

# 基于Chua电路的四维超混沌忆阻电路\*

杨芳艳<sup>2)</sup> 冷家丽<sup>2)</sup> 李清都<sup>1)2)†</sup>

1)(重庆邮电大学, 工业物联网与网络化控制教育部重点实验室, 重庆 400065)

2)(重庆邮电大学非线性电路与系统研究所, 重庆 400065)

(2013年11月27日收到; 2014年1月24日收到修改稿)

近年来, 忆阻混沌电路受到国内外学者的广泛关注, 然而目前四维忆阻系统往往只存在普通混沌 (仅有一个正 Lyapunov 指数). 本文通过用忆阻替换 Chua 电路中电阻的新途径, 得出一个简单的四维忆阻电路. 与仅含有限个孤立不稳定平衡点的大多已知系统不同, 本系统存在无穷多个稳定和 unstable 平衡点. 研究发现该系统存在着极限环、混沌、超混沌等丰富的复杂行为. 通过进一步数值分析和电路仿真实验, 证实了超混沌吸引子的存在, 从而解决了关于四维忆阻电路是否存在超混沌的疑问.

**关键词:** 混沌, 忆阻器, 超混沌, Chua 电路

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Jn, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.63.080502

## 1 引言

忆阻器 (memristor) 作为一种新型两端口无源器件, 于 1971 年由 Chua<sup>[1]</sup> 首次提出, 并于 2008 年由美国惠普 (HP) 公司研制成功<sup>[2,3]</sup>. 因为其功能无法由现有无源元件网络实现, 所以认为是除电阻、电容、电感之外的第四种基本电路元件. 由于其特有的记忆和非线性特性, 使得忆阻器在人工智能、自旋电子器件、超高密度信息存储、神经形态计算、可编程电路等新兴电子信息技术领域中有潜在的重要应用<sup>[4-9]</sup>.

忆阻器的提出对电路与系统理论的发展有着革命性的推动作用, 因此受到了国内外学者的广泛关注. 借助于简单忆阻电路的建模分析, 人们可以有效地研究磁控忆阻和荷控忆阻及其串并联电路的基本特性<sup>[10-12]</sup>. 为了更好地把握忆阻在电路中的潜在功能, 忆阻电路中的非线性行为 (尤其是混沌行为) 逐渐成为近年来学术界研究的热点<sup>[13-15]</sup>. 通过用不同忆阻器来替换 Chua 电路

中的 Chua 二极管, 得到了一系列的忆阻混沌电路. 例如, Itoh 和 Chua<sup>[16]</sup> 用分段线性忆阻器替换了 Chua 二极管; 包伯成<sup>[17]</sup> 用普通忆阻器和负电导构成的有源忆阻器替换 Chua 二极管; Bao 等<sup>[18,19]</sup> 利用一个磁控忆阻器替换了 Chua 二极管; Muthuswamy 和 Kokate<sup>[20]</sup> 采用含源忆阻器替换 Chua 二极管等. 上述系统替换后, 由于记忆元件增加, 系统状态空间维数均变为四维. 关于四维忆阻混沌电路的研究, 除了上述工作外, 还有 Buscarino 等<sup>[21]</sup> 利用忆阻器设计的一个四维非线性细胞网络, 李志军等<sup>[22]</sup> 通过引用忆阻器设计了一个四维细胞神经网络系统. 虽然上述系统都是四维忆阻系统, 具有四个 Lyapunov 指数, 满足超混沌系统关于维数的必要条件, 但人们在这些系统中却只发现了一个正 Lyapunov 指数. 为了获得具有两个正 Lyapunov 指数的超混沌忆阻电路, 目前的研究都是建立在五维系统的基础之上. 如, 包伯成等<sup>[23]</sup> 设计的含有两个忆阻器的混沌电路, 文献<sup>[24, 25]</sup> 研究的含有忆阻器的五维超混沌系统.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61104150)、重庆市杰出青年科学基金 (批准号: cstc2013jcyj40001) 和重庆市自然科学基金 (批准号: CSTC2012jjB40009) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liqd@cqupt.edu.cn

此外, 还有一些其他五维忆阻电路, 但只能展现普通的混沌行为<sup>[11,12,26]</sup>.

根据理想忆阻的特性, 忆阻系统的平衡点往往分布于忆阻器状态所对应的坐标轴上, 具有无穷不可数个平衡点, 并且各点可能具有不同的稳定性<sup>[13,19]</sup>, 有别于文献中仅含有限个孤立平衡点的大多数非忆阻系统. 因此, 四维忆阻电路是否存在超混沌, 不仅对忆阻功能的认识有参考价值, 而且对混沌系统的研究也有着十分重要的意义. 为此, 本文提出一种简单的四维忆阻电路, 通过理论推导、数值分析和电路仿真, 证实其中存在着超混沌现象, 从而对该问题予以正面回答. 与传统的替换 Chua 二极管的方式不同, 本文采用分段线性忆阻替换 Chua 电路的电阻.

