$$K_1(t) = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} K(t),$$

$$F(t) = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 T_1 - J_1 T_2),$$

得

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + K_1(t) f(x) = F(t). \quad (10)$$

将 (1) 式代入 (10) 式可得

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + K_1(t) [\delta x^3 - 3\delta e_c x^2 + x + 3\delta e_c^2 x - \delta e_c^3 - e_c] = F(t), \quad x > e_c > 0,$$

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} = F(t), \quad -e_c \leq x \leq e_c,$$

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + K_1(t) [\delta x^3 + 3\delta e_c x^2 + x + 3\delta e_c^2 x + \delta e_c^3 + e_c] = F(t), \quad x < -e_c < 0.$$

考虑间隙在 $x > e_c > 0$ 时有

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + K_1(t) (1 + 3\delta e_c^2) x - 3K_1(t) \delta e_c x^2 + K_1(t) \delta x^3 = F(t) + K_1(t) (\delta e_c^3 + e_c). \quad (11)$$

令

$$\mu = 2\eta, \quad \xi = 1 + 3\delta e_c^2, \quad \beta = -\frac{3\delta e_c}{1 + 3\delta e_c^2},$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\delta}{1 + 3\delta e_c^2},$$

$$K_1(t) = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} (\tilde{k}_0^2 + \tilde{k} \cos 2t),$$

$$k_0^2 = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \tilde{k}_0^2, \quad \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \tilde{k} = 2,$$

$$\omega_0^2 = \xi k_0^2,$$

$$\begin{aligned} F(t) &= p_1 \cos \Omega_1 t + p_2 \cos \Omega_2 t \\ &\quad - K_1(t) (\delta e_c^3 + e_c), \end{aligned}$$

则方程转换为

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + (\omega_0^2 + 2\xi \cos 2t) \left(x + \beta x^2 + \frac{1}{\lambda} x^3 \right) = p_1 \cos \Omega_1 t + p_2 \cos \Omega_2 t. \quad (12)$$

(12) 式就是一类具有时变间隙的两质量相对转动系统的动力学方程, 是进一步分析其分岔和混沌行为的基础.

3 系统的分岔响应求解

3.1 利用MLP方法确定变换参数

(12) 式非线性项前冠以参数 ε , ε 并非小参数, 则方程转化为如下:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \eta \dot{x} + (\omega_0^2 + 2\varepsilon \xi \cos 2t) \left(x + \varepsilon \beta x^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda} x^3 \right) = p_1 \cos \Omega_1 t + p_2 \cos \Omega_2 t. \quad (13)$$

令

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2, R = \frac{\Omega_2}{\Omega_1},$$

引入新变量

$$\tau = \Omega t, \tau_1 = \Omega_1 t, \tau_2 = \Omega_2 t, \quad (14)$$

因此

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \tau_1 = \beta_1 \tau, \tau_2 = \beta_2 \tau,$$

其中

$$\beta_1 = \frac{1}{1+R}, \beta_2 = \frac{R}{1+R}.$$

将(14)式代入(13)式

$$\begin{aligned} & \Omega^2 \ddot{x} + 2\varepsilon \eta \Omega \dot{x} + (\omega_0^2 + 2\varepsilon \xi \cos \tau) \\ & \times \left(x + \varepsilon \beta x^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda} x^3 \right) \\ & = p_1 \cos \tau_1 + p_2 \cos \tau_2, \end{aligned} \quad (15)$$

考虑 1/2 亚谐共振情况, 设 $\alpha = \frac{\varepsilon \omega_1}{4\omega_0^2 + \varepsilon \omega_1}$, 则

$$\varepsilon = \frac{4\omega_0^2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)}. \quad (16)$$

将 Ω^2 写成

$$\Omega^2 = \frac{4\omega_0^2}{1-\alpha} (1 + \delta_2 \alpha^2 + \delta_3 \alpha^3 + \dots), \quad (17)$$

则

$$\Omega = 2\omega_0 \left[1 + \frac{1}{2} \alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right]. \quad (18)$$

设方程的解为

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots \quad (19)$$

将(16)式, (17)式, (18)式, (19)式代入(15)式

$$\begin{aligned} & \frac{4\omega_0^2}{1-\alpha} (1 + \delta_2 \alpha^2 + \delta_3 \alpha^3 + \dots) \\ & \times (\ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1 + \alpha^2 \ddot{x}_2 + \dots) \\ & + 2 \cdot \frac{4\omega_0^2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \eta \cdot 2\omega_0 \\ & \times \left[1 + \frac{1}{2} \alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right] \\ & \times (\dot{x}_0 + \alpha \dot{x}_1 + \alpha^2 \dot{x}_2 + \dots) \\ & + \left(\omega_0^2 + 2 \cdot \frac{4\omega_0^2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \xi \cos \tau \right) \\ & \times \left[x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \frac{4\omega_0^2 \alpha \beta}{\omega_1 (1-\alpha)} \right. \\ & \times (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots)^2 \\ & \left. + \frac{4\omega_0^2 \alpha}{\lambda \omega_1 (1-\alpha)} (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots)^3 \right] \\ & = p_1 \cos \tau_1 + p_2 \cos \tau_2. \end{aligned}$$

将上式展开, 比较 α 的同次幂系数, 得摄动方程组为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \frac{1}{4} x_0 & = \frac{1}{4\omega_0^2} (p_1 \cos \tau_1 + p_2 \cos \tau_2), \\ \ddot{x}_1 + \frac{1}{4} x_1 & = \frac{1}{4} x_0 - \frac{2\xi}{\omega_1} x_0 \cos \tau - \frac{\omega_0^2 \beta}{\omega_1} x_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\lambda \omega_1} x_0^3 \\ & - \frac{4\omega_0}{\omega_1} \eta \dot{x}_0 - \frac{1}{4\omega_0^2} \\ & \times (p_1 \cos \tau_1 + p_2 \cos \tau_2). \end{aligned} \quad (20)$$

