# (2+1)维 Korteweg-de Vries 方程的复合波解及局域激发*

张文玲 马松华† 陈晶晶

(丽水学院理学院, 丽水 323000)

( 2013 年 12 月 10 日收到; 2014 年 1 月 15 日收到修改稿 )

借助 Maple 符号计算软件, 利用 Riccati 方程 ($\xi' = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2$) 展开法和变量分离法, 得到了 (2+1) 维 Korteweg-de Vries 方程 (KdV) 包含 $q = C_1x + C_2y + C_3t + R(x, y, t)$ 的复合波解. 根据得到的孤立波解, 构造出 KdV 方程新颖的复合波裂变和复合波湮灭等局域激发结构.

**关键词**: Riccati 方程展开法, Korteweg-de Vries 方程, 复合波解, 局域激发

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge **DOI:** 10.7498/aps.63.080506

## 1 引 言

随着科技的进步, 非线性科学得到了飞速发展, 作为非线性科学重要分支的孤子理论也获得了快速发展, 并被广泛应用于量子场论、凝聚态物理、流体力学、非线性光学、等离子体物理等物理学领域内, 引起了很多物理学家和数学家的兴趣 [1−7]. 人们在研究过程中提出了许多行之有效的求解非线性偏微分方程的好方法, 如双线性法、齐次平衡法、标准的 Painlevé 截断分析法、波数合并法、变分迭代法、tanh 函数展开法、椭圆函数展开法、$G'/G$ 展开法和映射法 [8−19] 等. 并构造出了许多有意义的相干孤子结构诸如线孤子、半线孤子、紧致子、环孤子、方孤子、盘孤子、折叠子、泡孤子、钟状孤子、峰孤子内嵌孤子等 [20−32]. 在文献 [33] 中, Mei 和 Zhang 利用 Riccati 方程 ($\xi' = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2$) 展开法, 得到了非线性方程的行波解. 本文的工作是将 Riccati 方程展开法进一步拓展, 并应用于 (2+1) 维 Korteweg-de Vries (KdV) 方程:

$$u_t - u_{xxy} - \alpha u u_y - \beta u_x \partial_x^{-1} u_y = 0, \tag{1}$$

研究其复合波解及其局域激发. 方程 (1) 中的 $\alpha$ 和 $\beta$ 是任意常数. 文献 [34] 已证明了 KdV 方程的可积性, Lou 和 Ruan [35] 求得了当 $\alpha = \beta$ 时该方程的变量分离解. 本文将讨论当 $\alpha = 2\beta$ 时 KdV 方程的复合波解.

## 2 (2+1) 维 KdV 方程的复合波解

Riccati 方程展开法的基本思想是: 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(Q, Q_t, Q_{x_i}, Q_{x_i x_j}, \cdots) = 0, \tag{2}$$

设它有如下形式的解

$$Q = \sum_{i=0}^{n} A_i(x)\xi^i[q(x)], \tag{3}$$

其中 $\xi$ 满足 Riccati 方程

$$\xi' = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2, \tag{4}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11375079)、浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6110140) 和浙江省教育厅科研基金 (批准号: Y201120994) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: msh6209@aliyun.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

这里 $x = (x_0 = t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_m)$, $A_i(x)$ 和 $q(x)$ 为待定的 $x$ 的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组 $A_i(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A_i(x)$ 和 $q(x)$, 再根据 Riccati 方程解 [33] 就可以确定所求方程各种形式的解.

首先, 对 (1) 式做如下变换: $u = Q_x$, $\alpha = 2\beta$, 则方程 (1) 可改写为

$$Q_{xt} - Q_{xxxy} - 2\beta Q_x Q_{xy} - \beta Q_{xx} Q_y = 0. \tag{5}$$

为了寻找 KdV 系统的新精确解, 我们将 Riccati 方程展开法用于 (5) 式, 根据对方程 (5) 的领头项分析, 设解为

$$Q = A_0(x,y,t) + A_1(x,y,t)\xi(q(x,y,t)), \tag{6}$$

这里, $A_0$, $A_1$ 和 $q$ 是 $(x,y,t)$ 的任意函数, 将 (6) 式和 (4) 式代入 (5) 式, 并按 $\xi$ 的同次幂合并, 提取 $\xi^i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 前的系数, 令其等于零, 得到一系列方程, 由这些方程可求得:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x, \\ A_1 &= -4\frac{a_2 q_x}{\beta}, \end{aligned} \tag{7}$$

$q$ 满足

$$q = C_1 x + C_2 y + C_3 t + \chi(x) + \varphi(y - kt), \tag{8}$$

其中 $C_1$, $C_2$, $C_3$ 是任意常数, $\chi \equiv \chi(x)$, $\varphi \equiv \varphi(y - kt)$ 是关于 $x$ 和 $(y - kt)$ 的任意函数. 根据 Riccati 方程解 [33], 即可求得当 $a_0$, $a_1$, $a_2$ 取不同值时 KdV 方程如下的复合波精确解.

