

一类多翼蝴蝶混沌吸引子及其电路实现*

黄运†

(重庆邮电大学资产管理处, 重庆 400065)

(2013年12月3日收到; 2013年12月29日收到修改稿)

提出了一种构造多翼蝴蝶混沌吸引子的新方法. 在Liu混沌系统的基础上, 通过设计一种新的分段线性函数, 构造了一个产生多翼蝴蝶混沌吸引子的混沌系统. 对系统的平衡点、Lyapunov指数谱、分岔图、相图、频谱和Poincaré截面进行了分析. 最后, 设计了相应的硬件电路. 电路实验结果与数值仿真结果一致, 验证了该方法的可行性和有效性.

关键词: 混沌, Liu混沌系统, 多翼蝴蝶混沌吸引子, 电路实现

PACS: 05.45.Pq, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.080505

1 引言

自1963年Lorenz^[1]提出第一个混沌模型以来, 人们对非线性系统中的混沌现象产生了极大的兴趣. 尤其是近几十年来, 大量的混沌系统被构造与分析, 进一步加深了人们对混沌的认识与理解. 目前, 人们已能很容易地构造出两翼蝴蝶混沌吸引子和多涡卷混沌吸引子. 但是对于多翼蝴蝶混沌吸引子的构造, 目前研究还较少, 且对于构造多翼蝴蝶混沌吸引子仍然具有挑战.

2003年, Liu等^[2]构造了一个四翼蝴蝶混沌吸引子, 尽管被证明是假的四翼蝴蝶混沌吸引子^[3], 但却引起了人们对构造四翼^[4-14]和多翼蝴蝶混沌吸引子^[15-24]的兴趣. 目前, 对于多翼蝴蝶混沌吸引子的构造主要有五种方法: 第一种是基于多项式变换^[15,16]或Julia过程^[17], 构造出了环形多翼蝴蝶混沌吸引子; 第二种是对两翼超混沌系统进行坐标平移变换、镜像映射和滞回切换的操作, 得到了 2^n 翼蝴蝶混沌吸引子^[18,19]; 第三种是通过构造异宿环, 从而产生网格多翼蝴蝶混沌吸引子^[20,21]; 第四种是在修改的Lorenz系统^[22]上, 通过设计适当的分段函数, 得到多翼蝴蝶混沌吸引子^[23,24]; 第五种是在Lorenz系统上增加一个状态方程, 并设计适

当的分段函数, 从而产生多翼蝴蝶混沌吸引子^[25].

然而, 第一、第二和第三种构造方法十分复杂, 且构造的多翼混沌系统的代数形式也十分复杂, 电路实现困难. 第四种方法则, 需要在修改的Lorenz系统上才能得到多翼蝴蝶混沌吸引子, 因此这种构造方法受到限制. 而第五种方法增加了系统状态方程的维数, 使系统变得更复杂, 计算量更大.

本文在Liu混沌系统^[26]的基础上, 通过设计一种新的分段线性函数, 构造了一个产生多翼蝴蝶混沌吸引子的三维混沌系统. 该系统代数形式简单, 电路容易实现. 对系统的Lyapunov指数谱、分岔图、相图、频谱和Poincaré截面进行了数值仿真. 最后, 进行了电路实验, 电路实验结果与数值仿真结果一致.

2 多翼蝴蝶混沌吸引子的设计

Liu混沌系统的数学模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - xz, \\ \dot{z} = -cz + hx^2, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $a = 10$, $b = 20$, $c = 2.5$, $h = 4$.

* 重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2012jjA40008) 和重庆市教委科学技术研究项目 (批准号: KJ120525) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hyzt1@sohu.com

为了使Liu混沌系统产生多翼蝴蝶混沌吸引子, 本文设计了一种新的分段线性函数:

$$f(x) = x - \left[2 \sum_{n=-N}^M \varepsilon(x + 2n + 1) \right] + 2(M + 1), \quad (2)$$

其中, $N, M \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\varepsilon(x + 2n + 1)$ 为单位阶跃函数, 其波形图如图1所示.

