

## 二维光栅角度信号响应函数研究\*

鞠在强<sup>1)2)</sup> 王研<sup>1)2)</sup> 鲍园<sup>3)</sup> 李盼云<sup>1)2)</sup> 朱中柱<sup>1)2)</sup> 张凯<sup>1)</sup> 黄万霞<sup>1)</sup>  
袁清习<sup>1)†</sup> 朱佩平<sup>1)‡</sup> 吴自玉<sup>1)3)</sup>

1)(中国科学院高能物理研究所, 北京 100049)

2)(中国科学院大学, 北京 100049)

3)(中国科学技术大学, 国家同步辐射实验室, 合肥 230026)

(2013年10月31日收到; 2013年12月26日收到修改稿)

本文在平行相干光照条件下, 推导出了二维光栅剪切成像系统的角度信号响应函数, 并描绘出了角度响应函数二维曲面. 虽然光栅剪切成像系统常用的分束光栅有四种, 分析光栅有三种, 分析光栅和分束光栅之间还存在多种不同组合, 但是产生的角度信号响应函数曲面却只有三种, 即峰型位移曲面、谷型位移曲面和峰谷对称型位移曲面. 其中峰型位移曲面和谷型位移曲面之间具有数值互补关系, 由此还可以把峰型位移曲面和谷型位移曲面归纳为一种, 最终只需要考虑两种位移曲面. 这个理论结果无疑显著简化了人们对二维光栅剪切成像的认识, 将对今后讨论定量提取二维角度信号的工作奠定基础.

**关键词:** 光栅剪切成像, 相位衬度成像, 位移曲面, 位移曲线

**PACS:** 87.59.-e, 07.60.Ly, 07.85.Qe, 42.30.Rx

**DOI:** 10.7498/aps.63.078701

## 1 引言

X射线相位衬度成像对由碳、氢、氧等轻元素构成的软组织的成像, 可以提供比传统吸收衬度成像高得多的衬度<sup>[1-3]</sup>, 在临床医学、安全检查以及工业检测等领域有着广阔的发展前景. 在多种相衬成像方法中<sup>[4-12]</sup>, 光栅剪切成像是最近几年才发展起来的一种全新的相位衬度成像方法. 相比其他相位衬度成像方法, 其优势不仅在于可以提取样品的吸收、折射和散射信息, 而且在于可以利用普通X射线光源<sup>[9]</sup>, 因而吸引着越来越多科学家的关注.

原理上, 光栅剪切成像属于微分相位衬度成像, 利用光线的偏转角度获得成像衬度, 是一种典型的角信号成像方法. 以往的光栅剪切成像研究多集中在利用一维光栅干涉仪提取样品的角信号, 并发展出了基于一维光栅角信号响应曲

线(位移曲线)的光栅扫描方法<sup>[10,13]</sup>和光栅定位方法<sup>[14-16]</sup>. 然而, 利用一维光栅仅能提取出样品垂直于光栅栅条方向的角度信息, 而无法提取出平行于栅条的角度信息. 为此, 近来有人提出利用二维光栅干涉仪提取样品的二维角信号信息<sup>[17]</sup>.

虽然二维光栅干涉仪的成像原理与一维光栅干涉仪类似, 但是其复杂程度大幅提高. 在一维光栅干涉仪系统中, 分束光栅自成像为一维干涉条纹, 分析光栅周期和自成像条纹周期相等, 当分析光栅相对自成像条纹移动时, 探测器每个像素都可以测得一条周期与分析光栅周期相等的位移曲线, 即本文所说的角信号响应曲线. 而在二维光栅干涉仪系统中, 分束光栅自成像为二维干涉条纹, 分析光栅结构和二维自成像干涉条纹完全相同, 当分析光栅相对自成像二维条纹移动时, 探测器将测得一张周期与分析光栅周期相同的位移曲面, 即本文所说的角信号响应曲面.

\* 国家重点基础研究专项经费(批准号: 2012CB825800)、国家自然科学基金(批准号: 11205189, 11375225, U1332109)和中科院知识创新项目(批准号: KJCX2-YW-N42)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [yuanqx@ihep.ac.cn](mailto:yuanqx@ihep.ac.cn)

‡ 通讯作者. E-mail: [zhupp@ihep.ac.cn](mailto:zhupp@ihep.ac.cn)

为了能够利用二维光栅干涉仪准确提取样品的二维角度信息, 首先应研究清楚二维光栅干涉仪中角度信号响应曲面, 即位移曲面的函数分布, 而这方面的工作目前在国际上鲜有报道. 本文拟在平行相干光照明条件下, 推导出二维光栅位移曲面的数学表达, 并描绘出其曲面形状. 在部分相干光照明条件下, 位移曲面的分布函数将在后续文章中给出.

## 2 位移曲面的推导

本节先简要介绍光栅自成像的原理, 再将常用多种二维相位分束光栅和它们产生的自成像条纹进行归类, 然后分别推导出不同类型自成像条纹对应的位移曲面函数, 描绘出位移曲面图像, 并对沿光强变化剧烈方向的位移曲线进行讨论.

## 3 基本原理

1830年, 泰伯发现用单色平行光垂直照射一维光栅, 在光栅后周期性距离处会出现光栅的像. 这种光栅的自成像效应日后被称为泰伯效应<sup>[18]</sup>.

与一维光栅相同, 二维光栅也存在着自成像效应, 其中振幅型光栅获得整数泰伯效应, 相位型光栅获得分数泰伯效应<sup>[10,19]</sup>. 由于相位型光栅对光强几乎没有衰减, 比振幅型光栅具有更高的光利用

效率, 所以在光栅剪切成像系统中, 多选用相位型光栅作为分束光栅.

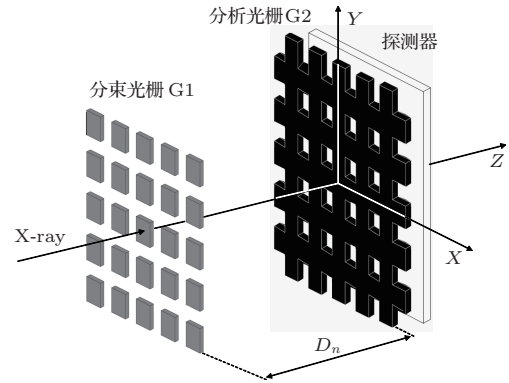


图1 二维光栅干涉仪简图(分束光栅 G1 为相位光栅, 分析光栅 G2 为吸收光栅, 探测器紧贴 G2 放置, G1 与 G2 间距  $D_n$  为分数泰伯距离)

图1为一种二维光栅干涉仪示意图, 它也是一个二维光栅剪切成像系统. 如图所示, 单色平行光垂直照射固定放置的分束光栅 G1, 则在其分数泰伯距离  $D_n$  处将产生自成像条纹(见图2(a)); 分析光栅 G2 为与 G1 自成像周期相同的吸收光栅, 也位于分数泰伯距离  $D_n$  处; 探测器紧贴分析光栅 G2 固定放置. 当分析光栅 G2 在 XY 平面内相对分束光栅位移时, 探测器上每个像素都会测得光强随分析光栅 G2 位移的变化曲面. 这张曲面便是二维光栅剪切成像系统的角度信号响应函数曲面, 为简明起见, 下文统一称作位移曲面.