## 2 基于 Chua 电路的忆阻电路模型

已知 Chua 混沌电路如图 1(a) 所示, 其中包含两个电容  $C_1$  和  $C_2$ , 一个内阻为  $R_L$  的电感  $L$ , 一个电阻  $R$ , 以及一个 Chua 二极管 NR (非线性电阻).

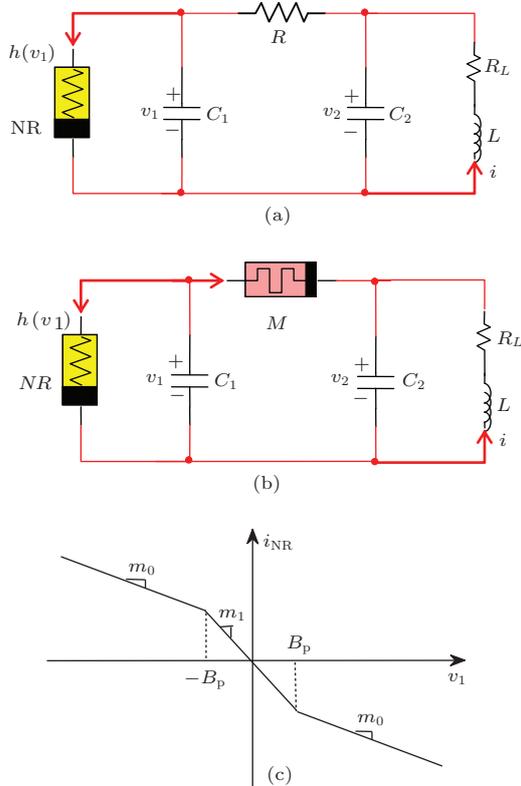


图 1 Chua 电路和新四维忆阻电路

根据基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)方程, 不难推导出原 Chua 电路的系

统方程如下:

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_1 = \frac{v_2 - v_1}{R} - h(v_1), \\ C_2 \dot{v}_2 = \frac{v_1 - v_2}{R} + i, \\ L \dot{i} = -v_2 - R_L i, \end{cases} \quad (1)$$

在这里,  $v_1, v_2$  分别是电容  $C_1, C_2$  两端的电压 (上端为正);  $i$  是从下到上流经电感的电流; Chua 二极管 NR 中从上到下的电流为  $i_{NR} = h(v_1)$ . 式中,  $h(v_1)$  代表的伏安特性通常可表示为一个分段线性函数:

$$i_{NR} = h(v_1) = m_1 v_1 + 0.5(m_0 - m_1) \times (|v_1 + B_p| - |v_1 - B_p|), \quad (2)$$

如图 1(c) 所示, 其中,  $m_0$  和  $m_1$  表示电导,  $B_p$  代表转折点处的电压.

为了得到新的四维忆阻电路, 我们用磁控忆阻  $M$  代替原电路中的电阻  $R$ , 如图 1(b) 所示. 根据 Chua 提出的忆阻模型, 磁控忆阻器可以用  $\phi$ - $q$  平面上的一条通过原点的特性曲线来表征, 其中  $\phi$  代表施加于忆阻上的磁链,  $q$  代表忆阻上蓄积的电荷. 其斜率, 即电荷随磁链的变化率为  $W(\phi) = dq(\phi)/d\phi$ . 因为  $q$  随  $\phi$  单调递增, 所以  $W(\phi)$  不小于 0. 令  $V$  为忆阻两端之间的电压,  $I$  为流过忆阻的电流, 则根据电学基本定律可得  $d\phi = V dt, dq = I dt$ . 显然忆阻的  $V$ - $I$  伏安特性可以描述为  $I = W(\phi) \cdot V$ . 因此,  $W(\phi)$  与电导具有相同的量纲, 所以称为忆导.

由此可知, 忆阻与电阻之间的替换等价于忆阻忆导  $W(\phi)$  与电阻电导  $1/R$  的互换. 因此, 我们将 (1) 式中的  $1/R$  替换为  $W(\phi)$ , 增加磁链变化的方程  $d\phi = (v_2 - v_1) dt$ , 从而得到图 1(b) 中新四维忆阻电路的系统方程如下:

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_1 = W(\phi)(v_2 - v_1) - h(v_1), \\ C_2 \dot{v}_2 = W(\phi)(v_1 - v_2) + i, \\ L \dot{i} = -v_2 - R_L i, \\ \dot{\phi} = v_2 - v_1. \end{cases} \quad (3)$$

下面, 我们用一个非负分段线性的函数来描述忆导方程:

$$W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d(\phi)} = \frac{a}{2b} (|\phi + b| - |\phi - b|), \quad (4)$$

式中  $a, b$  是大于零的待定参数. 不难看出,  $W(\phi)$  是一条“V”形折线. 如图 2 所示,  $a$  代表折线限

幅高度,  $b$  代表转折点的位置,  $\pm a/b$  代表“V”形部分的斜率. 我们知道, HP 忆阻属于荷控忆阻, 这里  $M$  是磁控忆阻, 因此 HP 模型在这里并不适用. 实际物理量都应该有界, 考虑到 HP 忆阻的阻值介于  $R_{on}$  和  $R_{off}$  之间, 所以我们选用有界分段线性函数(4)式, 取代文献中广泛使用的忆阻模型  $W(\phi) = a + b\phi^2$ .