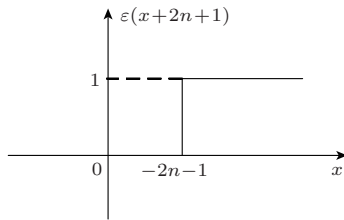
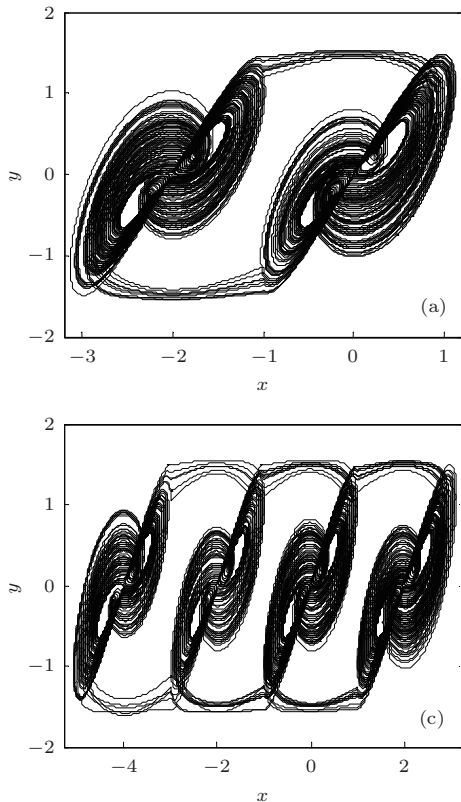


图1 单位阶跃函数

用分段线性函数 $f(x)$ 代替Liu混沌系统的状态变量 x , 并对系统参数进行适当的修改, 得到一个新的系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - f(x)), \\ \dot{y} = bf(x) - d_1 f(x)z, \\ \dot{z} = -cz + d_2 f^2(x). \end{cases} \quad (3)$$

取 $a = 10$, $b = 20$, $c = 2.5$, $d_1 = 9$, $d_2 = 36$,



系统(3)能产生 $2(M + N + 2)$ 翼蝴蝶混沌吸引子. 取 $M = N = 0$, 系统(3)产生四翼蝴蝶混沌吸引子, 如图2(a)所示; 取 $N = 0, M = 1$, 系统(3)产生六翼蝴蝶混沌吸引子, 如图2(b)所示; 取 $N = M = 1$, 系统(3)产生八翼蝴蝶混沌吸引子, 如图2(c)所示; 取 $N = 1, M = 2$, 系统(3)产生十翼蝴蝶混沌吸引子, 如图2(d)所示.

3 基本动力学行为分析

3.1 平衡点

令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, 得

$$\begin{cases} a(y - f(x)) = 0, \\ bf(x) - d_1 f(x)z = 0, \\ -cz + d_2 f^2(x) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

解方程组(4)可得系统(3)的平衡点: $S_{1m} = (2m, 0, 0)$,

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \left(\sqrt{\frac{bc}{d_1 d_2}} + 2m, \sqrt{\frac{bc}{d_1 d_2}}, \frac{b}{d_1} \right), \\ S_{3m} &= \left(-\sqrt{\frac{bc}{d_1 d_2}} + 2m, -\sqrt{\frac{bc}{d_1 d_2}}, \frac{b}{d_1} \right), \end{aligned}$$

其中, $m = -M, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$.

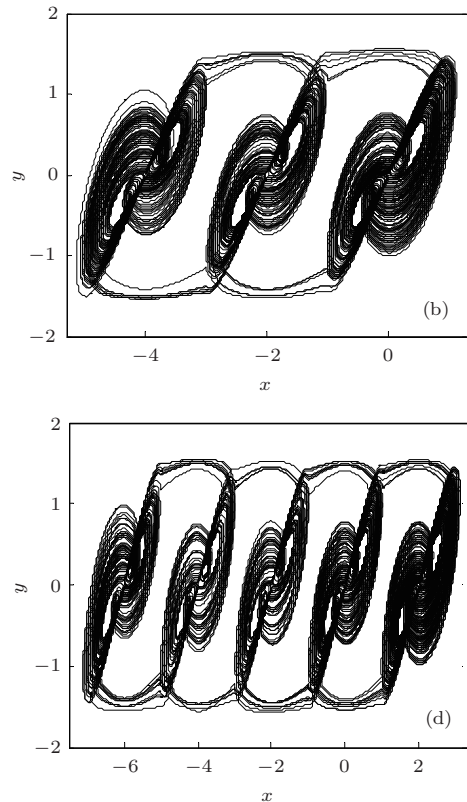


图2 系统(3)的多翼蝴蝶混沌吸引子 (a) 四翼; (b) 六翼; (c) 八翼; (d) 十翼

在平衡点 $S^* = (x^*, y^*, z^*)$ 处, 线性化系统 (3), 得雅可比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -ag(x^*) & a & 0 \\ (b - d_1 z^*)g(x^*) & 0 & -d_1 f(x^*) \\ 2d_2 f(x^*)g(x^*) & 0 & -c \end{pmatrix},$$

