

两自由度带电耦合振子系统的守恒量与近似解*

楼智美†

(绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2014年1月4日收到; 2014年1月20日收到修改稿)

由于两自由度带电耦合振子系统的Lagrange函数中存在耦合项, 从而导致其运动微分方程是非线性耦合的. 先通过坐标变换消去Lagrange函数中的耦合项, 用直接积分法求得系统的守恒量, 用Adomian分解法求得系统的近似解, 再通过坐标反变换求得系统在原坐标下的守恒量与近似解, 并对近似解作了讨论.

关键词: 两自由度带电耦合振子系统, 守恒量, 近似解

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.63.090202

1 引言

实际力学系统的Lagrange函数中常常含有耦合项, 由此导出的运动微分方程往往是非线性耦合的, 这对直接研究系统的守恒量与运动规律带来了困难. 近年来, 研究实际力学系统的守恒量受到诸多力学学者的关注^[1-13], 但是, 要研究力学系统的运动规律仅有守恒量还是不够的, 应求得运动微分方程的解(即运动学方程), 然而, 要直接求得非线性耦合的二阶微分方程组的解是比较困难的. 事实上, 可采用先进行坐标变换消去Lagrange函数中的耦合项, 求得系统在新坐标系下的守恒量和近似解, 再通过坐标反变换求得系统在原坐标下的守恒量与近似解的方法. 本文用三弹簧两质点构建了两自由度带电耦合振子系统, 由于静电力的存在, 系统的Lagrange函数中存在耦合项, 从而导致其运动微分方程是非线性耦合的, 为直接求系统的守恒量和近似解带来了不便. 文中首先用坐标变换法消去Lagrange函数中的耦合项得到新坐标系下解耦的非线性微分方程组, 通过对微分方程组直接积分得到了系统在新坐标系下的两个独立守恒量, 通过坐标反变换得到在原坐标系下的守恒量. 其次, 对解耦的Lagrange函数进行Taylor级数展开,

得到近似的运动微分方程组, 运用Adomian分解法得到系统在新坐标系下的近似解, 通过坐标反变换得到在原坐标系下的近似解, 最后对近似解作了讨论. 文中所研究的系统实际存在, 所用方法思想方法简单, 物理意义明确.

2 两自由度带电耦合振子系统及其运动微分方程

两个质量均为 m 的质点, 由三根劲度系数分别为 k_1, k_2, k_3 的轻质弹簧相连并置于两固定点处(如图1), 且

$$k_1 = k_3 = k, \quad k_2 = \frac{3}{2}k,$$

每根弹簧的自然长度都等于 b , 每质点都带有正电荷 q , 用 x_1, x_2 分别表示两质点相对其平衡位置的位移, 让两质点偏离平衡位置一定距离后无初速地释放, 使系统运动, 忽略阻力, 则系统的势能为

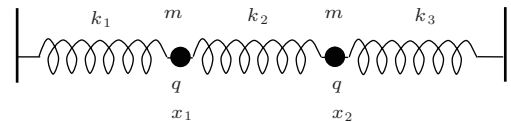


图1 两自由度带电耦合振子系统

* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 10932002)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: louzhimei@usx.edu.cn

$$V = \frac{1}{4}k(5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2) + \frac{\delta}{(b - x_1 + x_2)}, \quad (1)$$

其中 $\delta = q^2/4\pi\epsilon_0$, ϵ_0 为介质的介电常数. 系统的 Lagrange 函数可表示为

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{4}k(5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2) - \frac{\delta}{(b - x_1 + x_2)}. \quad (2)$$

由于 Lagrange 函数 (2) 存在耦合项, 若将 (2) 式直接代入 Lagrange 方程, 得到的运动微分方程必是相互耦合的非线性方程组, 为直接求得系统的守恒量及近似解带来了困难. 因此, 我们先进行坐标变换消去 (2) 式中的耦合项, 然后求得新坐标系下的守恒量、近似解, 再通过坐标反变换求得原坐标系下的守恒量和近似解. 设

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_2), \\ u_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2), \end{aligned} \quad (3)$$