令 $R = 2, \Omega = 2$, 初始条件 $x_0(0) = a_0$, 则

$$\begin{aligned} x_0 & = a_0 \cos \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) + \frac{9p_1}{5\omega_0^2} \cos \frac{\tau}{3} \\ & - \frac{9p_2}{7\omega_0^2} \cos \frac{2\tau}{3}. \end{aligned} \quad (21)$$

将(21)式代入(20)式得

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{1}{4} x_1 & = \frac{a_0}{4} \cos \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) + \frac{9p_1}{20\omega_0^2} \cos \frac{\tau}{3} - \frac{9p_2}{28\omega_0^2} \cos \frac{2\tau}{3} \\ & - \frac{2\xi}{\omega_1} \left[a_0 \cos \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) + \frac{9p_1}{5\omega_0^2} \cos \frac{\tau}{3} \right. \\ & \left. - \frac{9p_2}{7\omega_0^2} \cos \frac{2\tau}{3} \right] \cos \tau - \frac{\omega_0^2 \beta}{\omega_1} \left[a_0 \cos \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) \right. \\ & \left. + \frac{9p_1}{5\omega_0^2} \cos \frac{\tau}{3} - \frac{9p_2}{7\omega_0^2} \cos \frac{2\tau}{3} \right]^2 \\ & - \frac{\omega_0^2}{\lambda \omega_1} \left[a_0 \cos \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) + \frac{9p_1}{5\omega_0^2} \cos \frac{\tau}{3} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{9p_2}{7\omega_0^2} \cos \frac{2\tau}{3} \Big]^3 - \frac{4\omega_0}{\omega_1} \eta \left[-\frac{a_0}{2} \sin \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) \right. \\
 & \left. - \frac{3p_1}{5\omega_0^2} \sin \frac{\tau}{3} + \frac{6p_2}{7\omega_0^2} \sin \frac{2\tau}{3} \right] \\
 & - \frac{1}{4\omega_0^2} \left(p_1 \cos \frac{\tau}{3} + p_2 \cos \frac{2\tau}{3} \right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 \cos \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) &= \frac{e^{i(\frac{\tau}{2} + \varphi)} + e^{-i(\frac{\tau}{2} + \varphi)}}{2}, \\
 \cos \frac{\tau}{3} &= \frac{e^{i\frac{\tau}{3}} + e^{-i\frac{\tau}{3}}}{2}, \\
 \cos \frac{2\tau}{3} &= \frac{e^{i\frac{2\tau}{3}} + e^{-i\frac{2\tau}{3}}}{2},
 \end{aligned}$$

将其代入(22)式, 可得

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 \\
 &= \left(\frac{a_0}{4} - \frac{a_0\xi}{\omega_1} \cos 2\varphi - \frac{\omega_0^2}{\lambda\omega_1} \left[\frac{3}{4}a_0^3 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{243}{50}a_0 \left(\frac{p_1}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{243}{98}a_0 \left(\frac{p_2}{\omega_0^2} \right)^2 \right] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{243}{70}a_0 \left(\frac{p_1p_2}{\omega_0^2} \right) \cos 2\varphi \right) \cos \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) \\
 & \quad - \left(\frac{a_0\xi}{\omega_1} \sin 2\varphi - \frac{243}{70}a_0 \left(\frac{p_1p_2}{\omega_0^2} \right) \sin 2\varphi \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2\eta\omega_0a_0}{\omega_1} \right) \sin \left(\frac{\tau}{2} + \varphi \right) + \text{NST}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

消除(23)式久期项可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_0}{4} - \frac{a_0\xi}{\omega_1} \cos 2\varphi - \frac{\omega_0^2}{\lambda\omega_1} \left[\frac{3}{4}a_0^3 + \frac{243}{50}a_0 \left(\frac{p_1}{\omega_0^2} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{243}{98}a_0 \left(\frac{p_2}{\omega_0^2} \right)^2 \right] - \frac{243}{70}a_0 \left(\frac{p_1p_2}{\omega_0^2} \right) \cos 2\varphi = 0, \\
 & \frac{a_0\xi}{\omega_1} \sin 2\varphi - \frac{243}{70}a_0 \left(\frac{p_1p_2}{\omega_0^2} \right) \sin 2\varphi \\
 & - \frac{2\eta\omega_0a_0}{\omega_1} = 0.
 \end{aligned}$$

求解上述方程组, 可得变换参数

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{3\omega_0^2}{\lambda} a_0^2 + 4 \cdot \frac{243p_1^2}{50\lambda\omega_0^2} + 4 \cdot \frac{243p_2^2}{98\lambda\omega_0^2} \\
 & \quad + 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{243p_1p_2}{70\lambda\omega_0^2} - 1 \right)^2 - 4\omega_0^2\eta^2}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

3.2 应用尺度方法求解系统的分岔响应方程

将(16)式、(17)式和(18)式代入(15)式得

$$\frac{4\omega_0^2}{1-\alpha} (1 + \delta_2\alpha^2 + \delta_3\alpha^3 + \dots) \ddot{x}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \cdot \frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \eta \\
 & \times 2\omega_0 \left[1 + \frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right] \dot{x} \\
 & + \left(\omega_0^2 + 2 \cdot \frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \xi \cos \tau \right) \\
 & \times \left[x + \frac{4\omega_0^2\alpha\beta}{\omega_1(1-\alpha)} x^2 + \frac{4\omega_0^2\alpha}{\lambda\omega_1(1-\alpha)} x^3 \right] \\
 & = p_1 \cos \tau_1 + p_2 \cos \tau_2. \quad (25)
 \end{aligned}$$

采用多尺度方法, 设(25)式的解形式为

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \alpha x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (26)$$