其中 x^*, y^*, z^* 表示平衡点 S_{1m}, S_{2m}, S_{3m} 的坐标,

$$\begin{aligned} g(x^*) &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \\ &= 1 - 2 \frac{\sum_{n=-N}^M \varepsilon(x + 2n + 1)}{dx} \Big|_{x=x^*} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=-N}^M n \delta(x^* + 2n + 1), \end{aligned}$$

其中 $\delta(\bullet)$ 为脉冲函数. 从系统平衡点 S_{1m}, S_{2m}, S_{3m} 可以看出 $x^* \neq -(2n+1)$, 因此 $\delta(x^* + 2n + 1) = 0$, 则

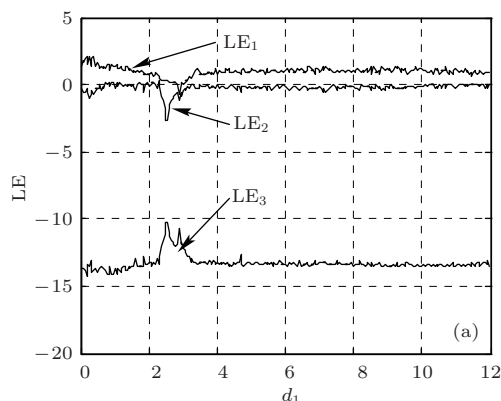
$$g(x^*) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = 1.$$

把平衡点 $S_{1m} = (2m, 0, 0)$ 代入特征方程 $\det(J - \lambda I) = 0$, 得到三个特征值分别为 $\lambda_1 = -20$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = -2.5$, 由于 λ_1 和 λ_3 为负实数, λ_2 为正实数, 因此平衡点 S_{1m} 为不稳定的鞍点.

把平衡点

$$S_{2m} = \left(\sqrt{\frac{bc}{d_1 d_2}} + 2m, \sqrt{\frac{bc}{d_1 d_2}}, \frac{b}{d_1} \right)$$

代入特征方程 $\det(J - \lambda I) = 0$, 得到三个特征值分别为 $\lambda_1 = -15.1887$, $\lambda_{2,3} = 1.3444 \pm 8.0019i$, 由于 λ_1 为负实数, $\lambda_{2,3}$ 为具有正实部的共轭复数根, 因此平衡点 S_{2m} 为不稳定的鞍焦点. 通过计算知平衡点 S_{3m} 与平衡点 S_{2m} 具有相同的特征值, 因此平衡点 S_{3m} 也是不稳定的鞍焦点.



3.2 Lyapunov 指数和分岔图

图 3 给出了系统 (3) 在 $N = 0, M = 1$ 时随参数 d_1 变化的 Lyapunov 指数谱和分岔图. 从图 3(a) 可以看出, 当 $d_1 \in (0, 2.3) \cup (3.14, 12]$ 时, $LE_1 > 0$, $LE_2 \approx 0$, $LE_3 < 0$, 系统处于混沌状态. 图 3(b) 的分岔图与 Lyapunov 指数谱反映相一致.

3.3 频谱图和 Poincaré 截面图

图 4 和图 5 给出了系统 (3) 在 $N = 0, M = 1$ 时的频谱图和 Poincaré 截面图. 从图 4 知, 系统 (3) 的频谱是连续谱. 从图 5 可以看出, 截面上的 Poincaré 映射是成片的密集点且向多个方向散开, 这导致了系统的复杂的动力学行为.

4 多翼蝴蝶混沌吸引子的电路设计

根据系统 (3) 和 (2) 式设计了实现多翼蝴蝶混沌吸引子的电路图, 如图 6 所示. 在图 6 中, 使用的运算放大器的型号为 UA741CN, 其电源电压 $E = \pm 15$ V, 输出饱和值 $V_{\text{sat}} \approx \pm 13.5$ V, 乘法器的型号为 AD633JN, 其增益为 0.1, E^+ 和 E^- 分别接电源电压 E 的正极和负极, 即 $E^+ = 15$ V, $E^- = -15$ V, R_2 为 100 kΩ 的电位器.