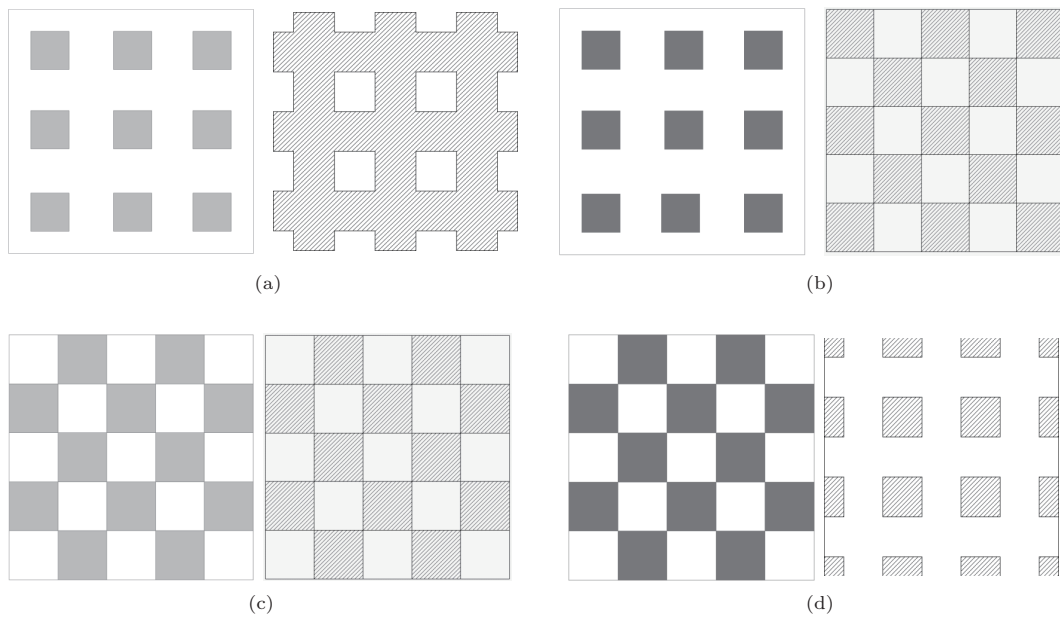


图2 四种常用二维相位分束光栅及其形成的自成像条纹 (a) 网状  $\pi/2$  相位光栅和其产生的占空比为 0.75 的网状亮纹自成像; (b) 网状  $\pi$  相位光栅和其产生的占空比为 0.5 的棋盘状自成像; (c) 棋盘状  $\pi/2$  相位光栅和其产生的占空比为 0.5 的棋盘状自成像; (d) 棋盘状  $\pi$  相位光栅和其产生的占空比为 0.25 的网状暗纹自成像(左侧光栅示意图中白色表无相移, 浅灰色相移  $\pi/2$ , 深灰色为  $\pi$ . 右侧自成像示意图中斜线部分表示亮条纹, 白色部分表示暗条纹)

根据已发表的文献[20], 目前常用的二维相位分束光栅共有四种, 分别为

- 1) 相移  $\pi/2$ 、占空比0.25的网状光栅, 参见图2(a)左图;
- 2) 相移  $\pi$ 、占空比0.25的网状光栅, 参见图2(b)左图;
- 3) 相移  $\pi/2$ 、占空比0.5的棋盘状光栅, 参见图2(c)左图;
- 4) 相移  $\pi$ 、占空比0.5的棋盘状光栅, 参见图2(d)左图.

其中, 占空比的意义为一个周期单元内相移面积与零相移部分面积之比.

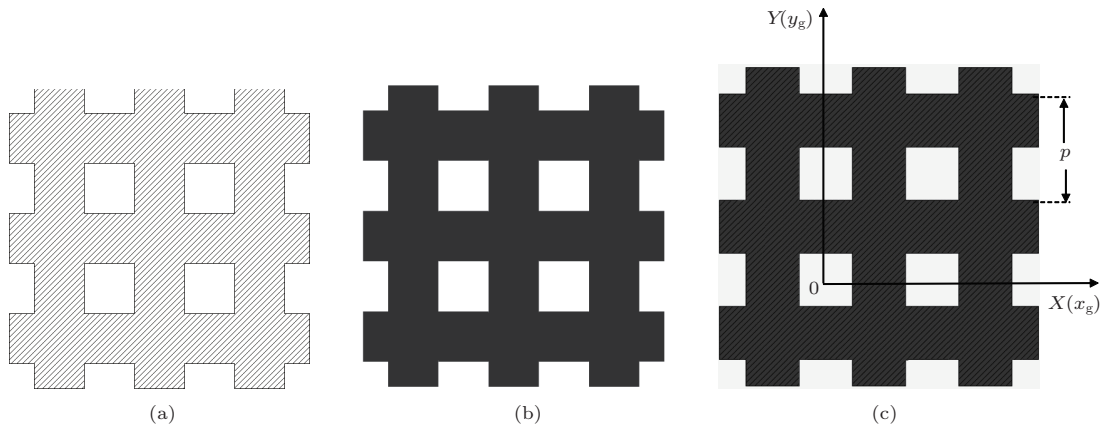


图3 自成像与分析光栅关系示意图 (a) 自成像为网状亮纹; (b) 分析光栅为网状吸收光栅; (c) 分析光栅和自成像相对位移为0时的相互位置(斜线部分表示自成像条纹, 黑色表示分析光栅栅条)

位移曲面由分束光栅和分析光栅之间的相对移动获得. 简明起见, 本文设分束光栅固定, 分析光栅相对分束光栅移动. 于是, 自成像条纹相对探测器是固定不动的. 以自成像的暗纹中心  $O$  为原点建立  $XY$  坐标系, 参见图3. 设  $p$  为自成像条纹周期, 则自成像条纹分布函数为

$$I_s(X, Y) = \begin{cases} 0, & \left( -\frac{p}{4} + \xi p \leq X \leq \frac{p}{4} + \xi p, \right. \\ & \left. -\frac{p}{4} + \eta p \leq Y \leq \frac{p}{4} + \eta p, \right. \\ & \xi, \eta \in Z, \\ I_p, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1)$$

分析光栅  $G_2$  的透过率分布函数为

$$T(X, Y) = \begin{cases} 1, & \left( -\frac{p}{4} + \xi p \leq X \leq \frac{p}{4} + \xi p, \right. \\ & \left. -\frac{p}{4} + \eta p \leq Y \leq \frac{p}{4} + \eta p, \right. \\ & \xi, \eta \in Z, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2)$$

设分析光栅  $G_2$  相对自成像条纹的位移为  $(x_g, y_g)$ ,

四种相位光栅实际上只产生三种自成像条纹: 网状亮纹, 参见图2(a)右图, 网状暗纹, 参见图2(d)右图, 棋盘状条纹, 参见图2(b)和(c)右图. 接下来, 我们将逐一讨论三种自成像条纹对应的位移曲面的数学表达.

### 3.1 网状亮纹的情况

#### 3.1.1 位移曲面函数及图像

当分束光栅  $G_1$  为网状  $\pi/2$  相位光栅时, 自成像为网状亮纹, 相应分析光栅  $G_2$  为结构和网状亮纹相同的网状吸收光栅.