则 (2) 式变为

$$L = \frac{m}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - 2ku_1^2 - \frac{1}{2}ku_2^2 - \frac{\delta}{(b - \sqrt{2}u_1)}. \quad (4)$$

将 (4) 式代入 Lagrange 方程, 可得新坐标系下系统解耦的运动微分方程

$$m\ddot{u}_1 = -4ku_1 - \frac{\sqrt{2}\delta}{(b - \sqrt{2}u_1)^2}, \quad (5a)$$

$$m\ddot{u}_2 = -ku_2, \quad (5b)$$

3 系统的两个独立守恒量

对 (5) 式直接积分, 可得系统的两个独立守恒量

$$I_1 = \frac{1}{2}m\dot{u}_1^2 + 2ku_1^2 + \frac{\delta}{(b - \sqrt{2}u_1)}, \quad (6a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m\dot{u}_2^2 + \frac{1}{2}ku_2^2. \quad (6b)$$

利用 (3) 式对 (6) 式进行坐标反变换, 可得在原坐标系下的两个独立守恒量

$$I_1 = \frac{1}{4}m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + k(x_1 - x_2)^2 + \frac{\delta}{(b - x_1 + x_2)}, \quad (7a)$$

$$I_2 = \frac{1}{4}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{4}k(x_1 + x_2)^2. \quad (7b)$$

很明显, 先通过坐标变换对 Lagrange 函数解耦, 得到新坐标系下的解耦的运动微分方程组, 再运用直接积分法得到新坐标系下的守恒量, 最后, 通过坐标反变换得到原坐标系下的守恒量的方法是比较方便的.

4 系统的近似解

对 (4) 式的最后一项在 $u_1 = 0$ 点附近进行 Taylor 级数展开

$$\frac{\delta}{(b - \sqrt{2}u_1)} = \frac{\delta}{b} + \frac{\sqrt{2}\delta}{b^2}u_1 + \frac{2\delta}{b^3}u_1^2 + \frac{2\sqrt{2}\delta}{b^4}u_1^3 + \dots, \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (4) 式, 得

$$L = \frac{m}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - 2ku_1^2 - \frac{1}{2}ku_2^2 - \left(\frac{\delta}{b} + \frac{\sqrt{2}\delta}{b^2}u_1 + \frac{2\delta}{b^3}u_1^2 + \frac{2\sqrt{2}\delta}{b^4}u_1^3 \right). \quad (9)$$

将 (9) 式代入 Lagrange 方程, 可得系统的运动微分方程

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= -4ku_1 \\ &\quad - \delta \left(\frac{\sqrt{2}}{b^2} + \frac{4}{b^3}u_1 + \frac{6\sqrt{2}}{b^4}u_1^2 \right), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$m\ddot{u}_2 = -ku_2. \quad (10b)$$

由 (10b) 式可直接写出解

$$u_2 = A_{20} \cos \omega t + B_{20} \sin \omega t, \quad (11)$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, A_{20} , B_{20} 为积分常数, 由初始条件确定. 设 $t = 0$ 时,

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_{10} = 0,$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_{20} = 0,$$

则

$$A_{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_{10} + x_{20}), \quad B_{20} = 0,$$

(11) 式简化为

$$u_2 = A_{20} \cos \omega t. \quad (12)$$

(10a) 式可改写成

$$\ddot{u}_1 = - \left(\frac{4k}{m} + \frac{4}{mb^3} \right) u_1 - \frac{6\sqrt{2}\delta}{mb^4} u_1^2 - \frac{\sqrt{2}\delta}{mb^2}, \quad (13)$$

(13) 式为一非线性微分方程, 其近似解可用 Adomian 分解法求得^[14-16]. 令

$$L = \frac{d^2}{dt^2}, \quad R = -\omega_1^2,$$

$$Nu_1 = c_1 u_1^2 = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \varphi = -\frac{\sqrt{2}\delta}{mb^2},$$

其中

$$\omega_1^2 = \frac{4k}{m} + \frac{4\delta}{mb^3}, \quad c_1 = -\frac{6\sqrt{2}\delta}{mb^4},$$

a_n 为 Adomian 多项式, 且

$$a_0 = u_{1,0}^2, \quad a_1 = 2u_{1,1}u_{1,0}, \\ a_{12} = u_{1,1}^2 + 2u_{1,1}u_{1,0}, \dots$$

