

时滞惯性神经网络的稳定性和分岔控制*

朱霖河 赵洪涌†

(南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

(2013年12月5日收到; 2014年1月17日收到修改稿)

针对一类二阶时滞惯性神经网络模型, 提出一种基于时滞反馈的分岔控制方法. 利用时滞微分方程动力学理论, 给出反馈控制系统的稳定性以及发生 Hopf 分岔的判别条件. 数值仿真显示所设计的控制器不仅能有效延迟网络分岔的发生, 还能扩大稳定域并改善网络的收敛速度.

关键词: 时滞惯性神经网络, 分岔控制, 稳定性, Hopf 分岔

PACS: 02.30.Oz, 02.30.ry, 05.10.-a, 47.20.ky

DOI: 10.7498/aps.63.090203

1 引言

近年来, 由于神经网络理论在分类、联想记忆、并行运算和优化等方面的广泛应用而引起了许多学者的关注^[1-4]. 在神经网络的理论研究中, 非线性动力学如稳定性、分岔和混沌是其重要组成部分, 对它的研究不仅有助于理解神经网络数学理论依据和背景, 而且为神经网络的开发、设计和应用提供可能的途径. 目前, 在神经网络稳定性和分岔方面, 已取得了许多重要成果^[5-10].

1997年, Wheeler 和 Schieve^[11]首次提出了二阶(三阶)惯性神经网络模型, 并对其平衡点的稳定性、分岔、混沌现象进行了讨论. 在文献^[12]中, 运用规范型理论讨论了一类二阶神经网络的 Hopf 分岔及分岔方向等问题. 赵和于等^[13]利用灵敏度原理和分岔理论研究了二阶惯性神经网络的分岔参数选取、静态分岔和动态分岔问题, 并给出了一些新的判别准则. 在文献^[14]中, 利用“马蹄铁”拓扑理论和基本符号动态理论, 详细讨论了二阶惯性神经网络的混沌问题. 然而, 前面成果均未考虑时滞的影响. 在神经网络的硬件实现时, 受放大器开关速度和信号传输速度的限制, 时滞的存在是不可避免的. 时滞对神经网络的动态性质有显著的影响,

可导致网络产生振荡和不稳定现象, 从而破坏原有的网络性能等. 因此, 研究含时滞神经网络的动力学行为, 更有实际意义. 最近, 文献^[15,16]讨论了几类惯性时滞神经网络稳定性、分岔及其混沌问题, 并给出了许多有意义的结论. Liu 等^[17]研究了如下二阶惯性时滞神经网络模型:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx - c \tanh[x(t - \tau)] = 0, \quad (1)$$

详细分析了时滞导致网络失稳进而发生 Hopf 分岔原因, 并给出了一些新结果. Hopf 分岔, 即是由稳定的平衡点到周期振荡的一种失稳现象. 本文感兴趣的是, 如何通过反馈控制器的作用, 来镇定不稳定时滞网络或者改善网络的稳定性, 因为这个问题在对语音识别、机械控制, 图像处理等领域中, 由于时滞造成的 Hopf 现象的控制有着十分重要的意义^[18-20]. 本文关心两个问题: 第一, 如果系统中参数均为给定, 那么对于反馈控制器中时滞与原系统中时滞相等和不等两种情形, 如何设计合适的反馈控制器来改善系统稳定性; 第二, 如果系统中 a 或时滞为待定参数, 那么对于反馈控制器中时滞与原系统中时滞相等的情形, 又如何设计反馈控制器来扩大稳定范围.

基于以上分析, 本文将对二阶惯性时滞神经网络

* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 11032009)、国家自然科学基金(批准号: 61174155)和江苏省“青蓝工程”基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hongyongz@126.com

络模型 (1), 施加如下形式的时滞反馈控制器:

$$u(t) = k(x(t) - x(t - \tau_2)),$$

对相应的闭环系统, 利用时滞微分方程稳定性和分岔理论, 将深入讨论反馈控制参数 k 以及控制器中的时滞 τ_2 对系统稳定性和 Hopf 分岔的影响情况. 在不改变系统平衡态的情况下, 通过理论证明给出系统渐进稳定的控制条件. 最后运用数值仿真验证理论分析的正确性.

2 时滞反馈控制系统的稳定性和分岔分析

考虑如下受控二阶惯性神经网络系统:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - c \tanh[x(t - \tau_1)] \\ = k[x(t) - x(t - \tau_2)], \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $a > 0, b > 0$; x 为神经元的状态; c 代表网络的连接强度; k 为反馈控制参数; τ_1, τ_2 为时间延迟.