并设当分析光栅  $G_2$  栅条与自成像条纹完全重合时(见图3)相对位移为0. 由于探测器上单个像素的尺寸在十几微米到几十微米之间, 大约为光栅周期的2—10倍, 所以探测器上单个像素测得的光强等于单个光栅周期元内的平均光强, 即

$$I(X, Y, x_g, y_g) = \frac{1}{p^2} \iint_{\substack{X-\frac{p}{4}, X+\frac{3p}{4} \\ Y-\frac{p}{4}, Y+\frac{3p}{4}}} I_s(x, y) \times T(x - x_g, y - y_g) dx dy. \quad (3)$$

因为  $I_s(X, Y)$  和  $T(X, Y)$  为周期相同的周期函数, 所以在任一周期内积分值相等, 与探测器上单个像素的位置选取无关, 可以把上式左边函数中的位置坐标略去, 有

$$I(x_g, y_g) = \frac{1}{p^2} \iint_{\substack{X-\frac{p}{4}, X+\frac{3p}{4} \\ Y-\frac{p}{4}, Y+\frac{3p}{4}}} I_s(x, y) T(x - x_g, y - y_g) dx dy$$

$$= \frac{I_s(x_g, y_g) \otimes T(x_g, y_g)}{p^2}. \quad (4)$$

可见探测器测得的光强是  $I_s(X, Y)$  和  $T(X, Y)$  之间的互相关。

当分析光栅的通光面积被自成像条纹充满时, 单个周期元中的发光面积达到最大, 即  $p^2/4$ , 则探测器测得的最大光强为

$$I_{\max} = I_p/4, \quad (5)$$

设单个周期元中的发光面积为  $A$ , 即图 4(b) 中交叉斜线部分, 则有

$$\begin{aligned} A_s(x_g, y_g) &= \frac{1}{I_p} \iint_{\substack{X-\frac{p}{4}, X+\frac{3p}{4} \\ Y-\frac{p}{4}, Y+\frac{3p}{4}}} I_s(x, y) \\ &\quad \times T(x - x_g, y - y_g) dx dy \\ &= \frac{I_s(x_g, y_g) \otimes T(x_g, y_g)}{I_p}. \end{aligned} \quad (6)$$

将(5)式代入(4)式, 进行归一化处理, 并根据(6)式, 可得单个周期元中发光面积和最大发光面积的比值为

$$\begin{aligned} S_1(x_g, y_g) &= \frac{4}{I_p p^2} \iint_{\substack{X-\frac{p}{4}, X+\frac{3p}{4} \\ Y-\frac{p}{4}, Y+\frac{3p}{4}}} I_s(x, y) \\ &\quad \times T(x - x_g, y - y_g) dx dy \\ &= \frac{4}{p^2} A_s(x_g, y_g), \end{aligned} \quad (7)$$

$S_1(x_g, y_g)$  便是求得的位移曲面。

根据(1)式和(2)式, 可知  $S(x_g, y_g)$  是一个周期和  $I_s(X, Y)$ ,  $T(X, Y)$  相同的函数. 由此可知, 在(7)式中, 对任意位移  $x_g$ , 必存在惟一整数  $n_1$ , 使得  $|x_g - n_1 p| \leq \frac{p}{2}$ ; 同理, 对任意位移  $y_g$ , 必存在惟一整数  $n_2$ , 使得  $|y_g - n_2 p| \leq \frac{p}{2}$ ; 必有

$$A_s(x_g, y_g) = A_s(x_g - n_1 p, y_g - n_2 p). \quad (8)$$

根据图 4 中几何关系, 易得

$$\begin{aligned} A_s &= (|x_g - n_1 p| + |y_g - n_2 p|) \cdot \frac{p}{2} \\ &\quad - |x_g - n_1 p| |y_g - n_2 p|. \end{aligned} \quad (9)$$

则有

$$\begin{aligned} S_1(x_g, y_g) &= \frac{2}{p} \cdot (|x_g - n_1 p| + |y_g - n_2 p|) \\ &\quad - \frac{4|x_g - n_1 p| |y_g - n_2 p|}{p^2}, \\ |x_g - n_1 p| &\leq \frac{p}{2}, \\ |y_g - n_2 p| &\leq \frac{p}{2}, n_1, n_2 \in Z. \end{aligned} \quad (10)$$

上式便是自成像为网状亮纹、分析光栅为网状吸收光栅时, 位移曲面的解析表达式. 根据(10)式, 在图 5 描绘出该位移曲面形状. 因为该位移曲面每个单元都是一个谷, 所以本文命名其为谷型位移曲面。

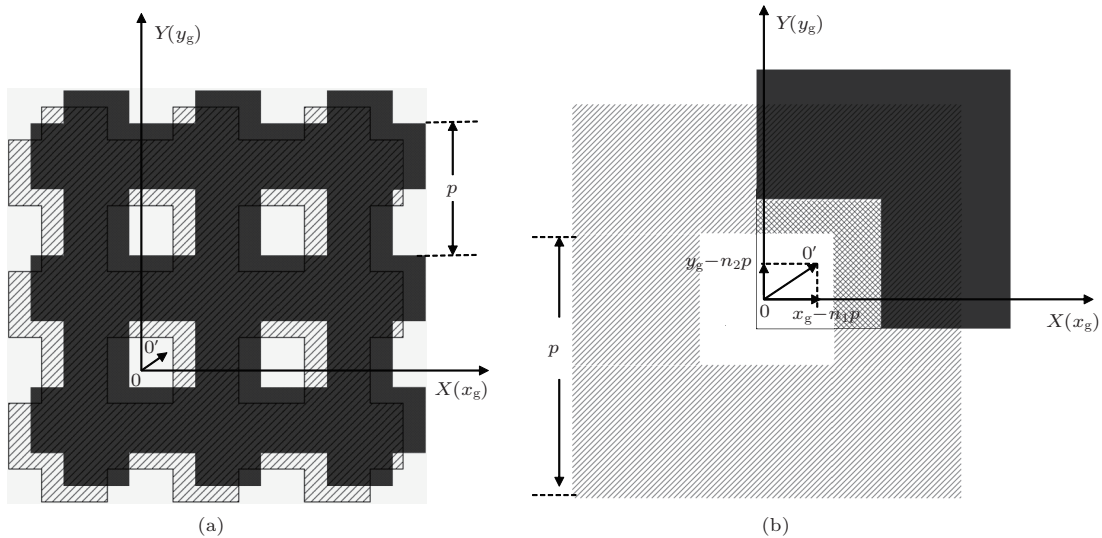


图 4 相对位移为  $(x_g - n_1 p, y_g - n_2 p)$  时自成像条纹与分析光栅位置示意图 (a) 为自成像条纹和分析光栅之间关系示意图, 斜线部分表示自成像条纹, 黑色表示分析光栅 G2, 向量  $00'$  为 G2 相对位移; (b) 为局部放大图, 表示分析光栅任意位移  $(x_g, y_g)$ , 都与分析光栅在单个周期元内的位移  $(x_g - n_1 p, y_g - n_2 p)$  等效. 交叉斜线表示该周期元内实际透光部分

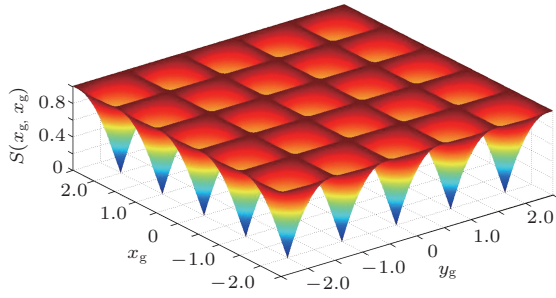


图5 自成像为网状亮纹、分析光栅为网状吸收光栅时的位移曲面

### 3.1.2 位移曲面中的位移曲线

虽然分析光栅位移具有二维自由度,但是在实际应用中,为了将光线的角度偏转转化为光强信

号,分析光栅必须沿着光强变化剧烈的路径进行移动. 参见图6,研究谷型位移曲面的一个单元,可知以谷底为圆心,分析光栅沿着半径方向位移,光强发生剧烈变化,而分析光栅沿着等高线切线方向位移时,光强几乎没有变化. 因此,以谷底为原点,考查分析光栅分别沿 $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ 和 $135^\circ$ 方向位移时,光强随位移的变化规律. 显然,此时位移曲面将简化为各方向上的位移曲线,即角度信号响应曲线.