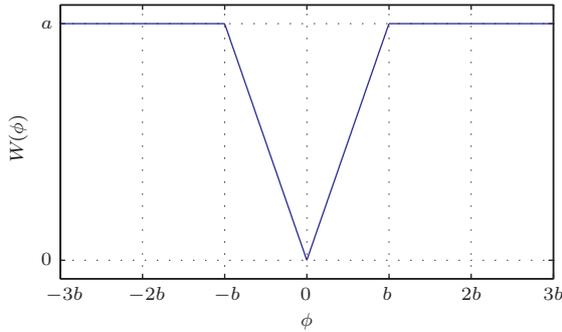


图2 忆导  $W(\phi)$  标示的分段线性函数

为了从(3)式得出无量纲的动力系统方程, 我们首先通过增加乘数因子的方式, 由(3)式导出下式:

$$\begin{cases} RC_2 \frac{C_1}{C_2} \frac{\dot{v}_1}{B_p} = RW(\phi) \left( \frac{v_2}{B_p} - \frac{v_1}{B_p} \right) - R \frac{h(v_1)}{B_p}, \\ RC_2 \frac{\dot{v}_2}{B_p} = RW(\phi) \left( \frac{v_1}{B_p} - \frac{v_2}{B_p} \right) + \frac{Ri}{B_p}, \\ RC_2 \frac{Ri}{B_p} = -\frac{R^2 C_2}{L} \frac{v_2}{B_p} - \frac{RC_2 R_L}{L} \frac{Ri}{B_p}, \\ RC_2 \frac{\dot{\phi}}{RC_2 B_p} = \frac{v_2}{B_p} - \frac{v_1}{B_p}, \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $R$  代表待定参考电阻,  $\tau_0 = RC_2$  为新系统的时间常数. 通过时间和状态空间的尺度缩放, 可得无量纲时间  $\tau = \frac{t}{\tau_0}$ , 无量纲状态  $x = \frac{v_1}{B_p}$ ,  $y = \frac{v_2}{B_p}$ ,  $z = \frac{Ri}{B_p}$  和  $w = \frac{\phi}{RC_2 B_p}$ . 令  $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$ ,  $\beta = \frac{R\tau_0}{L}$  和  $\gamma = \frac{R_L \tau_0}{L}$  为无量纲参数, 则系统(5)式可简化为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha[\bar{W}(w)(y-x) - \bar{h}(x)], \\ \dot{y} = \bar{W}(w)(x-y) + z, \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \\ \dot{w} = y - x, \end{cases} \quad (6)$$

上式中, Chua 二极管的无量纲伏安特性  $\bar{h}(x)$  为

$$\bar{h}(x) = R \frac{h(v_1)}{B_p}$$

$$= \bar{m}_1 x + 0.5(\bar{m}_0 - \bar{m}_1) \times (|x+1| - |x-1|), \quad (7)$$

其中,  $\bar{m}_0 = Rm_0$  和  $\bar{m}_1 = Rm_1$  为无量纲斜率. 因为  $a, b$  为待定参数, 为简单起见, (6) 式中的无量纲忆导  $\bar{W}(w) = RW(\phi)$  仍然采用(4)式的形式:

$$\bar{W}(w) = \frac{a}{2b} (|(w+b)| - |(w-b)|). \quad (8)$$

下面, 我们通过无量纲方程(6)—(8), 研究系统的结构和复杂动力学行为.

### 3 系统的动力学分析

由(6)式可知, 当  $x = y = z = 0$  时, 不管  $w$  取何值, 我们都有  $\dot{w} \equiv 0$ . 因此,  $w$  坐标轴上的任意点, 都是平衡点, 即

$$O = \{(x, y, z, w) | x = y = z = 0, w = c \in \mathbb{R}\},$$

这与传统的只有有限个孤立平衡点的系统明显不同. 为考查平衡点的稳定性, 我们需要分析系统雅克比矩阵

$$J_O = \begin{bmatrix} \alpha(\bar{W}(c) + \bar{m}_0) & \alpha\bar{W}(c) & 0 & 0 \\ \bar{W}(c) & -\bar{W}(c) & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在平衡点  $O$  处的特征值. 显然  $J_O$  的一个特征值为 0, 其特征向量正好为  $w$  坐标轴方向. 由于  $J_O$  是  $c$  的函数, 其他三个特征值会随  $c$  改变, 因此不同平衡点的稳定性可能不同.