**情形 1** 当 $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ 时, 有

$$Q_1 = \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x - 4\frac{a_2 q_x}{\beta}\tanh(q), \tag{9}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x - 4\frac{a_2 q_x}{\beta}\coth(q). \tag{10}$$

**情形 2** 当 $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ 时, 有

$$Q_3 = \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x - 4\frac{a_2 q_x}{\beta}\tan(q). \tag{11}$$

**情形 3** 当 $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ 时, 有

$$Q_4 = \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x - 4\frac{a_2 q_x}{\beta}\cot(q). \tag{12}$$

**情形 4** 当 $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} Q_5 = {}& \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x \\ & - 4\frac{a_2 q_x}{\beta}(\tan(q) + \sec(q)), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} Q_6 = {}& \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x \\ & - 4\frac{a_2 q_x}{\beta}(\tan(q) - \sec(q)), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} Q_7 = {}& \frac{1}{2}\int \frac{q_{xx}^2 q_y - 2q_x q_y q_{xxx} + q_x^2 q_t - 4a_1 q_x^2 q_y q_{xx} + 4a_0 a_2 q_x^4 q_y - a_1^2 q_x^4 q_y}{\beta q_x^2 q_y}\,\mathrm{d}x \\ & - 4\frac{a_2 q_x}{\beta}(\csc(q) - \cot(q)). \end{aligned} \tag{15}$$

**情形 5** 当 $a_0=-\frac{1}{2}$, $a_1=0$, $a_2=-\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}Q_8={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}(-\tan(q)+\sec(q)),\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}Q_9={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}(\cot(q)+\csc(q)),\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}Q_{10}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}(\cot(q)-\csc(q)),\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}Q_{11}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\cot(q)}{1+\csc(q)},\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}Q_{12}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\cot(q)}{1-\csc(q)}.\end{aligned}\tag{20}$$

**情形 6** 当 $a_0=\frac{1}{2}$, $a_1=0$, $a_2=-\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}Q_{13}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}(\coth(q)+\mathrm{csch}(q)),\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}Q_{14}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}(\coth(q)-\mathrm{csch}(q)),\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}Q_{15}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}(\tanh(q)+I\mathrm{sech}(q)),\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}Q_{16}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}(\tanh(q)-I\mathrm{sech}(q)),\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}Q_{17}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\tanh(q)}{1+\mathrm{sech}(q)},\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}Q_{18}={}&\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x\\&-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\tanh(q)}{1-\mathrm{sech}(q)},\end{aligned}\tag{26}$$

$$Q_{19}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\,\mathrm{d}x$$

$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\coth(q)}{1+I\operatorname{csch}(q)}, \tag{27}$$

$$Q_{20}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\coth(q)}{1-I\operatorname{csch}(q)}. \tag{28}$$

**情形7** 当 $a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=-4$ 时, 有

$$Q_{21}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\tanh(q)}{1+\tanh^2(q)}. \tag{29}$$

**情形8** 当 $a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=4$ 时, 有

$$Q_{22}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\tan(q)}{1-\tan^2(q)}. \tag{30}$$

**情形9** 当 $a_0=-1,\ a_1=0,\ a_2=-4$ 时, 有

$$Q_{23}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\cot(q)}{1-\cot^2(q)}. \tag{31}$$

**情形10** 当 $a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=2$ 时, 有

$$Q_{24}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\tan(q)}{1-\tan(\mathrm{q})}. \tag{32}$$

**情形 11** 当 $a_0=1,\ a_1=-2,\ a_2=2$ 时, 有

$$Q_{25}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\tan(q)}{1+\tan(q)}. \tag{33}$$

**情形 12** 当 $a_0=-1,\ a_1=2,\ a_2=-2$ 时, 有

$$Q_{26}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\cot(q)}{1+\cot(q)}. \tag{34}$$

**情形13** 当 $a_0=-1,\ a_1=-2,\ a_2=-2$ 时, 有

$$Q_{27}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{\cot(q)}{1-\cot(q)}. \tag{35}$$

**情形 14** 当 $a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=a$ 时, 有

$$Q_{28}=\frac{1}{2}\int\frac{q_{xx}^2q_y-2q_xq_yq_{xxx}+q_x^2q_t-4a_1q_x^2q_yq_{xx}+4a_0a_2q_x^4q_y-a_1^2q_x^4q_y}{\beta q_x^2q_y}\mathrm{d}x$$
$$-4\frac{a_2q_x}{\beta}\frac{1}{aq+b}. \tag{36}$$

以上各解中 $q=C_1x+C_2y+C_3t+\chi(x)+\varphi(y-kt)$, $a$ 和 $b$ 是任意常数.