根据(10)式,以谷底为原点,沿 $0^\circ$ 方向位移时,有

$$S_1(x_g, 0) = \frac{2|x_g|}{p}, \quad |x_g| \leq \frac{p}{2}. \quad (11)$$

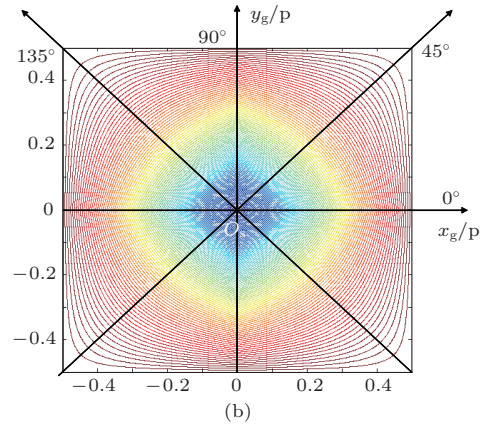
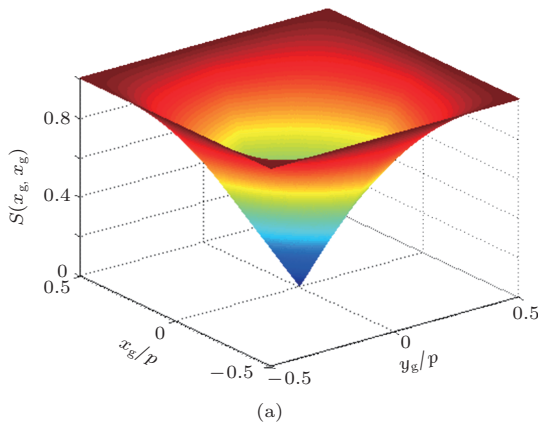


图6 谷型位移曲面单元 (a) 谷型位移曲面单元图像; (b) 谷型位移曲面单元等高线图和位移路径示意图

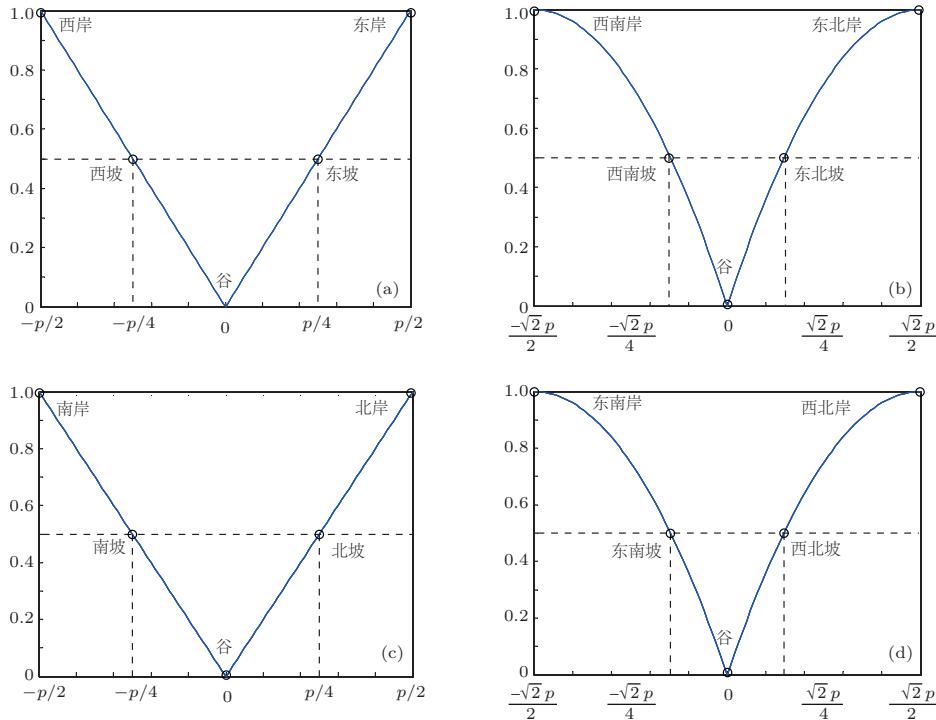


图7 (a) $y_g = 0$ 路径位移曲线; (b) $x_g = y_g$ 路径位移曲线; (c) $x_g = 0$ 路径位移曲线; (d) $x_g = -y_g$ 路径位移曲线.

以谷底为原点, 沿 $90^\circ$ 方向位移时, 有

$$S_1(0, y_g) = \frac{2|y_g|}{p}, |y_g| \leq \frac{p}{2}. \quad (12)$$

以谷底为原点, 沿 $45^\circ$ 和 $135^\circ$ 方向位移时, 有

$$S_1(x_g, y_g) = \frac{2}{p} \cdot (|x_g| + |y_g|) - \frac{4|x_g||y_g|}{p^2},$$

$$|x_g| = |y_g| \leq \frac{p}{2}. \quad (13)$$

在位移方向, 位移长度 $|l| = \sqrt{2}|x_g| \leq \frac{\sqrt{2}p}{2}$ , 周期为 $\sqrt{2}p$ .

设 $x_g$ 方向为东、 $y_g$ 方向为北, 根据(11)式、(12)式和(13)式, 在图7中描绘出上述各位移曲线图像.

### 3.2 网状暗纹的情况

当分束光栅G1为棋盘状 $\pi$ 相位光栅时, 由图2(d)可知, 自成像为网状暗纹, 相应分析光栅G2为结构和网状暗纹相同的网状吸收光栅. 以自成像亮纹中心O为原点建立XY坐标系, 参见图8. 设 $p$ 为自成像条纹周期, 则自成像条纹分布函数为

$$I_s(X, Y) = \begin{cases} I_p, & \left(-\frac{p}{4} + \xi p \leq X \leq \frac{p}{4} + \xi p, -\frac{p}{4} + \eta p \leq Y \leq \frac{p}{4} + \eta p, \xi, \eta \in Z\right), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (14)$$

分析光栅G2的透过率分布函数为

$$T(X, Y) = \begin{cases} 1, & \left(-\frac{p}{4} + \xi p \leq X \leq \frac{p}{4} + \xi p, -\frac{p}{4} + \eta p \leq Y \leq \frac{p}{4} + \eta p, \xi, \eta \in Z\right), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (15)$$