根据图 6 得电路方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{R_0 C_0} \left(\frac{R}{R_3} y - \frac{R}{R_4} f(x) \right), \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{R_0 C_0} \left(\frac{R}{R_5} f(x) - \frac{R}{10 R_6} f(x) z \right), \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{R_0 C_0} \left(-\frac{R}{R_7} z + \frac{R}{10 R_8} f^2(x) \right). \end{cases} \quad (5)$$

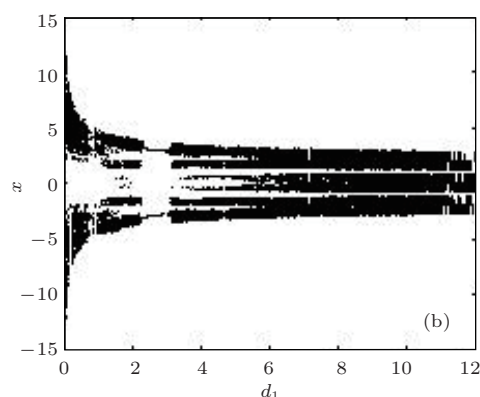


图 3 系统 (3) 的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 指数谱; (b) 分岔图

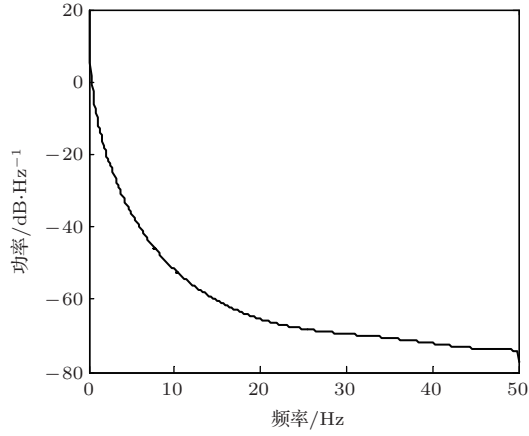


图4 频谱图

为了能观察到实验输出波形, 需要对 τ 进行时间尺度变换, 即 $\tau = \tau_0 t$. 令 $\tau_0 = 10^{-3}$, 则方程 (5) 变为

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{10^{-3}}{R_0 C_0} \left(\frac{R}{R_3} y - \frac{R}{R_4} f(x) \right), \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{10^{-3}}{R_0 C_0} \left(\frac{R}{R_5} f(x) - \frac{R}{10R_6} f(x)z \right), \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{10^{-3}}{R_0 C_0} \left(-\frac{R}{R_7} z + \frac{R}{10R_8} f^2(x) \right). \end{cases} \quad (6)$$

取 $R = R_0 = 10 \text{ k}\Omega$, $C_0 = 10 \text{ nF}$, 根据系统 (3) 和 (6) 式得 $R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 1.11 \text{ k}\Omega$, $R_7 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_8 = 278 \Omega$.

在图 6 中, 取 $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_9 = 12 \text{ k}\Omega$, $R_{10} = 14 \text{ k}\Omega$, $R_{VI} = 13.5 \text{ k}\Omega$, 得

$$V_1 = -V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_{VI}} \text{sgn} \left(x - \frac{3R_1}{R_3 + 3R_1} E^- \right) - \frac{R_1}{R_4 + R_1} E^+$$

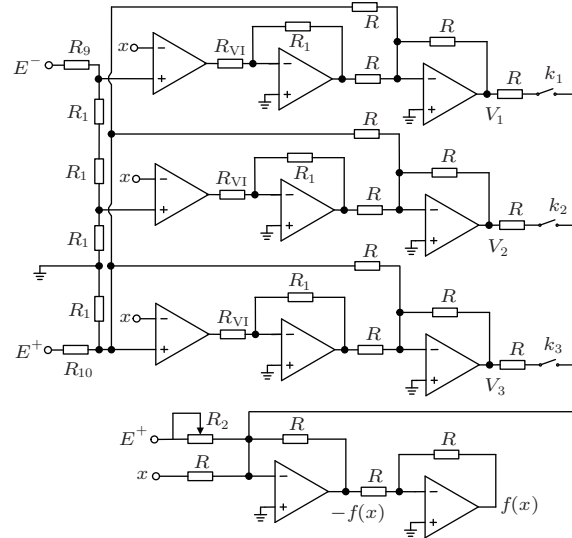
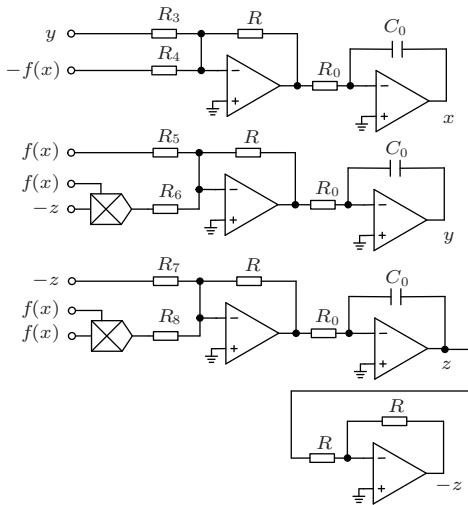