其中, $T_0 = t$ 为快变时间尺度, $T_1 = \alpha t$ 为慢变时间尺度, 则有微分算子

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} &= D_0 + \alpha D_1 + \dots \\
 \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\alpha D_0 D_1 + \dots
 \end{aligned}$$

考虑1/2亚谐共振情况, 设 $\omega_0^2 \approx 1$, 比较 α 的各次幂系数

$$\begin{aligned}
 & D_0^2 x_0 + \frac{1}{4}x_0 \\
 &= \frac{1}{4} \left(p_1 \cos \frac{T_0}{3} + p_2 \cos \frac{2T_0}{3} \right), \\
 & D_0^2 x_1 + \frac{1}{4}x_1 \\
 &= \frac{1}{4}x_0 - 2D_0 D_1 x_0 - \frac{2\xi}{\omega_1} x_0 \cos T_0 - \frac{\beta}{\omega_1} x_0^2 \\
 & \quad - \frac{1}{\lambda\omega_1} x_0^3 - \frac{4}{\omega_1} \eta D_0 x_0 \\
 & \quad - \frac{1}{4} \left(p_1 \cos \frac{T_0}{3} + p_2 \cos \frac{2T_0}{3} \right). \quad (27)
 \end{aligned}$$

设上式解的形式

$$\begin{aligned}
 x_0 &= A(T_1) e^{i\frac{T_0}{2}} + \frac{9p_1}{10} e^{i\frac{T_0}{3}} \\
 & \quad - \frac{9}{14} e^{i\frac{2T_0}{3}} + \text{c.c.} \quad (28)
 \end{aligned}$$

将(28)式代入(27)式, 要求解中不出现久期项, 需要令 $e^{i\frac{T_0}{2}}$ 前的系数为0, 得

$$\begin{aligned}
 D_1 A &= -\frac{i}{4}A + \frac{i\xi}{\omega_1} \bar{A} - \frac{2\eta}{\omega_1} A \\
 & \quad + \frac{i}{\lambda\omega_1} \left[3A^2 \bar{A} + 6 \left(\frac{9p_1}{10} \right)^2 A \right. \\
 & \quad \left. + 6 \left(\frac{9p_2}{14} \right)^2 A - 6\bar{A} \cdot \frac{9p_1}{10} \cdot \frac{9p_2}{14} \right]. \quad (29)
 \end{aligned}$$

令 $A = a e^{i\varphi} = a \cos \varphi + a \sin \varphi$, 将其代入(29)式, 并分离实部和虚部

$$\dot{a} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \sin \varphi + \frac{\xi}{\omega_1} \sin \varphi + \frac{1}{\lambda \omega_1} \left[-3a^2 \right. \\
 &\quad \left. - 243 \left(\frac{p_1^2}{50} + \frac{p_2^2}{98} \right) - \frac{243 p_1 p_2}{70} \right] \sin \varphi \\
 &\quad - \frac{2\eta}{\omega_1} \cos \varphi, \\
 &\quad \dot{a} \sin \varphi + a \dot{\varphi} \cos \varphi \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \varphi + \frac{\xi}{\omega_1} \cos \varphi + \frac{1}{\lambda \omega_1} \left[3a^2 \right. \\
 &\quad \left. + 243 \left(\frac{p_1^2}{50} + \frac{p_2^2}{98} \right) + \frac{243 p_1 p_2}{70} \right] \cos \varphi \\
 &\quad - \frac{2\eta}{\omega_1} \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

此时方程的非零解常数值对应系统的稳态周期运动, 令 $\frac{da}{dT_1} = 0, \frac{d\varphi}{dT_1} = 0$ 可求得分岔响应方程为

$$\begin{aligned}
 &9a^4 + 6 \cdot \left[243 \left(\frac{p_1^2}{50} + \frac{p_2^2}{98} \right) - \frac{\lambda \omega_1}{4} \right] a^2 \\
 &+ \left[243 \left(\frac{p_1^2}{50} + \frac{p_2^2}{98} \right) - \frac{\lambda \omega_1}{4} \right]^2 + 4\eta^2 \lambda^2 \\
 &- \left(\lambda - \frac{243 p_1 p_2}{70} \right)^2 = 0. \tag{30}
 \end{aligned}$$

3.3 运用奇异性理论分析分岔响应

(30) 式化成如下形式:

$$a^4 + d_1 a^2 + d_0 = 0, \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{6}{9} \cdot \left[243 \left(\frac{p_1^2}{50} + \frac{p_2^2}{98} \right) - \frac{\lambda \omega_1}{4} \right], \\
 d_0 &= \frac{1}{9} \cdot \left[243 \left(\frac{p_1^2}{50} + \frac{p_2^2}{98} \right) - \frac{\lambda \omega_1}{4} \right]^2 + \frac{4}{9} \eta^2 \lambda^2 \\
 &\quad - \frac{1}{9} \cdot \left(\lambda - \frac{243 p_1 p_2}{70} \right)^2.
 \end{aligned}$$

根据奇异性理论, 做如下讨论:

(i) 当 $d_1 = 0, d_0 \neq 0$ 时, 分岔方程(31)可以写成

$$a^4 - \mu = 0.$$

上述方程的普适开折为

$$G(a, u, \lambda_1, \lambda_2) = a^4 - \mu + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2.$$

上式是GS范式为 $\varepsilon a^4 - \delta \mu = 0$ 的普适开折, 其中 λ_1, λ_2 为开折参数, 奇点为余维二的四次折叠点, 此时系统的平面分岔拓扑结构如下:

1) 分岔点集: $B = \varnothing$ (\varnothing 为空集);

2) 滞后点集: $H = \left\{ \left(\frac{\lambda_1}{8} \right)^2 = - \left(\frac{\lambda_2}{6} \right)^3 \right\}$;

3) 双极限点集: $D = \{ \lambda_1 = 0, \lambda_2 \leq 0 \}$;

4) 转迁集: $\Sigma = B \cup H \cup D$.