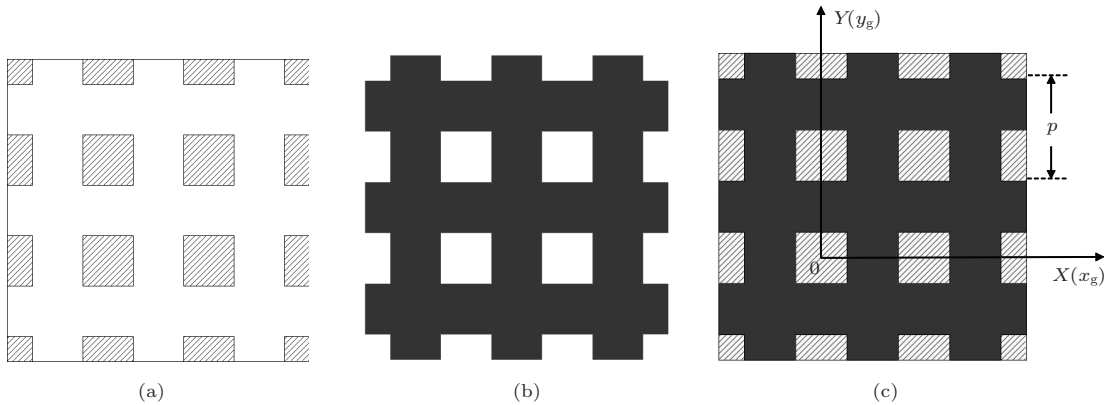


图8 自成像与分析光栅关系示意图 (a) 自成像为网状暗纹; (b) 分析光栅为网状吸收光栅; (c) 分析光栅和自成像相对位移为0时的相互位置(斜线部分表示自成像条纹, 黑色表示分析光栅栅条)

请注意(14)式和(1)式之间为互补关系, 比较图8与图3.

依照2.2节中类似的推导, 自成像为网状暗纹, 分析光栅为网状吸收光栅时, 位移曲面的解析表达式为

$$S_2(x_g, y_g) = \left[1 - \frac{2|x_g - n_1 p|}{p}\right] \left[1 - \frac{2|y_g - n_2 p|}{p}\right],$$

$$|x_g - n_1 p| \leq \frac{p}{2},$$

$$|y_g - n_2 p| \leq \frac{p}{2}, n_1, n_2 \in Z. \quad (16)$$

上式便是自成像为网状暗纹、分析光栅为网状吸收光栅时, 位移曲面的解析表达式. 根据(16)式, 在图9描绘出该位移曲面形状. 因为该位移曲面每

个单元都是一个峰, 所以本文命名其为峰型位移曲面.

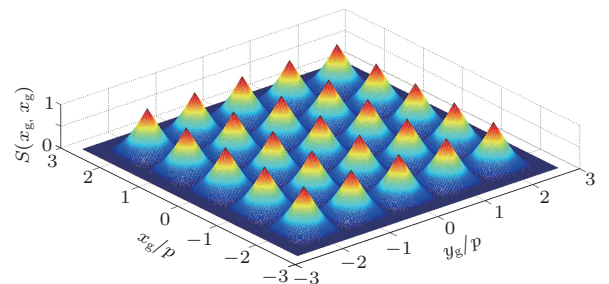


图9 自成像为网状暗纹、分析光栅为网状吸收光栅时的位移曲面

比较(16)式和(10)式, 不难发现两者存在下列关系:

$$S_1(x_g, y_g) = 1 - S_2(x_g, y_g), \quad (17)$$

即两种位移曲面之间存在数值互补关系, 因而使得下面的讨论可以直接借用上节的结果.

参见图 10, 研究峰型位移曲面的一个单元, 可知以峰顶为圆心, 分析光栅沿着半径方向位移, 光强发生剧烈变化, 而分析光栅沿着等高线切线方向位移, 光强几乎没有变化. 因此, 以峰顶为原点, 考查分析光栅分别沿  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  和  $135^\circ$  方向位移时, 有

$$S_2(x_g, 0) = 1 - S_1(x_g, 0) = 1 - \frac{2|x_g|}{p}, \quad |x_g| \leq \frac{p}{2}. \quad (18)$$