为了便于求解, 我们选择如下参数:  $\alpha = 30$ ,  $\beta = 36$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $m_0 = -0.5$ ,  $m_1 = -0.1$ ,  $a = 2.5$ ,  $b = 3.5$ . 由于  $\bar{W}(c)$  是一个分段线性的函数,  $c$  的取值可以分为两部分:

$$W(c) = \frac{a}{2b} (|c+b| - |c-b|) = \begin{cases} \frac{a}{b}|c| & (|c| < b) \\ a & (|c| \geq b) \end{cases}$$

1) 当  $|c| \geq b = 3.5$  时,  $\bar{W}(c) = a = 2.5$  为常数, 并将其代入雅克比矩阵  $J_O$ , 可得特征根为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -60.2153, \\ \lambda_{3,4} = 0.3077 \pm 5.8231i,$$

显然,  $\lambda_{3,4}$  的实部大于0, 这时系统的平衡点集不稳定.

2) 当  $-3.5 < c < 3.5$  时, 特征根解析表达式非常复杂, 我们通过数值计算来分析随  $c$  的变化平衡点集的稳定性, 得出其变化规律如图4所示.  $\lambda_2$  在  $c = 0$  时达到最大值, 随着  $|c|$  增大而减小, 在  $|c| \approx 0.700974$  时变为负数.  $\lambda_{3,4}$  为一对共轭复数, 在  $|c| \approx 0.80912$  变为负数. 因此, 在  $0.700974 < |c| < 0.80912$  时, 系统除  $\lambda_1 = 0$  外, 其他三个特征值实部均小于0, 所以平衡点稳定.

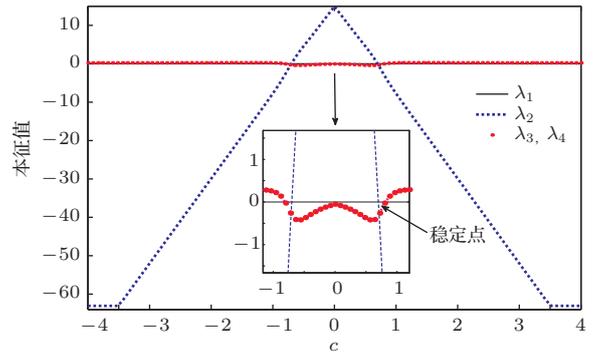


图3 (网刊彩色) 平衡点特征值随  $c$  的变化关系

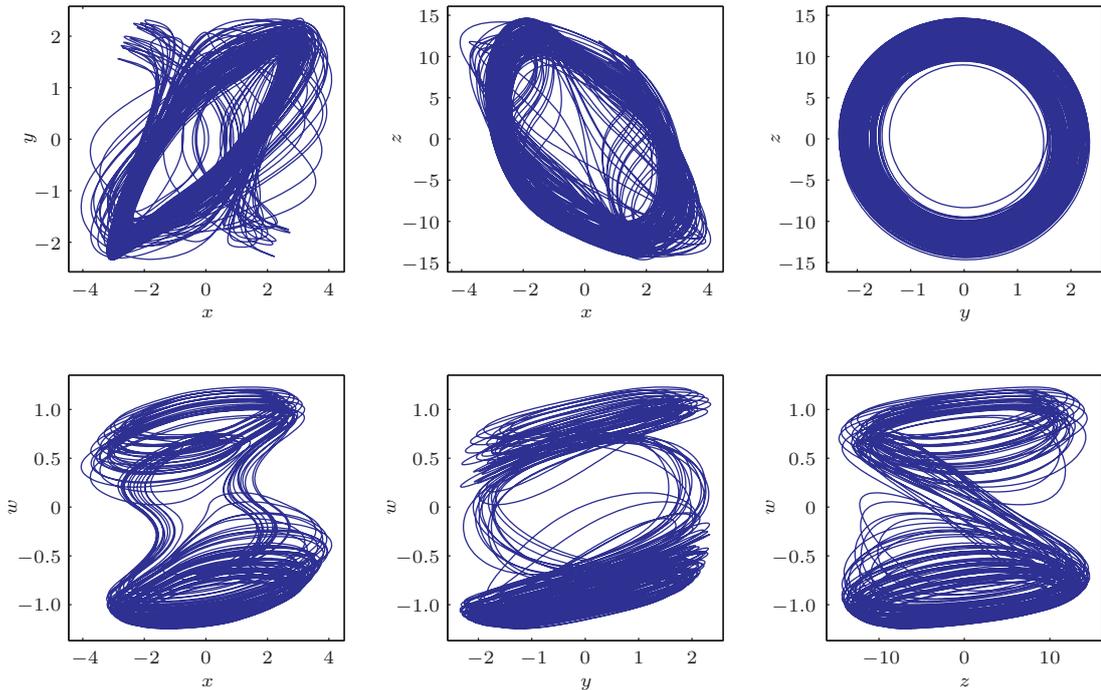


图4 系统的超混沌吸引子的相图

尽管系统具有无穷多个稳定的平衡点, 但是我们却发现该系统存在一个超混沌吸引子, 其相图如图4所示. 这里初始条件为  $x(0) = 0, y(0) = 0.01, z(0) = 0.01, w(0) = 0$ . 算得 Lyapunov 指数为  $0.317, 0.063, 0.001, -11.90$ . 显然, 前两个大于0, 第三个在误差容许范围内等于0, 最后一个小于0. 因此, 该吸引子确实超混沌. 其 Lyapunov 维数  $D_L$  可以根据下式计算:

$$D_L = j + \frac{1}{|L_{j+1}|} \sum_{i=1}^j L_i,$$

式中,  $j$  为满足  $\sum_{i=1}^j L_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^{j+1} L_i < 0$  的最大整数. 显然,  $j$  在这里等于3, 因此  $D_L \approx 3.032$ .  $D_L > 3$  意味着吸引子有着复杂的分形结构. 若令