图1为取不同开折参数 λ_1, λ_2 时系统的转迁集. 在该图中, 系统的转迁集将平面分成了(I), (II), (III)三个不同的区域. 在不同区域中, 解的拓扑结构是不同的, 但是在同一区域中, 即使分岔参数发生微小变化, 其分岔图也将保持同一拓扑结构, 这样的分岔图保持的; 而在区域边界, 分岔情况为非保持的. 图2为对应不同的参数下系统的分岔拓扑结构图. 其中(I)区不存在幅值的跳跃现象. (II), (III)区中一个 μ 对应于多个 a , 所以此两个区域会出现幅值的跳跃现象.

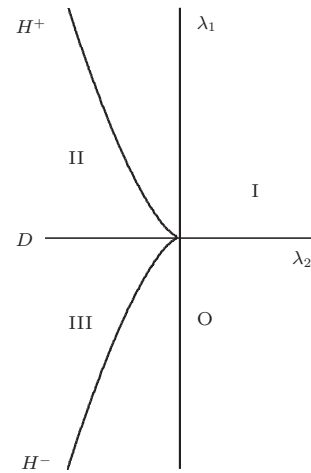


图1 转迁集

(ii) 当 $d_1 \neq 0, d_0 = 0$ 时, 由于 d_1 恒小于0, 分岔方程(31)可以写成

$$a^2 - \mu^2 = 0 \quad (\mu^2 = -d_1) \text{ 或者 } a^2 = 0.$$

上述方程的普适开折为

$$G(a, u, \lambda) = a^2 - \mu^2 + \lambda.$$

上式是GS范式为 $\varepsilon (a^2 - \mu^2) = 0$ 的普适开折, 其中 λ 为开折参数, 奇点为余维一的跨越临界点, 此时系统的平面分岔拓扑结构如下:

1) 分岔点集: $B = \{ \lambda = 0 \}$;

2) 滞后点集: $H = \varnothing$;

3) 双极限点集: $D = \varnothing$ (\varnothing 为空集);

4) 转迁集: $\Sigma = B \cup H \cup D$.

图3为对应不同的参数下系统的分岔拓扑结构图.

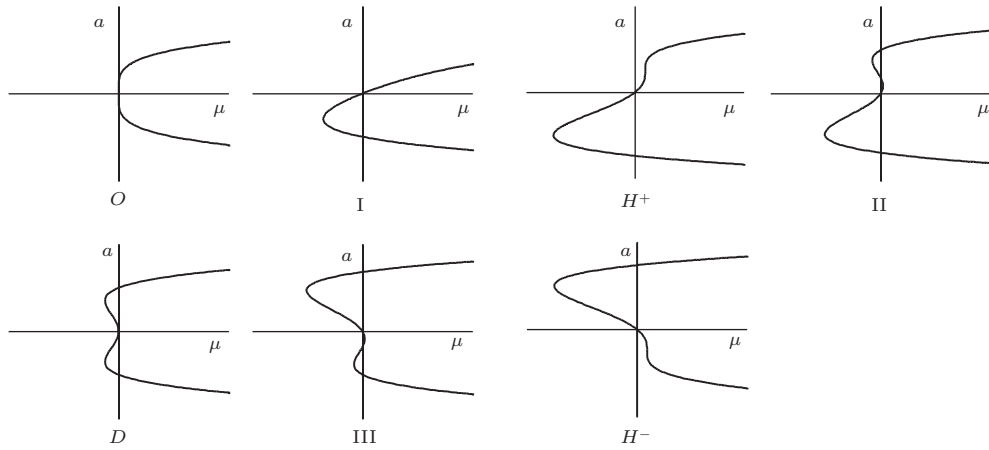


图2 分岔拓扑结构

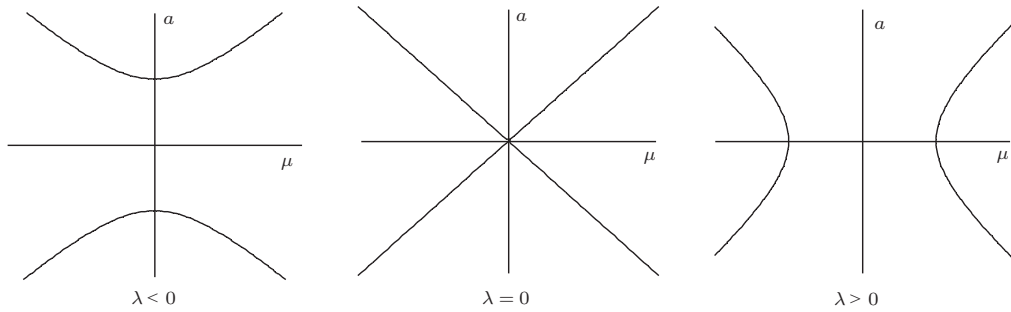


图3 分岔拓扑结构

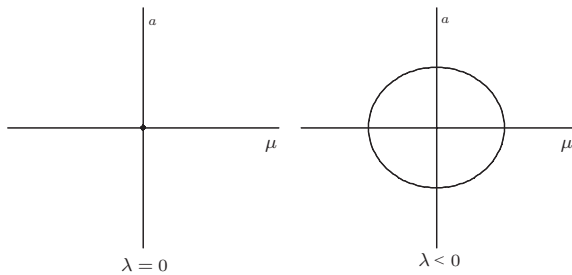


图4 分岔拓扑结构

(iii) 当 $d_1 \neq 0, d_0 \neq 0$ 时, 由于 d_1 恒小于0, 所以 (31) 式变换成

$$\begin{aligned} & a^4 + d_1 a^2 + d_0 \\ &= \left(a^2 - \left(-\frac{d_1}{2} \right) \right)^2 + \left(d_0 - \frac{d_1^2}{4} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