2.1 控制器中时滞与原系统中时滞相等: $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ 情形

当 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ 时系统 (2) 变为

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - c \tanh[x(t - \tau)] \\ = k[x(t) - x(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (3)$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1$, 则系统 (3) 化为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - ax_2 + c \tanh[x_1(t - \tau)] \\ &\quad + k[x_1(t) - x_1(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (4)$$

在零平衡点处对系统 (4) 线性化得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (-b + k)x_1 - ax_2 + (c - k)x_1(t - \tau), \end{aligned} \quad (5)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + a\lambda + (k - c)e^{-\lambda\tau} + b - k = 0. \quad (6)$$

引理 1 若 $b > c$, 则当 $\tau = 0$ 时系统 (3) 的零平衡点是渐近稳定的.

证明 当 $\tau = 0$ 时, (6) 式变为 $\lambda^2 + a\lambda + b - c = 0$. 因为 $a > 0, b - c > 0$, 所以特征方程 (6) 没有零特征根且所有根具有负实部. 根据稳定性理论知, 当 $\tau = 0$ 时, 系统 (3) 的零平衡点是渐近稳定的.

下面针对反馈控制参数 k 的不同取值, 讨论受控系统 (3) 的稳定性.

1) 在系统参数 $a > 0$ 待定情况下, 选取反馈控制参数 k 满足 $k > (b + c)/2$.

类似于文献 [17] 证明可得下面定理:

定理 1 在系统参数 $a > 0$ 待定而 $b > c$ 情况下, 若控制率 k 满足 $k > (b + c)/2$, 则

i) 当 $\tau \in [0, \tau^*)$ 时, 系统 (3) 的零平衡点是渐近稳定的.

ii) 当 $\tau > \tau^*$ 时, 系统 (3) 的零平衡点是不稳定的.

iii) $\tau = \tau^*$ 是系统 (3) 的分岔值, 这里

$$\begin{aligned} \tau^* &= \min \left\{ \frac{1}{\omega} \left(\arccos \frac{\omega^2 + k - b}{k - c} + 2j\pi \right) \right\}, \\ &\quad (j = 0, 1, 2, \dots), \\ \omega &= \left\{ \frac{-[2(k - b) + a^2]}{2} + \frac{1}{2} \left([2(k - b) + a^2]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4[(k - b)^2 - (k - c)^2] \right)^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

2) 在时滞 $\tau \geq 0$ 待定情况下, 选取反馈控制参数 k 满足 $k = \frac{b + c}{2}$.

定理 2 在时滞 $\tau \geq 0$ 待定情况下, 若 $b > c, a^2 - b + c > 0$, 则当 $k = \frac{b + c}{2}$ 时, 系统 (3) 的零平衡点对 $\forall \tau \geq 0$ 是渐近稳定的.

证明 设特征方程 (6) 有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ($\omega > 0$), 将其代入 (6) 式中并分离实部和虚部得

$$\begin{aligned} (k - c) \cos \omega\tau &= \omega^2 + k - b, \\ (k - c) \sin \omega\tau &= \omega a. \end{aligned} \quad (7)$$

进一步化为

$$\begin{aligned} \omega^4 + [2(k - b) + a^2]\omega^2 + (k - b)^2 \\ - (k - c)^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

令 $z = \omega^2$, 则 (8) 式成为

$$\begin{aligned} z^2 + [2(k - b) + a^2]z + (k - b)^2 \\ - (k - c)^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

当 $k = \frac{b + c}{2}$ 且 $a^2 - b + c > 0$ 时, 可得

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -a^2 + b - c < 0.$$

这意味着方程 (8) 没有正根, 因此特征方程 (6) 没有纯虚根. 结合引理 1 可知, 系统 (3) 的零平衡点对 $\forall \tau \geq 0$ 是渐近稳定的.

3) 在系统参数均为给定情况下, 选取反馈控制参数 k 满足 $k < \frac{b+c}{2}$.

定理 3 若 $b > c$, 则当 $k < \frac{b+c}{2}$ 且

$$k + \sqrt{(2k-b-c)(c-b)} < b - \frac{a^2}{2}$$

时, 存在两组序列 $\{\tau_{n,1}\}$ 和 $\{\tau_{n,2}\}$, 使得当 $\tau_{0,1} < \tau_{0,2}$ 时, 系统 (3) 的稳定性发生有限次切换, 并最终不稳定. 即存在正整数 l 使得 $\tau_{0,1} < \tau_{0,2} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \dots < \tau_{l-1,1} < \tau_{l-1,2} < \tau_{l,1}$, 此时, 系统 (3) 的稳定性发生 l 次切换, 并最终当 $\tau > \tau_{l,1}$ 时系统不稳定.

证明 类似定理 2 的证明, 在满足定理条件下, 方程 (8) 有两个正根, 即

$$\omega_1 = \left\{ \frac{-[2(k-b)+a^2]}{2} + \frac{1}{2} \left([2(k-b)+a^2]^2 - 4[(k-b)^2 - (k-c)^2] \right)^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$\omega_2 = \left\{ \frac{-[2(k-b)+a^2]}{2} - \frac{1}{2} \left([2(k-b)+a^2]^2 - 4[(k-b)^2 - (k-c)^2] \right)^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

容易验证 ω_1, ω_2 都是单根.