$P = \{(x, y, z, w) | y = 0, \dot{y} = 0\}$  为 Poincaré 截面, 那么可以定义系统 (7) 在该截面上的首次回归映射为 Poincaré 映射, 从而将四维状态空间降低为3维. 算得的3维映射的吸引子如图5所示, 可以看出, 由于存在二维拉伸, 吸引子上的状态点散布于状态空间中.

为了便于电路实现, 需要进一步研究当参数改变时吸引子的变化规律. 由于在电路实现时, 电感内阻误差较大, 下面着重分析  $\gamma$  变化时对吸引子的影响. 令  $\gamma$  的变化范围为  $[0, 0.25]$ , 我们首先计算 Lyapunov 指数与  $\gamma$  的关系, 把握吸引子的类型, 然后用 Poincaré 映射计算分岔图, 了解吸引子的细节信息. 得到的 Lyapunov 指数和分岔图分别如

图6和7所示.

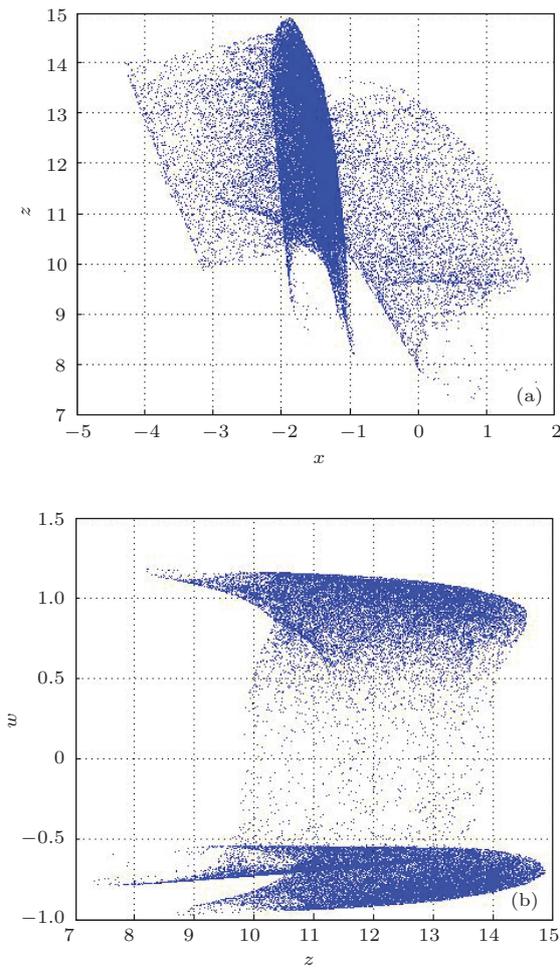


图5 系统 Poincaré 映射的超混沌吸引子

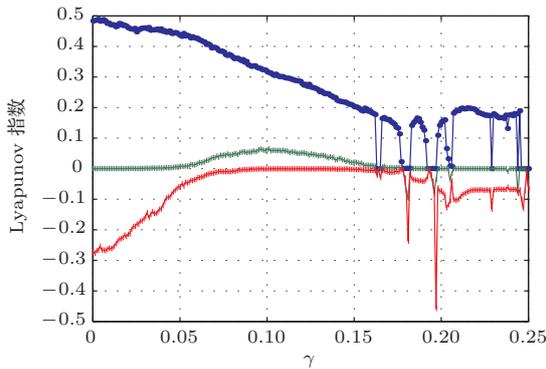


图6 (网刊彩色) 系统随 $\gamma$ 变化的前三个 Lyapunov 指数谱

通过比较,可以看出两个图所描述的系统行为基本一致.当电感没有内阻时, $\gamma = 0$ ,系统只有一个 Lyapunov 指数为正,因此处于普通混沌状态.随着内阻的增大,吸引子的第三个 Lyapunov 指数逐步增大.在 $\gamma$ 超过0.05后,第二和第三个 Lyapunov 指数都开始增加,开始从普通混沌到超混沌的转

变过程.在 $\gamma \approx 0.073$ 时,第二个 Lyapunov 指数转变为正数,第三个 Lyapunov 指数增大至0.然后,系统一致保持超混沌状态,直到 $\gamma \approx 0.162$ .之后,系统收敛到稳定的平衡点.例如 $\gamma \approx 0.164$ ,由于平衡点的最大特征值为0,所以观测到1个为0的 Lyapunov 指数.随着 $\gamma$ 的继续增加,系统间歇性地出现混沌、极限环等丰富的非线性行为与稳定平衡点共存的现象.