则分岔方程可以写成

$$\tilde{a}^2 + \mu^2 = 0,$$

其中 $\tilde{a} = a^2 - (-d_1/2), \mu^2 = d_0 - d_1^2/4$, 上述方程的普适开折为

$$G(\tilde{a}, u, \lambda) = \tilde{a}^2 + \mu^2 + \lambda.$$

上式是GS范式为 $\varepsilon(\tilde{a}^2 + \mu^2) = 0$ 的普适开折, 其中 λ 为开折参数, 奇点为余维一的孤立点, 此时系统的平面分岔拓扑结构如下:

- 1) 分岔点集: $B = \{\lambda = 0\}$;
- 2) 滞后点集: $H = \varnothing$ (\varnothing 为空集);
- 3) 双极限点集: $D = \varnothing$ (\varnothing 为空集);
- 4) 转迁集: $\Sigma = B \cup H \cup D$.

图4为对应不同的参数下系统的分岔拓扑结构图. 由图4可以得到, 当 $\lambda = 0$ 时, 奇点为孤立点.

4 数值仿真分析

针对 (12) 式的方程, 取 $\omega_0^2 = 1, \Omega_1 = 0.5, \Omega_2 = 1.5, p_1 = p_2 = 2, \delta = 1$, 初值取 (0.6, 0.9), 以下分别研究系统随着系统间隙量和阻尼变化下系统的混沌特性.

4.1 间隙量 e_c 变化时系统的分岔特性和通向混沌的途径

当 $\mu = 1.62$ 时, 系统随着 e_c 变化的分岔图和 Lyapunov 指数分别如图5和图6所示.

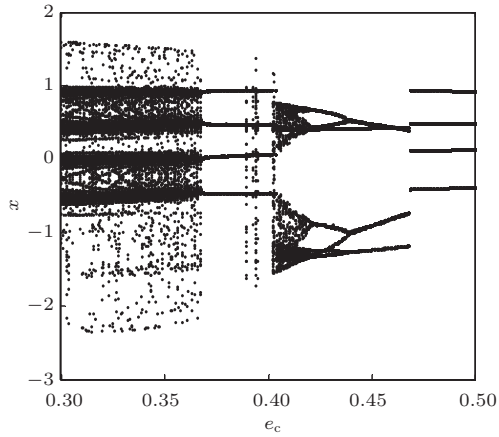


图5 分岔图

由分岔图(图5)和最大Lyapunov指数图(图6)可知, e_c 变化时系统通向混沌的途径为: 混沌运动→阵发性混沌混沌→退化为周期4→阵发性混沌→混沌运动→退化为周期运动. 在图5中, 当 e_c 处于0.3—0.36时, 系统为混沌运动, 此时在

图6中对应的Lyapunov指数大于零. 此后系统产生阵发性混沌, 并伴随着切分岔退化为周期4运动, 如图9的相轨迹和Poincare截面可以看出, 当 e_c 处于0.36—0.4时, 系统处于周期4状态. 当 e_c 处于0.4附近时, 系统再次发生阵发性混沌, 此后系统伴随着倒分岔最终退化为稳定的周期4运动.