则 (13) 式可以写成

$$Lu_1 = Ru_1 + Nu_1 + \varphi, \quad (14)$$

(14) 式的解分量为

$$u_{1,n+1} = L^{-1}Ru_{1,n} + c_1 L^{-1}a_n + L^{-1}\varphi, \quad (15)$$

利用 $t = 0$ 时,

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_{10} - x_{20}) = c_2, \\ \dot{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}) = 0,$$

得

$$u_{1,0} = c_2 + \frac{1}{2}\varphi t^2, \quad (16a)$$

$$u_{1,1} = \frac{1}{2}c_1 c_2^2 t^2 - \frac{1}{2}c_2 \omega_1^2 t^2 + \frac{1}{12}c_1 c_2 \varphi t^4 \\ - \frac{1}{24}\varphi \omega_1^2 t^4 + \frac{1}{120}c_1 \varphi^2 t^6, \quad (16b)$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{24}c_2 \omega_1^4 t^4 - \frac{1}{8}c_1 c_2^2 \omega_1^2 t^4 + \frac{1}{12}c_1^2 c_2^3 t^4 \\ + \frac{1}{720}\varphi \omega_1^4 t^6 + \frac{1}{45}c_1^2 c_2^2 \varphi t^6 - \frac{1}{45}c_1 c_2 \omega_1^2 \varphi t^6 \\ - \frac{1}{6720}c_1 \omega_1^2 \varphi^2 t^8 - \frac{1}{1344}c_1 \varphi^2 \omega_1^2 t^8 \\ + \frac{1}{560}c_1^2 c_2 \varphi^2 t^8 + \frac{1}{10800}c_1^2 \varphi^3 t^{10}, \quad (16c)$$

(13) 式的解为

$$u_1 = u_{1,0} + u_{1,1} + u_{1,2} + \dots \\ = c_2 + \frac{1}{2}\varphi t^2 - \frac{1}{2}c_2 \omega_1^2 t^2 + \frac{1}{2}c_1 c_2^2 t^2 + \frac{1}{12}c_1 c_2 \varphi t^4 \\ - \frac{1}{24}\varphi \omega_1^2 t^4 + \frac{1}{24}c_2 \omega_1^4 t^4 - \frac{1}{8}c_1 c_2^2 \omega_1^2 t^4 \\ + \frac{1}{12}c_1^2 c_2^3 t^4 + \frac{1}{120}c_1 \varphi^2 t^6 + \frac{1}{720}\varphi \omega_1^4 t^6 \\ - \frac{1}{45}c_1 c_2 \omega_1^2 \varphi t^6 + \frac{1}{45}c_1^2 c_2^2 \varphi t^6 \\ - \frac{1}{6720}c_1 \omega_1^2 \varphi^2 t^8 - \frac{1}{1344}c_1 \varphi^2 \omega_1^2 t^8 \\ + \frac{1}{560}c_1^2 c_2 \varphi^2 t^8 + \frac{1}{10800}c_1^2 \varphi^3 t^{10} \\ + \dots, \quad (17)$$

忽略 t^6 及以上项, (17) 式可简化为

$$u_1 = c_2 \cos \omega_1 t + \frac{1}{2}\varphi t^2 + \frac{1}{2}c_1 c_2^2 t^2 + \frac{1}{12}c_1 c_2 \varphi t^4 \\ - \frac{1}{24}\varphi \omega_1^2 t^4 - \frac{1}{8}c_1 c_2^2 \omega_1^2 t^4 + \frac{1}{12}c_1^2 c_2^3 t^4 \\ = c_2 \cos \omega_1 t + y(t), \quad (18)$$

其中

$$y(t) = \frac{1}{2}\varphi t^2 + \frac{1}{2}c_1 c_2^2 t^2 + \frac{1}{12}c_1 c_2 \varphi t^4 - \frac{1}{24}\varphi \omega_1^2 t^4 \\ - \frac{1}{8}c_1 c_2^2 \omega_1^2 t^4 + \frac{1}{12}c_1^2 c_2^3 t^4.$$

利用 (3) 式对 (18) 式和 (12) 式进行坐标反变换, 可得系统的近似解

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(c_2 \cos \omega_1 t + y(t) + A_{20} \cos \omega t), \quad (19a)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(A_{20} \cos \omega t - c_2 \cos \omega_1 t - y(t)). \quad (19b)$$

由于静电场力的作用, 使 (19) 式中的 ω_1 与 ω 间一般不存在整数比的关系, 解 (19) 式不再具有周期性.