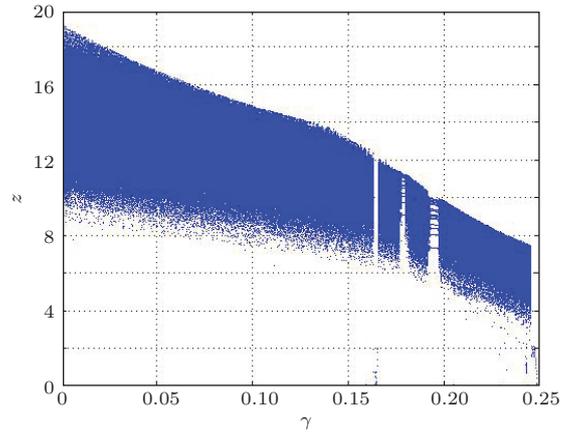


图7 系统随 $\gamma$ 变化的分岔图

#### 4 忆阻电路设计与系统仿真

为了实现第2节给出的忆阻超混沌电路,本节中讨论该电路的设计.由于 Chua 电路已被人们所熟知,因此本文的难题在于设计出满足图2特性的忆阻器.

为此,我们采用有源电路模拟的方式进行设计.由于 Chua 二极管也是一个有源电路,为确保这两个有源电路正常工作,需要使其具有共同的地线.根据串联电路的特点,将图1(b)中的忆阻移动到下面 $C_1$ 和 $C_2$ 之间,如图8所示.

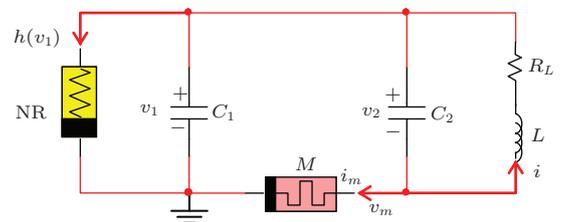


图8 四维忆阻电路的等价电路

为实现忆阻功能,我们引入电阻 $R_m$ ,如图9(a)所示,其一端作为忆阻输入端,端电压 $v_m = v_1 - v_2$ ,另一端控制产生电压 $v_o$ 使 $R_m$ 输

入端电流等于忆阻电流  $i_m$ . 对比 (6) 式, 不难得出

$$i_m = \frac{\bar{W}(w)}{R} v_m = \frac{v_m - v_o}{R_m},$$

简单起见, 取  $R_m = R$ , 于是有

$$v_o = v_m - \bar{W}(w)v_m.$$

现用积分器电容电压  $v_w = wB_p$  来模拟磁链状态, 即代替 (6) 式中状态  $\phi/(RC_2)$ , 则 (6) 式中最后一个方程变为

$$RC_2 \dot{v}_\phi = v_2 - v_1,$$

该方程可以用运算放大器的反积分电路实现. 利用积分器的输出  $v_\phi$ , 经过限幅、绝对值电路, 即可产生如下电压 (单位为 V)

$$\bar{W}(w) \cdot 10 = \bar{W}(v_w/B_p) \cdot 10$$

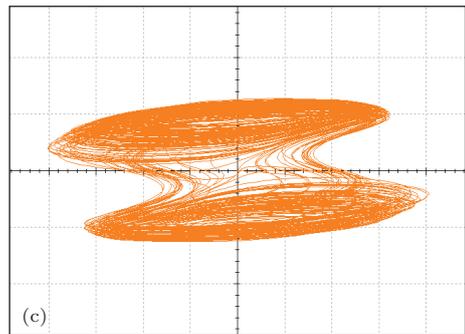
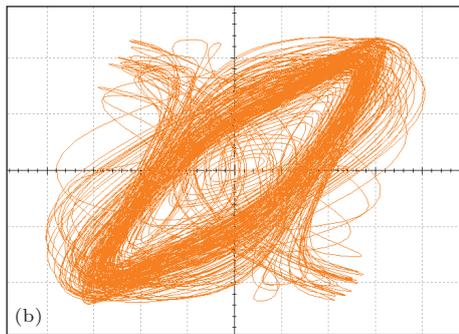
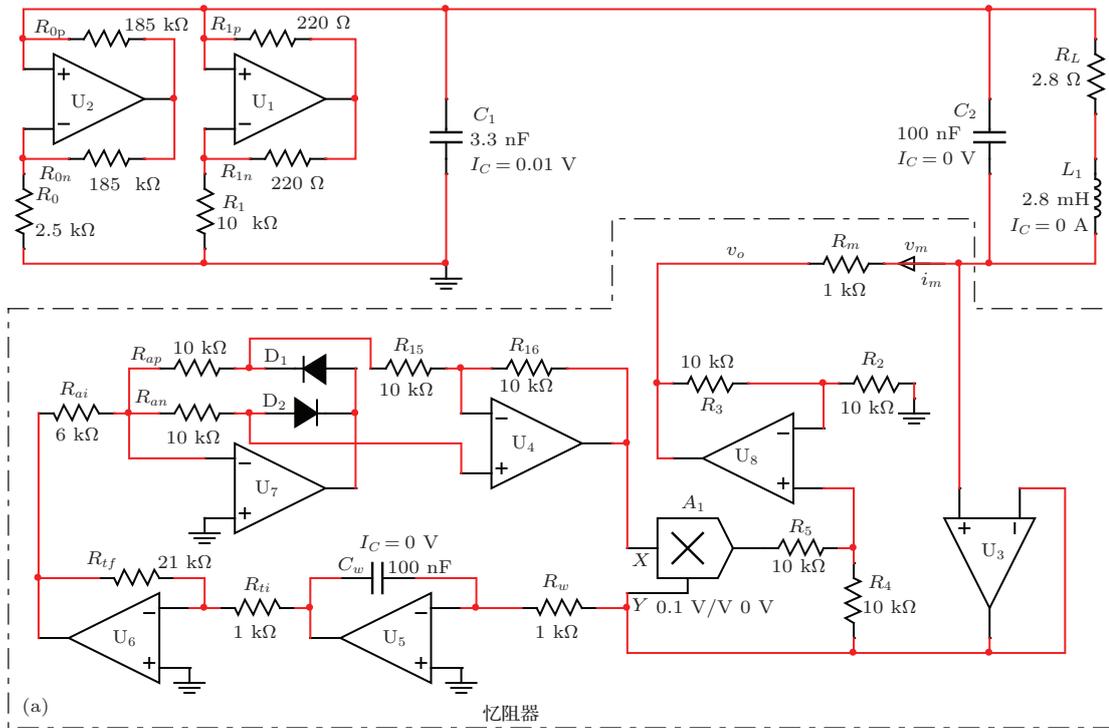