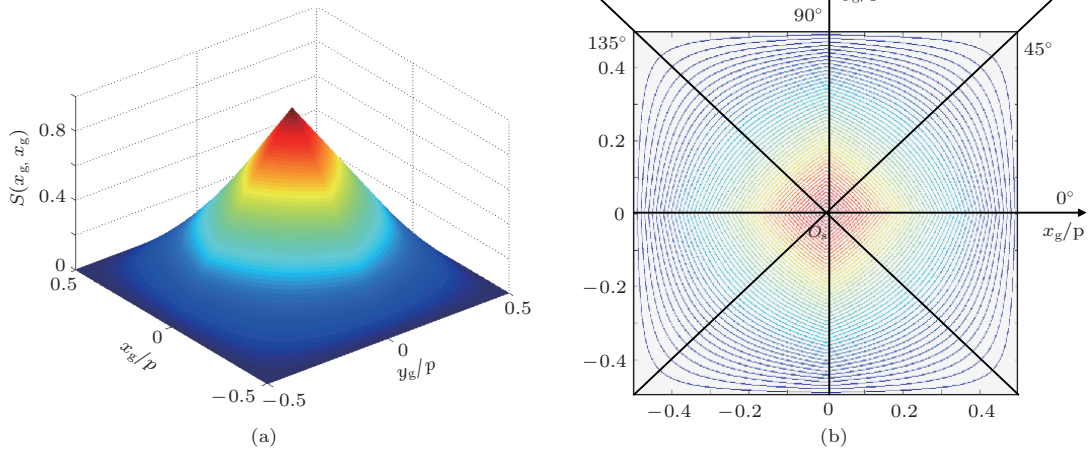


图 10 峰型位移曲面单元 (a) 峰型位移曲面单元图像; (b) 峰型位移曲面单元等高线图和位移路径示意图

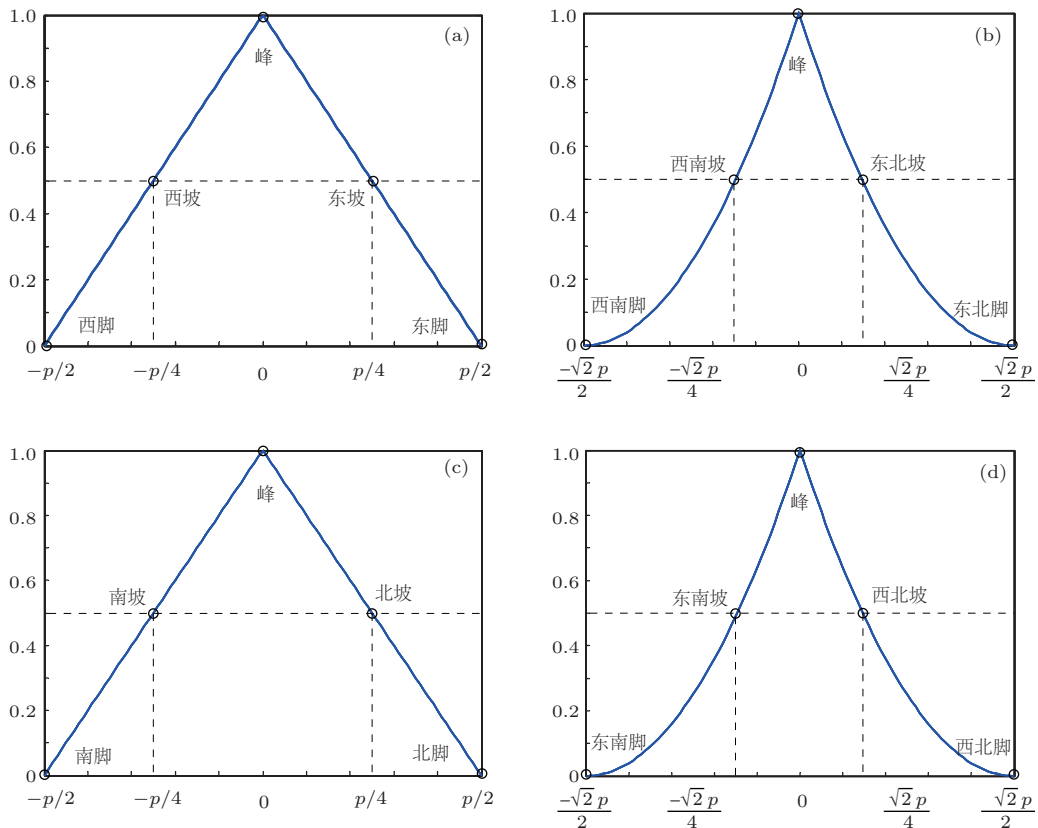


图 11 (a)  $y_g = 0$  路径位移曲线; (b)  $x_g = y_g$  路径位移曲线; (c)  $x_g = 0$  路径位移曲线; (d)  $x_g = -y_g$  路径位移曲线

光强随位移的变化规律. 显然, 此时位移曲面将简化为各方向上的位移曲线, 即角度信号响应曲线.

根据 (17) 式, 以峰顶为原点, 沿  $0^\circ$  方向位移时, 有

以峰顶为原点, 沿  $90^\circ$  方向位移时, 有

$$S_2(0, y_g) = 1 - S_1(0, y_g) = 1 - \frac{2|y_g|}{p},$$

$$|y_g| \leq p/2. \quad (19)$$

以峰顶为原点, 沿  $45^\circ$  和  $135^\circ$  方向位移时, 有

$$S_2(x_g, y_g) = 1 - S_1(x_g, y_g)$$

$$= \left[ 1 - \frac{2|x_g|}{p} \right] \left[ 1 - \frac{2|y_g|}{p} \right],$$

$$|x_g| = |y_g| \leq p/2. \quad (20)$$

在位移方向, 位移长度  $|l| = \sqrt{2}|x_g| \leq \frac{\sqrt{2}p}{2}$ , 周期为  $\sqrt{2}p$ .

仍设  $x_g$  方向为东、 $y_g$  方向为北, 根据 (18) 式、(19) 式和 (20) 式, 在图 11 中描绘出上述各位移曲线图像.

### 3.3 棋盘状条纹的情况

当分束光栅 G1 为网状  $\pi$  或者棋盘状  $\pi/2$  相位光栅时, 由图 2 (b) 和 (c) 可知, 其自成像均为棋盘状条纹, 相应分析光栅 G2 为棋盘状吸收光栅.

以自成像亮纹连接处  $O$  为原点建立  $XY$  坐标系, 参见图 12. 设  $p$  为自成像条纹周期, 则自成像条纹分布函数为

$$I_s(X, Y) = \begin{cases} I_p, & \left(-\frac{p}{2} + \xi p \leq X \leq \frac{p}{2} + \xi p, -\frac{p}{2} + \eta p \leq Y \leq \frac{p}{2} + \eta p, \xi, \eta \in Z\right), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (21)$$

分析光栅 G2 的透过率分布函数为

$$T(X, Y) = \begin{cases} 1, & \left(-\frac{p}{2} + \xi p \leq X \leq \frac{p}{2} + \xi p, -\frac{p}{2} + \eta p \leq Y \leq \frac{p}{2} + \eta p, \xi, \eta \in Z\right), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (22)$$

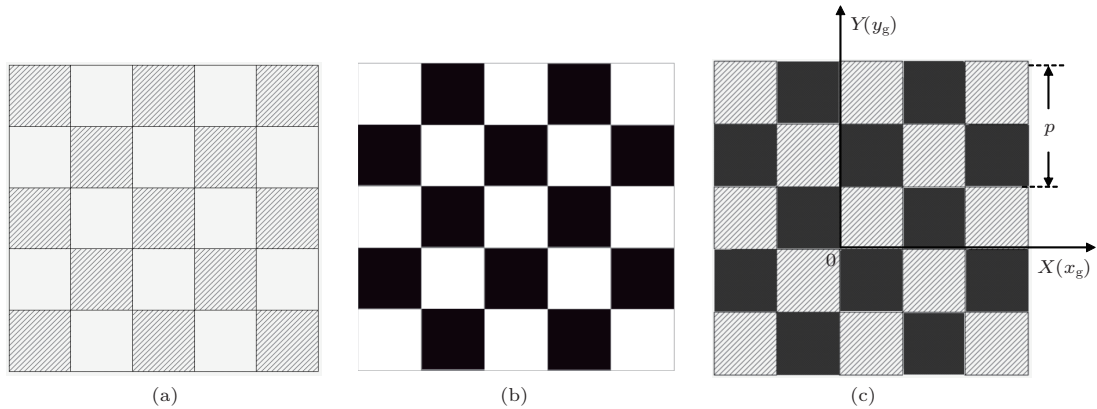


图 12 自成像与分析光栅关系示意图 (a) 自成像为棋盘状亮纹; (b) 分析光栅为棋盘状吸收光栅; (c) 分析光栅和自成像相对位移为 0 时的相互位置 (斜线部分表示自成像条纹, 黑色表示分析光栅栅条)

依照 2.2 节中类似的推导, 自成像为棋盘状条纹, 分析光栅为棋盘状吸收光栅时, 位移曲面的解析表达式为

$$S_3(x_g, y_g)$$

$$= 1 - \frac{2(|x_g - n_1 p| + |y_g - n_2 p|)}{p}$$

$$+ \frac{8|x_g - n_1 p||y_g - n_2 p|}{p^2},$$

$$|x_g - n_1 p| \leq p/2,$$

$$|y_g - n_2 p| \leq p/2, n_1, n_2 \in Z. \quad (23)$$

上式便是自成像为棋盘状条纹、分析光栅为棋盘状吸收光栅时, 位移曲面的解析表达式. 根据 (23) 式,

在图 13 描绘出该位移曲面形状. 因为该位移曲面中, 峰和谷是对称的, 所以本文命名其为峰谷对称型位移曲面.

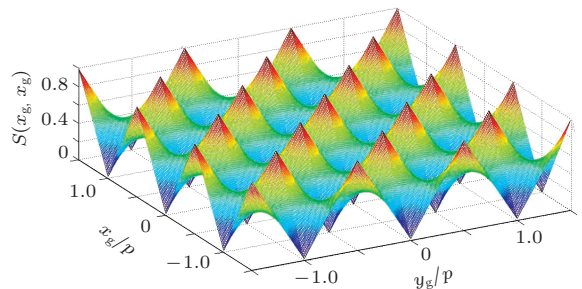


图 13 自成像为棋盘状条纹、分析光栅为棋盘状吸收光栅时的位移曲面



参见图 14, 研究峰谷对称型位移曲面的一个单元, 可知以峰顶为圆心, 分析光栅沿着半径方向位移, 光强发生剧烈变化, 而分析光栅沿着等高线切线方向位移, 光强几乎没有变化. 因此, 以峰顶

为起点, 考查分析光栅分别沿  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  和  $135^\circ$  方向位移时, 光强随位移的变化规律. 显然, 此时位移曲面将简化为各方向上的位移曲线, 即角度信号响应曲线.