## 3 复合波局域激发

由于 (19)—(36) 式中的

$$q=C_1x+C_2y+C_3t+\chi(x)+\varphi(y-kt),$$

只要适当选取任意函数 $\chi$ 和 $\varphi$ 就能得到由行波解和 dromion 解叠加而成的复合波解. 由 (1) 式和 (5) 式可知, $u$ 是 $Q$ 对 $x$ 的一阶导数 ($u=Q_x$). 本文的这一部分以孤立波解 (25) 式为例, 讨论复合波随时间的演化. 为图示方便, 令 $U=u_{17}=Q_{17x}$, 即 (25) 式对 $x$ 求一阶导数, 可得

$$\begin{aligned}U=&-\frac{1}{2\beta q_x^2q_y(\cosh(q)+1)}\\&\times\{(2q_{xxx}q_xq_y-q_{xx}^2q_y\\&+q_x^4q_y-q_x^2q_t)\cosh(q)\\&-4q_{xx}q_x^2q_y\sinh(q)-q_x^2q_t\\&+2q_{xxx}q_xq_y-q_{xx}^2q_y-3q_x^4q_y\},\end{aligned}\tag{37}$$

其中 $q=C_1x+C_2y+C_3t+\chi(x)+\varphi(y-kt)$.

由于 (37) 式中的 $q$ 包含 $\chi$ 和 $\varphi$ 两个任意函数, 如果取 $\chi$ 和 $\varphi$ 为如下形式:

$$\begin{aligned}&\chi=1+\mathrm{sech}(x),\\&\varphi=1+\exp(y-k_1t)+2\mathrm{sech}(y-k_2t),\end{aligned}\tag{38}$$

于是可以得到一个 dromion 复合波的裂变现象. 如图 1 所示, 选取 $\beta=1$, $C_1=0.3$, $C_2=0.3$, $C_3=0.3$, $k_1=1$, $k_2=1$, 时间分别为 (a) $t=-10$, (b) $t=0$, (c) $t=8$. 从图中看到, 一个 dromion 复合波随时间向 $y$ 轴正方向移动, 然后裂变为两个 dromion 复合波, 裂变后的两个复合波保持其波形不变, 向着不同的方向传播.

如果取 $q$ 中的 $\chi$ 和 $\varphi$ 为如下形式:

$$\begin{aligned}&\chi=1+2\tanh^2(x),\\&\varphi=1+\exp^2(y-kt),\end{aligned}\tag{39}$$

可以得到两个 dromion 复合波的湮灭现象, 如图 2 所示. 取 $\beta=1$, $C_1=0.5$, $C_2=0.5$, $C_3=0.5$, $k=1$, 时间分别为 (a) $t=-5$, (b) $t=0$, (c) $t=2$, (d) $t=5$. 从图 2 可以看到, 两个 dromion 复合波做相对运动, 相互作用后波幅随时间变小, 最后趋向于零.