图9 完整四维忆阻电路实验原理图和仿真输出

$$= \begin{cases} \frac{a \cdot 10}{V_M} \left| \frac{V_M}{bB_p} v_w \right| & \left( \left| \frac{V_M}{bB_p} v_w \right| < V_M \right) \\ a \cdot 10 & \left( \left| \frac{V_M}{bB_p} v_w \right| \geq V_M \right) \end{cases},$$

式中  $V_M$  代表运算放大器输出的最大电压和最小电压的绝对值. 然后经过乘法和比例求和电路, 即可得出  $v_o$ , 从而实现忆阻的功能.

根据第1节中的参数关系, 选定参考电阻  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , 时间常数  $\tau_0 = 100 \text{ }\mu\text{s}$ , 则主要参数可以用下面公式求解:

$$C_2 = \frac{\tau_0}{R}, \quad C_1 = \frac{C_2}{\alpha},$$

$$L = \frac{R\tau_0}{\beta}, \quad R_L = \frac{\gamma L}{\tau_0}.$$

然后, 给定 Chua 二极管的转折电压  $B_p = 0.2 \text{ V}$ , 运算放大器的门限电压  $V_M = 15 \text{ V}$ , 即可求出电路中的剩余参数.

最终得到的所有元器件参数和完整电路实验原理图如图 9(a) 所示, 图中虚线包围的区域为忆阻. 仿真试验得到的示波器输出如图 9(b) 和 (c) 所示, 分别代表超混沌吸引子在  $v_1 - v_2$  和  $v_1 - v_w$  上的投影, 途中所有变量的单位为 0.2 V/div. 对比图 4 中的  $x-y$  和  $x-w$  相图, 可知混沌吸引子电路实验与数值计算结果一致, 从而验证了超混沌吸引子存在于四维忆阻电路中.

## 5 结 论

本文提出了一种简单的四维忆阻电路. 通过理论推导, 得出了无量纲系统方程. 通过对平衡点分析发现, 系统存在无穷多不可数平衡点, 它们正好构成  $w$  坐标轴. 通过系统雅克比矩阵特征值计算, 发现  $|c|$  介于 0.700974 和 0.80912 之间的平衡点稳定, 其他平衡点则不稳定. 这一点明显有别于其他文献中仅含有限个孤立平衡点的大多混沌和超混沌系统. 尽管该系统有无穷多个稳定和 unstable 平衡点, 但研究发现该系统却存在着极限环、混沌、超混沌等复杂的非线性行为. 通过进一步电路仿真实验, 证实了超混沌吸引子的存在, 从而正面回答了关于四维忆阻电路是否存在超混沌的疑问. 与过去通常用忆阻去替换 Chua 二极管的方式不同, 本文采用分段线性忆阻替换 Chua 电路中的电阻. 因此, 本文工作对忆阻功能的认识具有一定的参考价值, 对混沌和超混沌系统的研究也有着积极的意义.