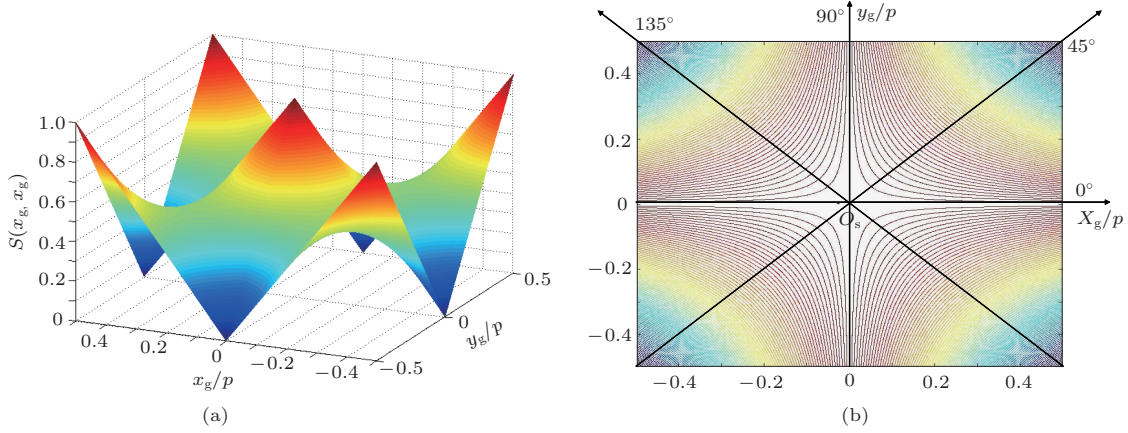


图 14 (a) 棋盘状条纹情况下位移曲面单个周期图像; (b) 该周期位移曲面等高线图以及特殊角度路径示意图

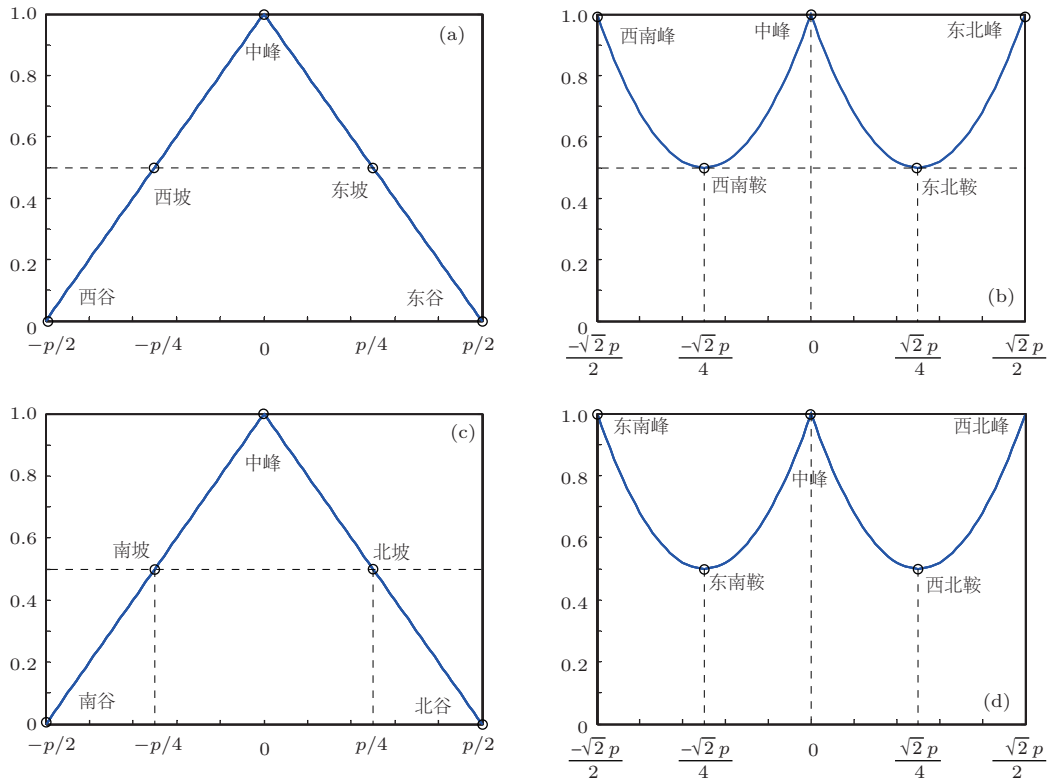


图 15 (a)  $y_g = 0$  路径位移曲线; (b)  $x_g = y_g$  路径位移曲线; (c)  $x_g = 0$  路径位移曲线; (d)  $x_g = -y_g$  路径位移曲线

根据 (23) 式, 以峰顶为原点, 沿  $0^\circ$  方向位移时, 有

$$S_3(x_g, 0) = 1 - \frac{2|x_g|}{p}, \quad |x_g| \leq \frac{p}{2}. \quad (24)$$

以峰顶为原点, 沿  $90^\circ$  方向位移时, 有

$$S_3(0, y_g) = 1 - \frac{2|y_g|}{p}, \quad |y_g| \leq \frac{p}{2}. \quad (25)$$

以峰顶为原点, 沿  $45^\circ$  和  $135^\circ$  方向位移时, 有

$$S_3(x_g, y_g) = 1 - \frac{2(|x_g| + |y_g|)}{p} + \frac{8|x_g||y_g|}{p^2}, \quad |x_g| = |y_g| \leq p/2. \quad (26)$$

在位移方向, 位移长度  $|l| = \sqrt{2}|x_g| \leq \frac{\sqrt{2}p}{2}$ , 周期

为 $\sqrt{2}p$ . 事实上我们可以看到, 在此 $\sqrt{2}p$ 的长度内, 位移曲线由两个完全相同的抛物线组成, 所以函数 $S_3(x_g, y_g)$ 实际周期应为 $\frac{\sqrt{2}p}{2}$ .

设 $x_g$ 方向为东、 $y_g$ 方向为北, 根据(21)式、(22)式和(23)式, 在图15中描绘出上述各位移曲线图像.

## 4 讨论

根据上述讨论, 可以发现, 2.2节的峰型位移曲面和2.3节的谷型位移曲面是黑白反转的. 其原因在于上述两种情形中, 虽然分析光栅都是相同的网状吸收光栅, 但是与之相配的自成像却是互补的, 即网状亮纹和网状暗纹是互补的. 换言之, 相同的分析光栅可以和两种结构互补的自成像相配. 同理, 相同的自成像也可以和两种结构互补的分析光栅相配.

穷尽各种可能性, 在二维光栅剪切成像系统中, 分束光栅可以选择四种结构不同的相位光栅, 即

- 1) 网状 $\pi/2$ 相位光栅, 产生网状亮纹;
- 2) 网状 $\pi$ 相位光栅, 产生棋盘状条纹;
- 3) 棋盘状 $\pi/2$ 相位光栅, 产生棋盘状条纹;
- 4) 棋盘状 $\pi$ 相位光栅, 产生网状暗纹.