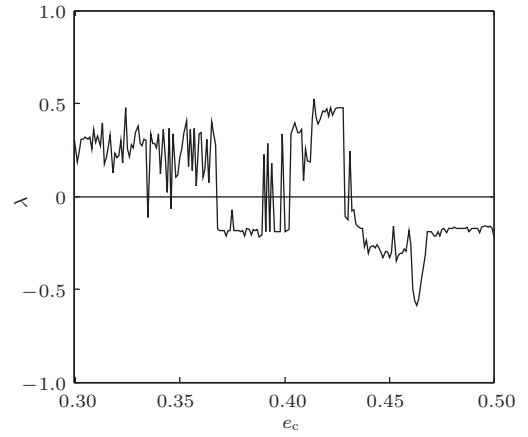


图6 e_c 变化的最大Lyapunov指数

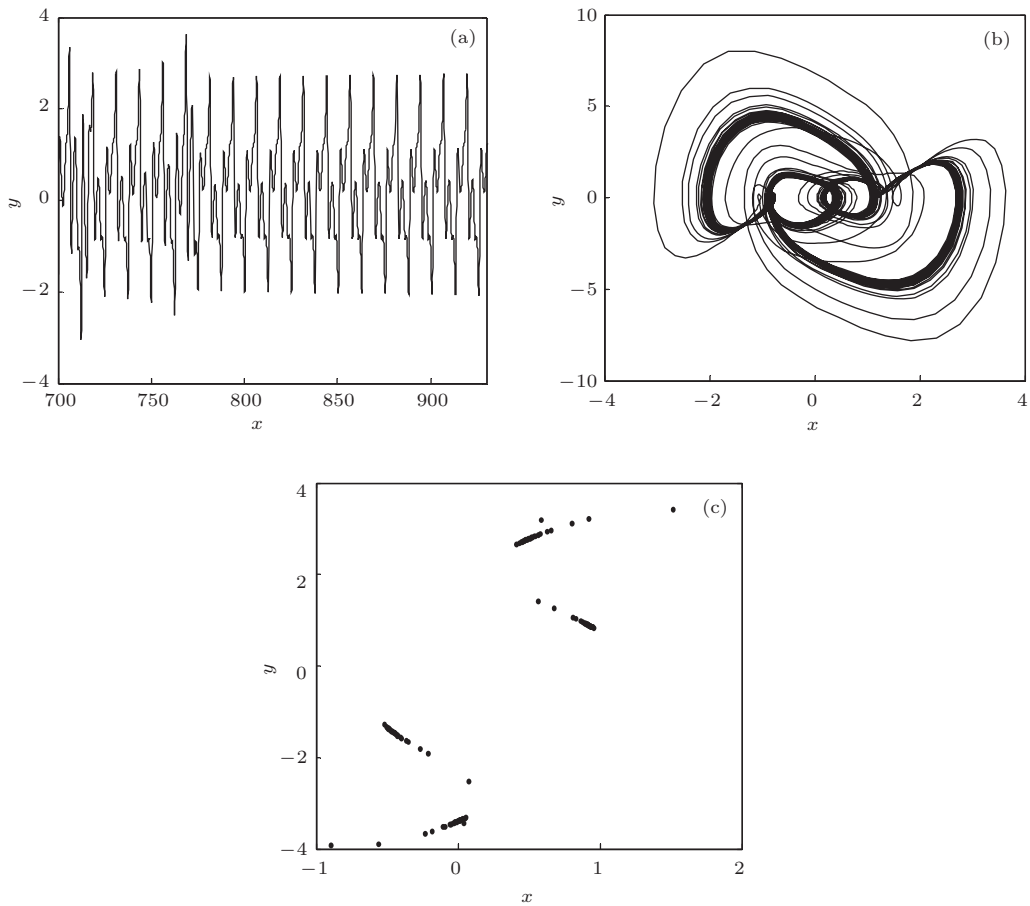


图7 $e_c=0.35$ 时系统的时间历程图、相轨迹和 Poincare 截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincare 截面

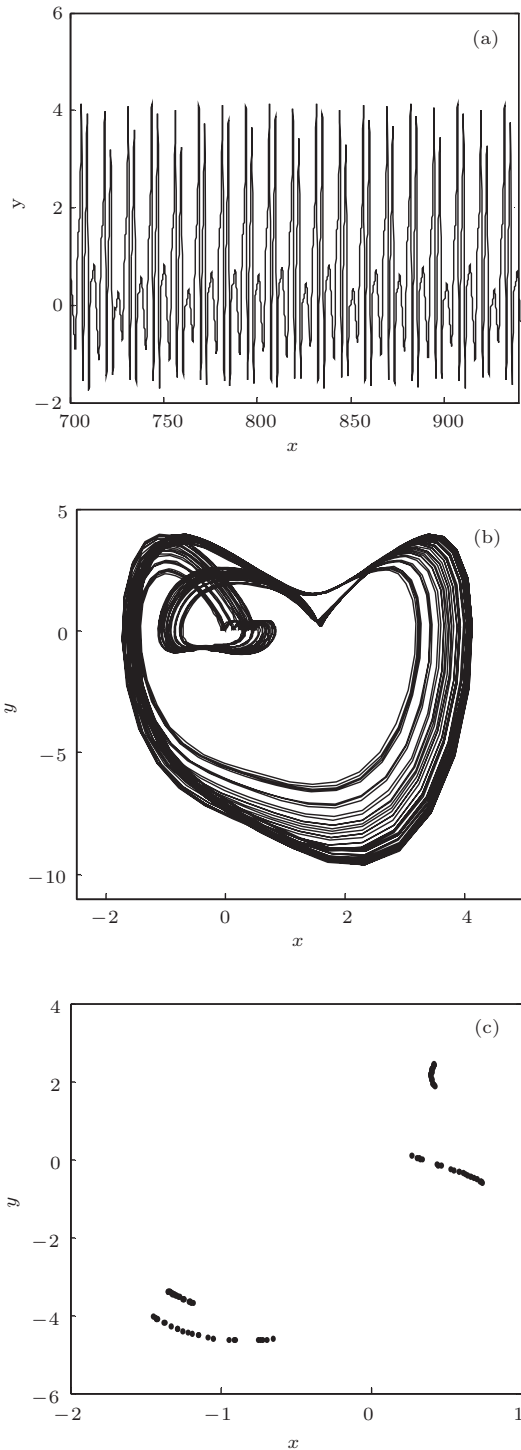


图8 $e_c = 0.41$ 时系统的时间历程图、相轨迹和 Poincare 截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincare 截面

当 $e_c = 0.35$ 和 0.41 时, 图 7 和图 8 分别为系统出现混沌运动的时间历程图、相轨迹和 Poincare 截面, 此时可看出图 7(a)、图 8(a) 中的时间历程图杂乱无章, 图 7(b)、图 8(b) 系统相轨迹互不重叠, 相互缠绕, 图 7(c)、图 8(c) 中的 Poincare 截面反映出系统具有混沌吸引子, 而此时图 6 中对应的 Lyapunov

指数为正, 以上特征说明系统处于混沌状态.

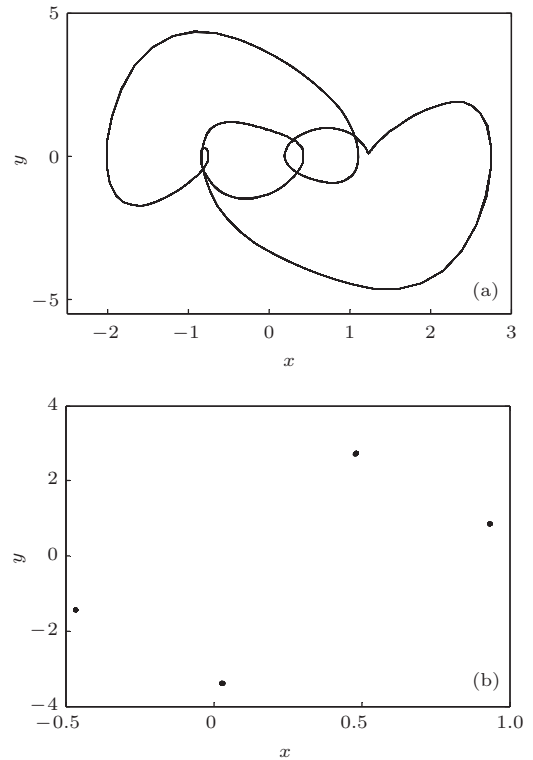


图9 $e_c = 0.37$ 时系统相轨迹和 Poincare 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincare 截面

4.2 阻尼 μ 变化时系统的分岔特性和通向混沌的途径

当 $e_c = 0.1$ 时, 系统随着 μ 变化的分岔图和 Lyapunov 指数分别如图 10 和图 11 所示. 由分岔图 (图 10) 和 Lyapunov 指数 (图 11) 可知, 系统通向混沌的途径为: 混沌 \rightarrow 退化为周期 4 \rightarrow 阵发性混沌 \rightarrow 退化为周期 4.