## 参考文献

[1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circ. Theory* **18** 507  
 [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart G R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80  
 [3] Tour J M, Tao H 2008 *Nature* **453** 42  
 [4] Jia L N, Huang A P, Zheng X H, Xiao Z S, Wang M 2012 *Acta Phys. Sin.* **65** 217306 (in Chinese) [贾林楠, 黄安平, 郑晓虎, 肖志松, 王玫 2012 物理学报 **65** 217306]  
 [5] Yuriy V P, Massimiliano D V 2010 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **57** 1857  
 [6] Xia Q F, Robinett W, Cumbie M W, Banerjee N, Cardinali T J, Yang J J, Wu W, Li X M, Tong W M, Strukov

D B, Snider G S, Medeiros-Ribeiro G, Williams R S 2009 *Nano Lett.* **9** 3640  
 [7] Ventra M D, Pershin Y V, Chua L O 2009 *Proc. IEEE* **97** 1717  
 [8] Borghetti J, Li Z Y, Straznicky J, Li X M, Ohlberg D A A, Wu W, Stewart D R, Williams R S 2009 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106** 1699  
 [9] Song D H, Lü M F, Ren X, Li M M, Zu Y X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 118101 (in Chinese) [宋德华, 吕梦菲, 任翔, 李萌萌, 俎云霄 2012 物理学报 **61** 118101]  
 [10] Hu F W, Bao B C, Wu H G, Wang C L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 218401 (in Chinese) [胡丰伟, 包伯成, 武花干, 王春丽 2013 物理学报 **62** 218401]  
 [11] Hong Q H, Zeng Y C, Li Z J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 230502 (in Chinese) [洪庆辉, 曾以成, 李志军 2013 物理学报 **62** 230502]  
 [12] Bao B C, Wang C L, Wu H G, Qiao X H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020504 (in Chinese) [包伯成, 春丽, 武花干, 乔晓华 2014 物理学报 **63** 020504]  
 [13] Xu B R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 190506 (in Chinese) [许碧荣 2013 物理学报 **62** 190506]  
 [14] Li Q D, Hu S Y, Tang S, Zeng G 2013 *Int. J. Circ. Theor.* **10** 1912  
 [15] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3785 (in Chinese) [包伯成, 刘中, 徐建平 2010 物理学报 **59** 3785]  
 [16] Itoh M, Chua L O 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 3183  
 [17] Bao B C, Hu W, Xu J P, Liu Z, Zou L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120502 (in Chinese) [包伯成, 胡文, 许建平, 刘中, 邹凌 2011 物理学报 **60** 120502]  
 [18] Bao B C, Xu J P, Zhou G H, Ma Z H, Zou L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120502  
 [19] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030510  
 [20] Muthuswamy B, Kokate P P 2009 *IETE Tech. Rev.* **26** 415  
 [21] Buscarino A, Fortuna L, Frasca M, Gambuzza L V, Sciuto G 2011 *2011 10th International Symposium on Signals, Circuits and Systems (ISSCS)* Iasi, Romania, June 30–July 1, 2011 p73  
 [22] Li Z J, Zeng Y C, Li Z B 2013 *Acta Phys. Sin.* **63** 010502 (in Chinese) [李志军, 曾以成, 李志斌 2013 物理学报 **63** 010502]  
 [23] Bao B C, Shi G D, Xu J P, Liu Z, Pan S H 2011 *Sci. China Tech. Sci.* **41** 1135 (in Chinese) [包伯成, 史国栋, 许建平, 刘中, 潘赛虎 2011 中国科学: 技术科学 **41** 1135]  
 [24] Qi A X, Pang Z, Wang G 2011 *2011 2nd International Conference on Artificial Intelligence, Management Science and Electronic Commerce (AIMSEC)* Zhengzhou, China, August 8–10, 2011 p3949  
 [25] Fitch A L, Yu D S, Iu H H C, Sreeram V 2012 *Int. J. Bifur. Chaos* **22** 1250133  
 [26] Li Z J, Zeng Y C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040502

# The 4-dimensional hyperchaotic memristive circuit based on Chua's circuit\*

Yang Fang-Yan<sup>2)</sup> Leng Jia-Li<sup>2)</sup> Li Qing-Du<sup>1)2)</sup>†

1) (*Key Laboratory of Industrial Internet of Things and Networked Control, Ministry of Education, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

2) (*Institute for Nonlinear Circuits and Systems of Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

( Received 27 November 2013; revised manuscript received 24 January 2014 )

## Abstract

Recently, there has been a growing interest in chaotic memristive circuits. However, four-dimensional (4D) memristive system often can only exhibit common chaos with only one positive Lyapunov exponent. By replacing the resistor of Chua's circuit with a memristor, we propose a new simple 4D memristive circuit in this paper. A major difference between our proposed system and the known chaotic or hyperchaotic system is that our modified system has infinitely many stable and unstable equilibria. We show that the system can exhibit rich complex dynamic behaviors, such as limit cycles, chaos and hyperchaos. Further numerical study and circuit simulation verify the existence of a hyperchaotic attractor in the memristive circuit, which gives a positive answer about whether there exists hyperchaos in 4D memristive systems.

**Keywords:** chaos, memristor, hyperchaos, Chua's circuit

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Jn, 05.45.Pq

**DOI:** [10.7498/aps.63.080502](https://doi.org/10.7498/aps.63.080502)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104150), the Science Fund for Distinguished Young Scholars of Chongqing, China (Grant No. cstc2013jcyj40001), and the Natural Science Foundation Chongqing, China (Grant No. CSTC2012jjB40009).

† Corresponding author. E-mail: [liqd@cqupt.edu.cn](mailto:liqd@cqupt.edu.cn)