分析光栅可以选择三种结构不同的吸收光栅, 即

- 1) 网状吸收光栅, 可以和网状亮纹和网状暗纹相配, 获得峰型位移曲面和谷型位移曲面;
- 2) 网状吸收光栅的互补光栅, 可以和网状亮纹和网状暗纹相配, 获得谷型位移曲面和峰型位移曲面;
- 3) 棋盘状吸收光栅, 和棋盘状条纹相配, 获得峰谷对称型位移曲面.

由此可知, 虽然分束光栅和分析光栅存在如此多的选择和组合, 但是其角度信号响应函数曲面却只有三种类型, 分别为峰型位移曲面、谷型位移曲面和峰谷对称型位移曲面, 其中峰型位移曲面和谷型位移曲面之间具有数值互补关系.

## 5 结论

虽然光栅剪切成像系统常用的分束光栅有四种, 分析光栅有三种, 分析光栅和分束光栅之间还存在多种不同组合, 但是产生的角度信号响应函数

曲面却只有三种, 即峰型位移曲面、谷型位移曲面和峰谷对称型位移曲面. 其中峰型位移曲面和谷型位移曲面之间具有数值互补关系, 根据互补关系, 进一步把峰型位移曲面和谷型位移曲面归纳为一种. 于是最终只需要考虑两种位移曲面就可以了. 这个理论结果无疑显著简化了人们对二维光栅剪切成像的认识, 将为今后讨论定量提取二维角度信号奠定基础.

## 参考文献

- [1] Fitzgerald R 2000 *Phys. Today* **53** 23
- [2] Huang W X, Yuan Q X, Tian Y L, Zhu P P, Jiang X M, Wang J Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 6 (in Chinese) [黄万霞, 袁清习, 田玉莲, 朱佩平, 姜晓明, 王嵩越 2005 物理学报 **54** 6]
- [3] Pfeiffer F, Bech M, Bunk O, Kraft P, Eikenberry E F, Bronnimann C, Grunzweig C, David C 2008 *Nature Materials* **7** 134
- [4] Bonse U, Hart M 1965 *Appl. Phys. Lett.* **6** 155156
- [5] Momose A 1995 *Nucl. Instrum. Meth. A* **352** 622628
- [6] Chapman D, Thomlinson W, Johnston R, Washburn D, Pisano E, Gmur N, Zhong Z, Menk R, Arfelli F, Sayers D 1997 *Phys. Med. Biol.* **42** 2015
- [7] Zhu P P, Yuan Q X, Huang W X, Wang J Y, Shu H, Wu Z Y, Xian D C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1089 (in Chinese) [朱佩平, 袁清习, 黄万霞, 王嵩越, 舒航, 吴白玉, 洗鼎昌 2006 物理学报 **55** 1089]
- [8] Snigirev A, Snigireva I, Kohn V, Kuznetsov S, Schelokov I 1995 *Rev. Sci. Instrum.* **66** 5486
- [9] Pfeiffer F, Weitkamp T, Bunk O, David C 2006 *Nature Physics* **2** 258
- [10] Weitkamp T, Diaz A, David C, Pfeiffer F, Stampanoni M, Cloetens P, Ziegler E 2005 *Optics Express* **13** 6296
- [11] Yang Q, Liu X, Guo J C, Lei Y H, Huang J H, Niu H B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160702 (in Chinese) [杨强, 刘鑫, 郭金川, 雷耀虎, 黄建衡, 牛憨笨 2012 物理学报 **61** 160702]
- [12] Zhu P P, Wu Z Y 2007 *Physics* **36** 443 (in Chinese) [朱佩平, 吴白玉 2007 物理 **36** 443]
- [13] Momose A, Kawamoto S, Koyama I, Hamaishi Y, Takai K, Suzuki Y 2003 *Jpn. J. Appl. Phys.* **42** 866
- [14] Chen B, Zhu P P, Liu Y J, Wang Y, Yuan Q X, Huang W X, Ming H, Wu Z Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1576 (in Chinese) [陈博, 朱佩平, 刘宜晋, 王越, 袁清习, 黄万霞, 明海, 吴白玉 2008 物理学报 **57** 1576]
- [15] Zhu P, Zhang K, Wang Z, Liu Y, Liu X, Wu Z, McDonald S, Marone F, Stampanoni M 2010 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **107** 13576
- [16] Liu X S, Li N R, Zhu P P, Liu Y J, Zhang K, Wang Z L, Hong Y L, Zhang H T, Yuan Q X, Huang W X, Wu Z Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040701
- [17] Zanette I, Weitkamp T, Donath T, Rutishauser S, David C 2010 *Physical Review Letters* **105** 248102

- [18] Lü N G 2006 *Fourier optics* (Beijing: China Machine Press) p90 (in Chinese) [吕乃光 2006 傅里叶光学 (北京: 机械工业出版社) 第90页]
- [19] David C, Weitkamp T, Pfeiffer F, Diaz A, Bruder J, Rohbeck T, Groso A, Bunk O, Stampanoni M, Cloetens P 2007 *Spectrochimica Acta B* **62** 626
- [20] Zanette I, David C, Rutishauser S, Weitkamp T 2010 *X-Ray Optics and Microanalysis: Proceedings of the 20th International Congress Karlsruhe*, Germany, September 15–18, 2009 p73

## Response function of angle signal in two-dimensional grating imaging\*

Ju Zai-Qiang<sup>1)2)</sup> Wang Yan<sup>1)2)</sup> Bao Yuan<sup>3)</sup> Li Pan-Yun<sup>1)2)</sup> Zhu Zhong-Zhu<sup>1)2)</sup>  
 Zhang Kai<sup>1)</sup> Huang Wan-Xia<sup>1)</sup> Yuan Qing-Xi<sup>1)†</sup> Zhu Pei-Ping<sup>1)‡</sup> Wu Zi-Yu<sup>1)3)</sup>

1) (*Institute of high energy physics, Beijing 100049, China*)

2) (*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

3) (*National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

( Received 31 October 2013; revised manuscript received 26 December 2013 )

### Abstract

In this paper, we derive the response function of angle signal in a two-dimensional X-ray grating interferometry system under the condition of parallel coherent light, and depict the surface of the function with Matlab. Although there are four kinds of commonly used beam splitter gratings and three kinds of analyzer gratings, and there are still different compound modes between them, we may find that the ultimate surface of the response function of angle signal can only be of three kinds: the peak type, the valley type, and the peak-valley symmetry type of shifting surfaces. As there is a numerical complementary relationship between the peak type and the valley type of shifting surfaces, we can take the two kinds as one; and finally we only need to consider two kinds of shifting surface. This conclusion simplifies the common understanding of the two-dimensional X-ray grating interferometry method, and lays the foundation for the research of quantitatively extracting the two-dimensional signal in the future.

**Keywords:** two-dimensional X-ray grating interferometry, phase contrast imaging, shifting surface, shifting curve

**PACS:** 87.59.-e, 07.60.Ly, 07.85.Qe, 42.30.Rx

**DOI:** 10.7498/aps.63.078701

\* Project partly supported by the National Basic Research Program of China (Grant No.2012CB825800), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11205189, 11375225, U1332109), and the Knowledge Innovation Program of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KJCX2-YW-N42).

† Corresponding author. E-mail: [yuanqx@ihep.ac.cn](mailto:yuanqx@ihep.ac.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [zhupp@ihep.ac.cn](mailto:zhupp@ihep.ac.cn)