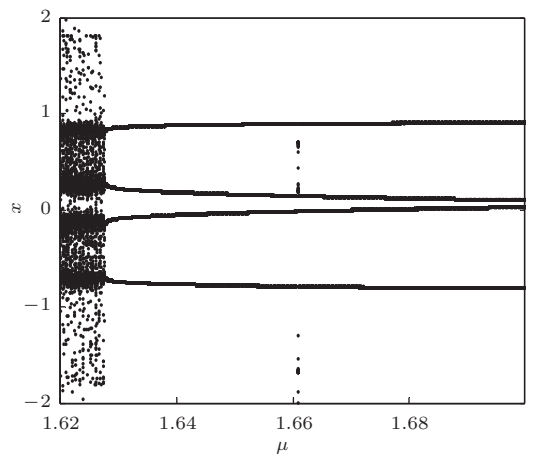


图10 分岔图

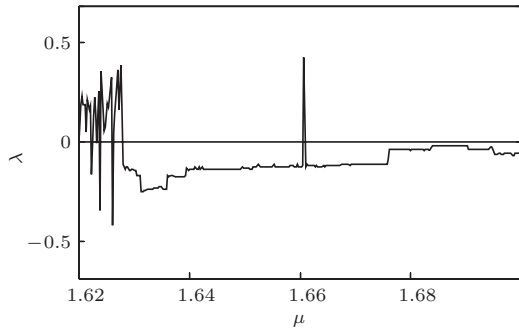


图 11 μ 变化的最大 Lyapunov 指数

当 $\mu = 1.62$ 时, 系统出现混沌运动, 其对应的相轨迹如图 12 (b) 所示, 可以看出此时的相轨迹互不重叠, 相互缠绕, 图 12 (c) 为对应的 Poincare 截面, 可以看出其具有复杂的混沌吸引子, 此时图 11 中对应的 Lyapunov 指数为正, 以上特征说明系统处于混沌状态.

当 $\mu = 1.64$ 时, 根据图 13 相轨迹和 Poincare 截面, 可以看出相轨迹为一条自相交四轨道封闭曲线, 此时系统为周期 4 运动.

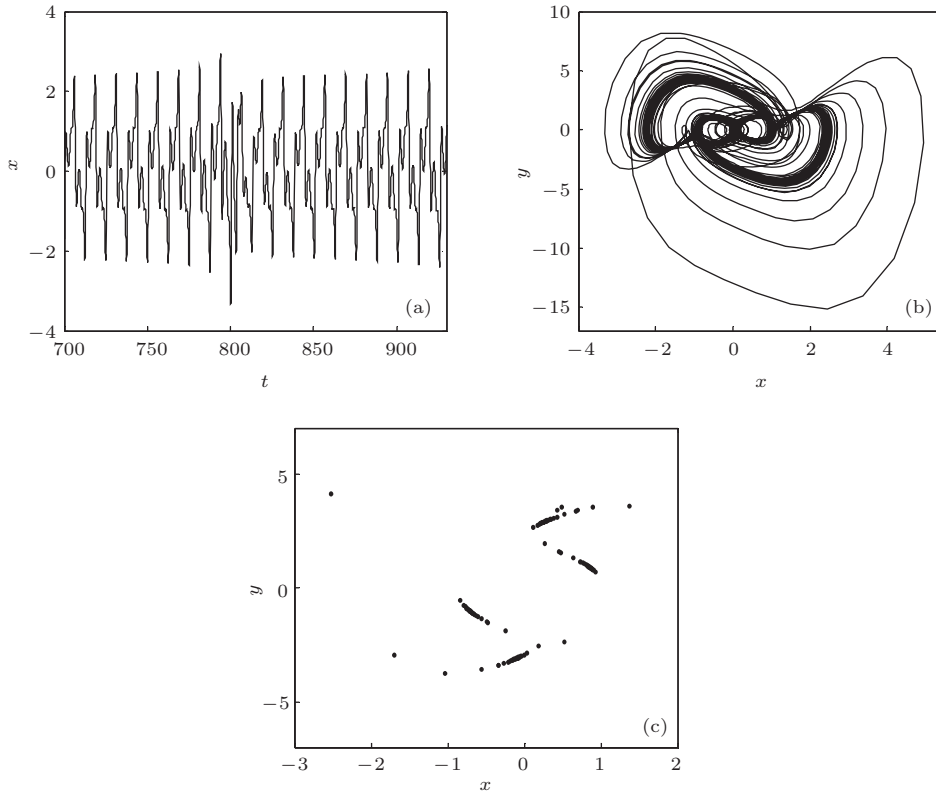


图 12 $\mu = 1.62$ 时系统的时间历程图、相轨迹和 Poincare 截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincare 截面