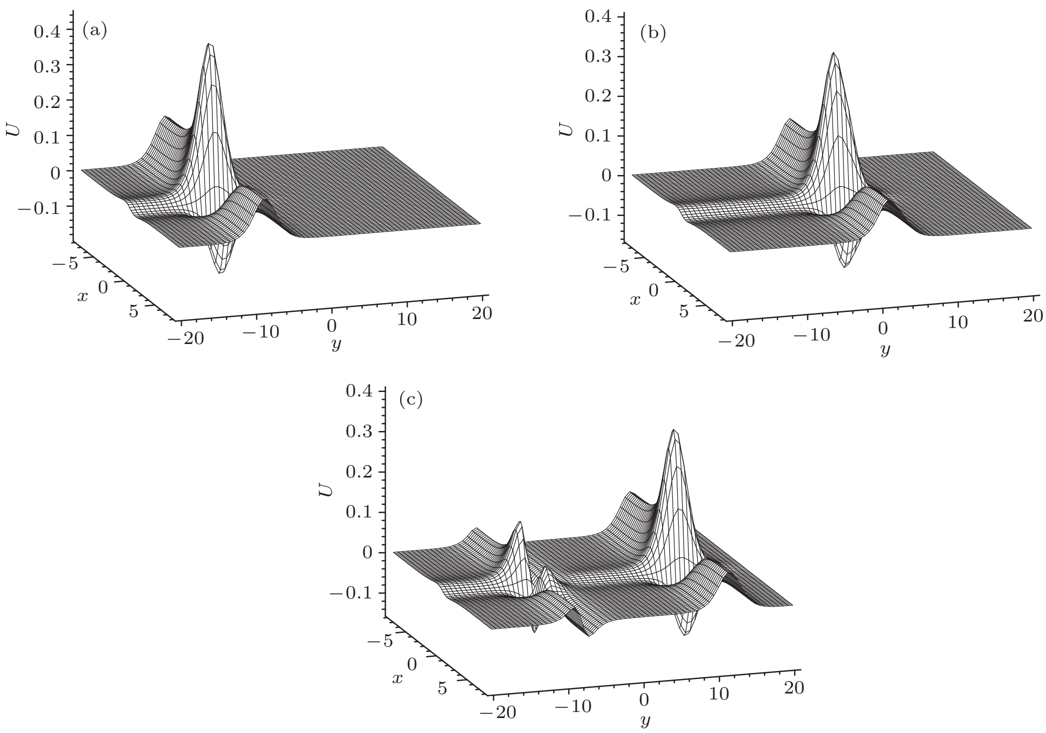


图 1　(37) 式利用 (38) 式得到的 dromion 复合波的演化侧面 (取 $\beta=1$, $C_1=0.3$, $C_2=0.3$, $C_3=0.3$, $k_1=1$, $k_2=1$)　(a) $t=-10$; (b) $t=0$; (c) $t=8$

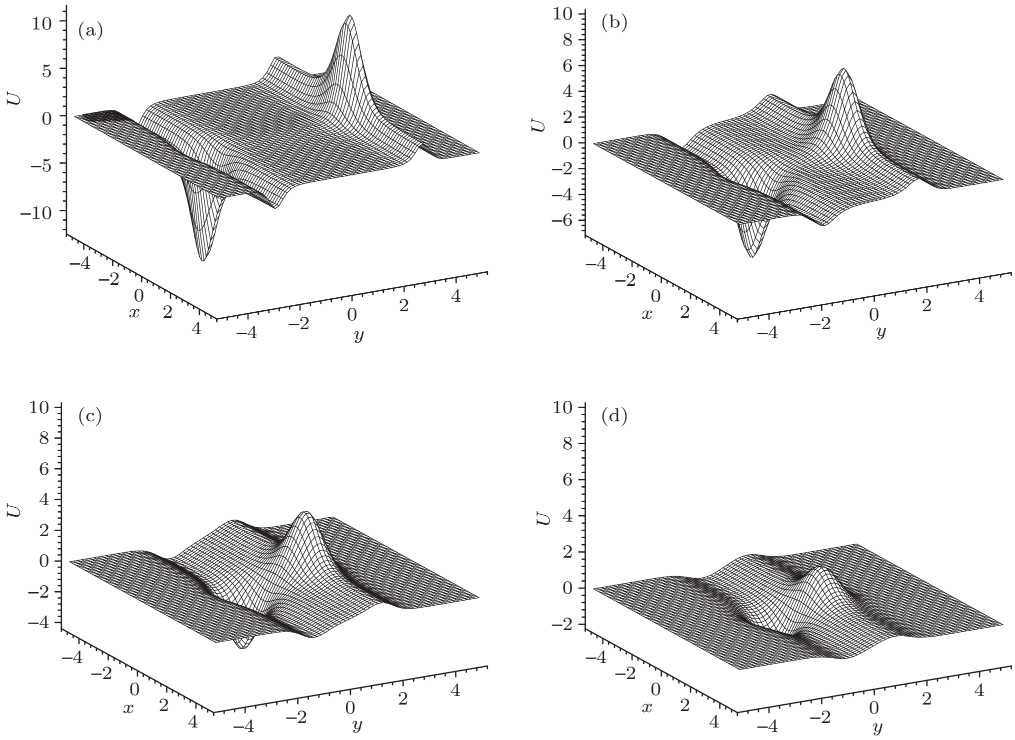


图 2 (37) 式利用 (39) 式得到的 dromion 复合波的演化侧面 (取 $\beta=1$, $C_1=0.5$, $C_2=0.5$, $C_3=0.5$, $k=1$) (a) $t=-5$; (b) $t=0$; (c) $t=2$; (d) $t=5$