当系统不带电时, 即 $\delta = 0$, 使

$$c_1 = \varphi = y(t) = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2\omega,$$

则 (19) 式简化为

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(c_2 \cos 2\omega t + A_{20} \cos \omega t), \quad (20a)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(A_{20} \cos \omega t - c_2 \cos 2\omega t). \quad (20b)$$

(20) 式是不带电的两自由度耦合振子系统的精确解, 此时, 系统的解简化为频率比为 2 : 1 的两种谐振动的迭加, 消去时间 t 可得到两质点位置坐标间的如下关系:

$$(x_1 + x_2)^2 = \frac{\sqrt{2}A_{20}^2}{2c_2}(x_1 - x_2) + A_{20}^2, \quad (21)$$

若将 $\delta = 0$ 直接代入 (10) 式中, 在相同的初始条件下, 可得到与 (20) 式相同的解.

5 结 论

两自由度带电耦合振子系统是一典型而实际的力学系统, 广泛存在于力学、振动学、原子与分子物理等各个领域, 其守恒量与近似解的研究具有实际应用价值. 本文用三根轻质弹簧和两个质点构建两自由度带电耦合振子系统, 通过坐标变换先消去 Lagrange 函数中的耦合项, 运用直接积分法和 Adomian 分解法分别求得新坐标系下的守恒量和近似解, 再通过坐标反变换求得在原坐标系下的

守恒量和近似解, 方法简单, 物理意义明确, 值得推广.

参考文献

- [1] Lou Z M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 220201 (in Chinese)[楼智美 2013 物理学报 **62** 220201]
- [2] Lou Z M, Mei F X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110201 (in Chinese)[楼智美, 梅凤翔 2012 物理学报 **61** 110201]
- [3] Ding G T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064502
- [4] Ding G T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064501
- [5] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]
- [6] Zhang Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 214501 (in Chinese)[张毅 2012 物理学报 **61** 214501]
- [7] Lou Z M 2007 *Chin. Phys.* **16** 1182
- [8] Wang X X, Han Y L, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 020201
- [9] Cui J C, Han Y L, Jia L Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 080201
- [10] Zhao L, Fu J L, Chen B Y 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040201
- [11] Nucci M C 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1375
- [12] Choudhuri A, Ghosh S, Talukdar B 2008 *J. Phys.* **70** 657
- [13] Lutzky M 1998 *Int. J. Non-Linear Mech.* **33** 393
- [14] Fang J Q, Yao W G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1375 (in Chinese)[方锦清, 姚伟光 1993 物理学报 **42** 1375]
- [15] Fang J Q 1993 *Progress in Phys.* **13** 441 (in Chinese) [方锦清 1993 物理学进展 **13** 441]
- [16] Hosseini M M 2006 *J. Comput. l Appl. Math.* **197** 495

Conserved quantities and approximate solutions of a two-dimensional charged coupled oscillator system*

Lou Zhi-Mei[†]

(Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

(Received 4 January 2014; revised manuscript received 20 January 2014)

Abstract

Coupled terms are present in the Lagrangian and the corresponding differential equations of a two-dimensional charged oscillator system are nonlinearly coupled. Firstly, the coupled terms in the Lagrangian are eliminated by transformation of coordinates; secondly, the conserved quantities in new coordinates are obtained by direct integral method, and the approximate solutions are obtained by Abdomina decomposition method. Finally, the conserved quantities and the approximate solutions can be expressed in original coordinates by using the inverse transform of the coordinates. The discussion of the approximate solutions is also given in this paper.

Keywords: two-dimensional charged coupled oscillator system, conserved quantities, approximate solutions

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.63.090202

* Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10932002).

† Corresponding author. E-mail: louzhimei@usx.edu.cn