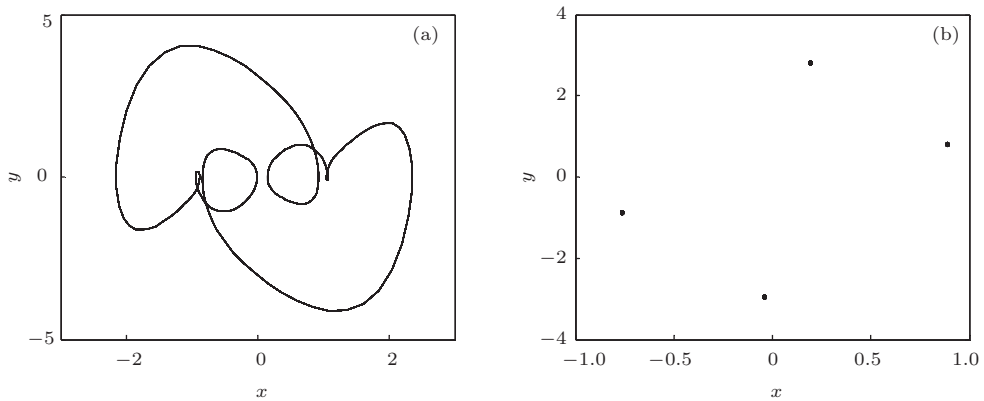


图 13 $\mu = 1.64$ 时系统相轨迹和 Poincare 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincare 截面

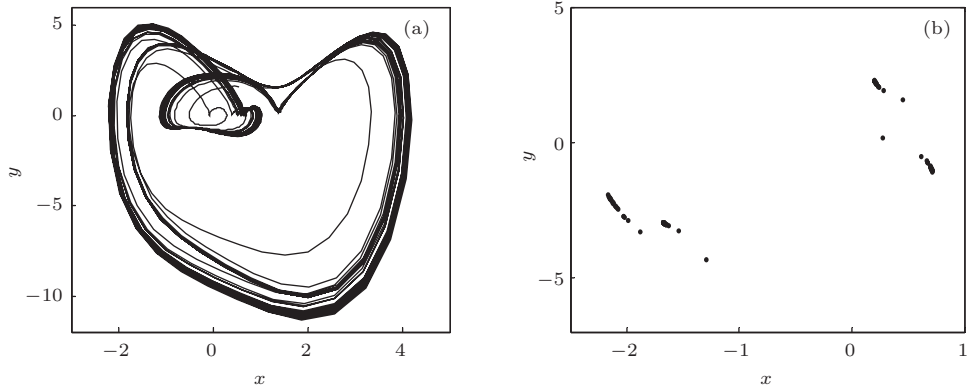


图 14 $\mu = 1.66075$ 时系统相轨迹和 Poincaré 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincaré 截面

根据图 10 分岔图分析得出当 $\mu = 1.66075$ 时, 系统出现了瞬态阵发性混沌, 在这一点处, 对应图 11 最大 Lyapunov 指数出现了大于零的正脉冲, 并且图 14 中相轨迹互不重叠, 相互缠绕, Poincaré 截面具有复杂的混沌吸引子, 综合得出系统在此时出现了瞬态混沌.

5 结 论

本文建立一类具有时变间隙的两质量相对转动系统的强非线性动力学方程, 应用 MLP 方法和多尺度法求解该系统发生 $1/2$ 亚谐共振的分岔响应方程, 采用奇异性理论分析得到系统稳态响应的转迁集, 并且研究系统在非自治情形下的分岔特性以及系统的分岔形态. 并且利用数值仿真分析系统间隙和阻尼参数变化下的分岔和混沌行为, 发现间隙和阻尼幅值的变化可以使系统进入混沌行为, 伴随着幅值的增大, 系统能够出现多次通向混沌的道路, 并且存在倍周期分岔通向混沌和阵发性混沌等显著现象.

参考文献

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** (S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 16 (S1) 154]
- [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [5] Lei Y M, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6 (in Chinese) [雷佑铭, 徐伟 2008 物理学报 **57** 6]
- [6] Huang J C, Jing Zh J 2009 *Chaos Solitons and Fractals* **40** 1449
- [7] Chen S Y, Tang J Y 2008 *J. Sound Vib.* **318** 1109
- [8] Zhang Q C, Wang W, Liu F H 2008 *Chin. Phys. B.* **17** 4123
- [9] Feng J J, Zhang Q C, Wang W 2011 *Chin. Phys. B.* **20** 090202
- [10] Tang J S, Yin X B 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 3 (in Chinese) [唐驾时, 尹小波 1996 力学学报 **28** 3]
- [11] Shi P M, Han D Y, Liu B 2010 *Chin. Phys. B.* **19** 090306
- [12] Li X J, Chen X Q, Yan J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 090202 (in Chinese) [李晓静, 陈绚青, 严静 2013 物理学报 **62** 090202]
- [13] Xu W, Sun ZH K, Yang X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 11 (in Chinese) [徐伟, 孙中奎, 杨晓丽 2005 物理学报 **54** 11]

Bifurcation and chaos of some strongly nonlinear relative rotation system with time-varying clearance*

Liu Bin¹⁾ Zhao Hong-Xu¹⁾ Hou Dong-Xiao^{2)†} Liu Hao-Ran¹⁾

1) (*College of Electrical Engineering, YanShan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2) (*Department of Control Engineering Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 26 October 2013; revised manuscript received 17 December 2013)

Abstract

The dynamic equation for the relative rotation nonlinear dynamic system with time-varying clearance is investigated. Firstly, transformation parameter is deduced by using the method of MLP; the bifurcation response equations of 1/2 harmonic resonance then are generated by the method of multiple scales, while singularity analysis is employed to obtain the transition set of steady motion; further more the bifurcation characteristic and the bifurcation of the system under the situation of non-autonomy are analyzed. Finally, numerical simulation exhibits many different motions, such as periodic motion, period-doubling motion, and chaos. It is shown that the change of clearance and damp parameters may influence the motion state of the system.

Keywords: relatively rotation, time-varying clearance, strongly nonlinear, chaos

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: [10.7498/aps.63.074501](https://doi.org/10.7498/aps.63.074501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51105324), the Natural Foundation of Hebei Province of China (Grant No. E2014501006), Hebei Province Science and Technology support Program (Grant No. 13211907D), and Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. N110323008).

† Corresponding author. E-mail: houdongxiao1982@163.com