## 4 结 论

Mei 等利用 Riccati 方程展开法, 得到了非线性方程的行波解. 本文将该方法进一步拓展, 以 (2+1) 维 Korteweg-de Vries 方程为例, 得到了包含 $q=C_1x+C_2y+C_3t+\chi(x)+\varphi(y-kt)$ 的复合波精确解, 其中 $\chi(x)$ 和 $\varphi(y-kt)$ 是关于 $x$ 和 $(y-kt)$ 的两个任意函数. 然后以孤波解 $U=u_{17}=Q_{17x}$ 为例, 研究了复合波随时间的演化. 两个孤立子之间的相互作用大多是弹性的, 即孤子相互碰撞后"各自分开, 互不改变", 作用前后的波幅、形状和传播速度都不发生改变. 本文研究得到了复合波的裂变和湮灭现象, 说明在一定条件下, 两个孤立子的作用也可以是非弹性的, 也说明孤立子在很多方面具有其他经典粒子相同的特性.

## 参考文献


[1] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661

[2] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046601

[3] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027

[4] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett. A* **149** 113

[5] Fokas A S 1998 *Phys. Lett. A* **132** 432

[6] Zhang D J 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **18** 31

[7] Zhang D J 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 1333

[8] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829

[9] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385

[10] Dai C Q, Zhou G Q 2007 *Chin. Phys. B* **16** 1201

[11] Dai C Q, Ni Y Z 2006 *Phys. Scripta* **74** 584

[12] Dai C Q, Zhu H P 2013 *J. Opt. Soc. Am. B* **30** 3291

[13] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese)[套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]

[14] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5887 (in Chinese)[套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5887]

[15] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese)[马玉兰, 李帮庆, 孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]

[16] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7397 (in Chinese)[莫嘉琪, 张伟江, 陈贤峰 2009 物理学报 **58** 7397]

[17] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655

[18] Zhang J F 2002 *Commun. Theor. Phys.* **37** 277

[19] Lou S Y 1996 *Commun. Theor.* **26** 487

[20] Lou S Y, Tang X Y, Li J 2001 *Eue. Phys. J. B* **22** 473

[21] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese)[方建平, 郑春龙, 朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]

[22] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese)[方建平, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]

[23] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese)[马松华, 强继业, 方建平 2007 物理学报 **56** 620]

[24] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese)[马松华, 方建平 2006 物理学报 **55** 5611]

[25] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys. B* **4** 670

[26] Ma S H, Fang J P, Ren Q B, Yang Z 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050511

[27] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **40** 210

[28] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4420 (in Chinese)[马松华, 方建平, 任清褒 2010 物理学报 **59** 4420]

[29] Ma S H, Fang J P, Wu H Y 2013 *Z. Naturforsch.* **68a** 350

[30] Ma Z Y, Ma S H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030507

[31] Chen Y M, Ma S H, Ma Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050510

[32] Lei Y, Ma S H, Fang J P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010506

[33] Mei J Q, Zhang H Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 209

[34] Calogero F 1975 *Lett. Nouvo Cimento.* **14** 443

[35] Lou S Y, Ruan H Y 2001 *J. Phys. A* **34** 305


# Complex wave solutions and localized excitations of (2+1)-dimensional korteweg-de Vries system*


Zhang Wen-Ling    Ma Song-Hua†    Chen Jing-Jing

(*College of Science, Lishui University, Lishui 323000, China*)


( Received 10 December 2013; revised manuscript received 15 January 2014 )


**Abstract**

With the help of the symbolic computation system Maple and Riccati equation ($\xi' = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2$) expansion method and a variable separation method, some complex wave solutions with $q = C_1x + C_2y + C_3t + R(x, y, t)$ of the (2+1)-dimensional Korteweg-de Vries system is derived. Based on the derived solitary wave solution, some novel complex wave localized excitations such as complex wave fusion and complex wave annihilation are investigated.



**Keywords:** Riccati equation expansion method, Korteweg-de Vries system, complex wave solutions, localized excitations

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge    **DOI:** 10.7498/aps.63.080506


* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11375079), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6100257, Y6110140), and the Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial Education Department of China (Grant No. Y201120994).

† Corresponding author. E-mail: msh6209@aliyun.com