图6 产生多翼蝴蝶混沌吸引子的电路图

$$= -\text{sgn}(x + 3) - 1 = -2\varepsilon(x + 3), \quad (7)$$

$$V_2 = -V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_{VI}} \text{sgn} \left(x - \frac{R_1}{R_3 + 3R_1} E^- \right) - \frac{R_1}{R_4 + R_1} E^+ = -\text{sgn}(x + 1) - 1 = -2\varepsilon(x + 1), \quad (8)$$

$$V_3 = -V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_{VI}} \text{sgn} \left(x - \frac{R_1}{R_4 + R_1} E^+ \right) - \frac{R_1}{R_4 + R_1} E^+ = -\text{sgn}(x - 1) - 1 = -2\varepsilon(x - 1). \quad (9)$$

因此, 当 $M = N = 0$, 即开关 k_2 闭合, k_1 和 k_3 断开时, 取 $R_2 = 75 \text{ k}\Omega$, 有

$$f(x) = x + V_2 + \frac{RE^+}{R_2} = x - 2\varepsilon(x + 1) + 2, \quad (10)$$

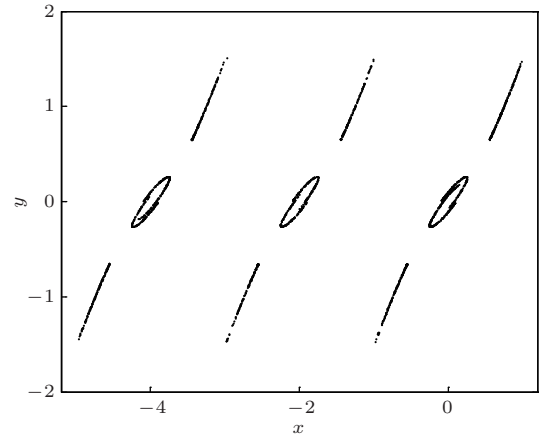


图5 Poincaré 截面图

此时, 电路产生四翼蝴蝶混沌吸引子, 如图 7(a) 所示.

当 $N = 0$, $M = 1$, 即开关 k_1 和 k_2 闭合, k_3 断开时, 取 $R_2 = 37.5 \text{ k}\Omega$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= x + V_2 + V_1 + \frac{RE^+}{R_2} \\ &= x - 2\varepsilon(x+1) - 2\varepsilon(x+3) + 4, \end{aligned} \quad (11)$$

此时, 电路产生六翼蝴蝶混沌吸引子, 如图 7(b) 所示.

当 $M = N = 1$, 即开关 k_1 , k_2 和 k_3 闭合时, 取 $R_2 = 37.5 \text{ k}\Omega$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= x + V_3 + V_2 + V_1 + \frac{RE^+}{R_2} \\ &= x - 2\varepsilon(x-1) - 2\varepsilon(x+1) \\ &\quad - 2\varepsilon(x+3) + 4, \end{aligned} \quad (12)$$

此时, 电路产生八翼蝴蝶混沌吸引子, 如图 7(c) 所示. 从图 7 和图 2 可以看出, 电路实验结果与数值仿真结果相一致.

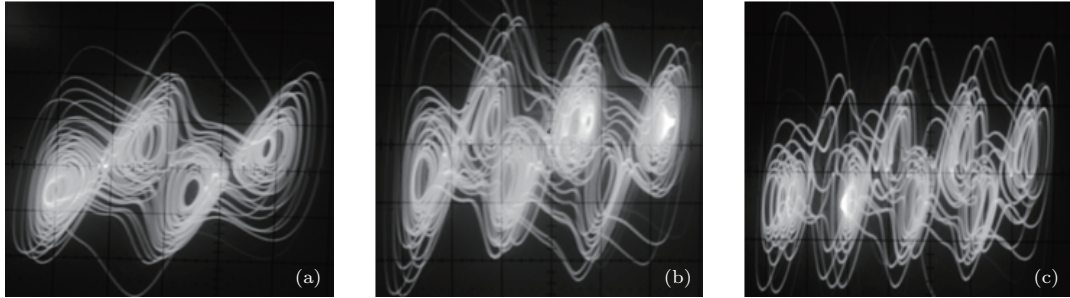


图 7 电路实验结果 (a) 四翼; (b) 六翼; (c) 八翼

5 结 论

本文提出了一种构造多翼蝴蝶混沌吸引子的新方法. 该方法简单、有效, 且构造的多翼混沌系统代数形式简单, 电路实现容易. 通过理论分析, 呈现出了系统的混沌特性. 最后进行了硬件电路实验, 在示波器上获得了四翼、六翼和八翼蝴蝶混沌吸引子. 由于多翼蝴蝶混沌吸引子较一般的单翼或两翼蝴蝶混沌吸引子的动力学行为更复杂, 因此, 该系统在工程上具有更大的应用价值, 尤其是在保密通信中的应用.

参考文献

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Liu W B, Chen G R 2003 *Int. J. Bifur. Chaos* **13** 261
- [3] Liu W B, Chen G R 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1395
- [4] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍, 齐国元, 陈增强, 袁著址 2007 物理学报 **56** 3137]
- [5] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3734 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 3734]
- [6] Dong E Z, Chen Z P, Chen Z Q, Yuan Z Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2680
- [7] Dadras S, Momeni H R 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3637
- [8] Wang L 2009 *Nonlinear Dyn.* **56** 453
- [9] Giuseppe G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3247

- [10] Li D Q 2008 *Phys. Lett. A* **372** 387
- [11] Chen Z Q, Yang Y, Yuan Z Z 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 1187
- [12] Qiao X H, Bao B C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8152 (in Chinese) [乔晓华, 包伯成 2009 物理学报 **58** 8152]
- [13] Hu G S, Yu B 2009 *Int. J. Mod. Phys. C* **20** 323
- [14] Huang Y, Zhang P, Zhao W F 2013 *J. Southwest Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **35** 127 (in Chinese) [黄云, 张鹏, 赵卫峰 2013 西南大学学报 (自然科学版) **35** 127]
- [15] Miranda R, Stone E 1993 *Phys. Lett. A* **178** 105
- [16] Yu S M, Lü J H, Tang W K S, Chen G R 2006 *Chaos* **16** 033126
- [17] Bouallegue K, Chaari A, Toumi A 2011 *Chaos Soliton. Fract.* **44** 79
- [18] Yu B, Hu G S 2010 *Int. J. Bifur. Chaos* **20** 727
- [19] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8139 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 8139]
- [20] Yu S M, Lü J H, Chen G R, Yu X H 2011 *IEEE Trans. Circuits Syst. II Exp. Briefs* **58** 314
- [21] Yu S M, Lü J H, Yu X H, Chen G R 2012 *IEEE Trans. Circuits Syst. I Reg. Papers* **59** 1015
- [22] Elwakil A S, Özoğuz S, Kennedy M P 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I Reg. Papers* **49** 527
- [23] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2010 *Int. J. Bifur. Chaos* **20** 29
- [24] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst. II Exp. Briefs* **55** 1168
- [25] Luo M W, Luo X H, Li H Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020512 (in Chinese) [罗明伟, 罗小华, 李华青 2013 物理学报 **62** 020512]
- [26] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5061 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 5061]

A family of multi-wing chaotic attractors and its circuit implementation^{*}

Huang Yun[†]

(Asset Management Department, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

(Received 3 December 2013; revised manuscript received 29 December 2013)

Abstract

A novel method is presented generating multi-wing butterfly chaotic attractors in this paper. Based on Liu chaotic system, a multi-wing butterfly chaotic system is constructed via designing a new piecewise linear function. The equilibrium point, Lyapunov exponent spectra, bifurcation diagram, phase diagram, frequency spectrum and Poincaré mapping of the system are studied. Furthermore, an electronic circuit is designed to implement the system. The experimental results are in agreement with numerical simulation results, which verify the feasibility and availability of this method.

Keywords: chaos, Liu chaotic system, multi-wing butterfly attractors, circuit implementation

PACS: 05.45.Pq, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.080505

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant No. cstc2012jjA40008) and the Science and Technology Research Project of the Chongqing Education Committee, China (Grant No. KJ120525).

[†] Corresponding author. E-mail: hyztt1@sohu.com