由 (7) 式可得如下临界时滞:

$$\tau_{n,1} = \frac{1}{\omega_1} \left[\arcsin \left(\frac{\omega_1 a}{k-c} \right) + 2n\pi \right],$$

$$\tau_{n,2} = \frac{1}{\omega_2} \left[\arcsin \left(\frac{\omega_2 a}{k-c} \right) + 2n\pi \right],$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

进一步得

$$\left[\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_{n,1}, \lambda=i\omega_1}^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{[2(k-b)+a^2]^2 - 4[(k-b)^2 - (k-c)^2]}}{(k-c)^2}$$

$$> 0,$$

$$\left[\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_{n,2}, \lambda=i\omega_2}^{-1}$$

$$= \frac{-\sqrt{[2(k-b)+a^2]^2 - 4[(k-b)^2 - (k-c)^2]}}{(k-c)^2}$$

$$< 0.$$

由上述分析可知, 当 $\tau = \tau_{n,1}$ 时, 系统 (3) 有一对特征根正从复平面的左半平面穿过虚轴到达右半平面; 而当 $\tau = \tau_{n,2}$ 时, 有一对特征根正从复平

面的右半平面穿过虚轴到达左半平面. 因此, 当时滞 τ 从零逐渐增大到无穷大时, 复平面的右半平面上的特征根将会发生变化, 从而使零平衡点发生稳定性切换.

进一步, 我们可以证明这种稳定性切换只可能发生有限次. 即存在正整数 l , 使得

$$\tau_{0,1} < \tau_{0,2} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \dots < \tau_{l-1,1} < \tau_{l-1,2} < \tau_{l,1}. \quad (11)$$

当 τ 由 0 变为 $\tau_{l,1}$ 时, 系统 (3) 的零平衡点将由稳定变为不稳定再回到稳定; 而当 $\tau > \tau_{l,1}$ 时, 系统 (3) 的零平衡点最终不稳定. 事实上,

$$\tau_{n+1,1} - \tau_{n,1} = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad \tau_{n+1,2} - \tau_{n,2} = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

且 $\omega_1 > \omega_2$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega_1} < \frac{2\pi}{\omega_2}$, 故必定存在 l 使得

$$\tau_{l-1,1} < \tau_{l-1,2} < \tau_{l,1} < \tau_{l+1,1} < \tau_{l,2}.$$

根据上面的分析, 当 $\tau > \tau_{l,1}$ 时, 系统 (3) 的零平衡点最终不稳定.

2.2 控制器中时滞与原系统中时滞不相等: $\tau_1 \neq \tau_2$ 情形

在零平衡点处对 (2) 线性化得

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = (-b+k)x_1 - ax_2 + cx_1(t - \tau_1) - kx_1(t - \tau_2). \quad (12)$$

特征方程为

$$\lambda^2 + a\lambda - ce^{-\lambda\tau_1} + ke^{-\lambda\tau_2} + b - k = 0. \quad (13)$$

引理 2^[21] 考虑方程

$$(z^2 + pz + q)e^z + r = 0, \quad (14)$$

则方程 (14) 的根均具有负实部的充要条件为 $r \geq 0$ 且 $(r \sin a_n)/pa_n < 1$ 或者 $-q < r < 0$ 且 $(r \sin a_n)/pa_n < 1, a_\kappa (\kappa \geq 0)$ 是方程 $\cot a = (a^2 - q)/ap$ 的根, $a_\kappa \in (\kappa\pi, \kappa\pi + 1)$. 其中正整数 n 的定义如下:

i) 如果 $r \geq 0$ 且 $p^2 \geq 2q$, 则 $n = 1$.

ii) 如果 $r \geq 0$ 且 $p^2 < 2q$, 则 n 为使得 a_κ 最接近于 $\sqrt{q - p^2/2}$ 的奇数 κ .

iii) 如果 $r < 0$ 且 $p^2 \geq 2q$, 则 $n = 2$.

iv) 如果 $r < 0$ 且 $p^2 < 2q$, 则 n 为使得 a_κ 最接近于 $\sqrt{q - p^2/2}$ 的偶数 κ .

以下对 $\tau_2 \neq 0$, 我们分 $\tau_1 = 0$ 和 $\tau_1 > 0$ 两种情况进行讨论.

1) 当 $\tau_2 \neq 0, \tau_1 = 0$ 时, 我们有如下结论:

定理 4 若 $k < 0, b > c$ 且 $\frac{k\tau_2 \sin \psi_n}{a\psi_n} < 1, \psi_n$ 为方程

$$\cot \psi = \frac{\psi^2 - (b - k - c)\tau_2^2}{\psi a \tau_2}$$

的根, $\psi_n \in (\kappa\pi, \kappa\pi + 1)$, 其中 n 定义如下:

- i) 若 $k \geq b - c - a^2/2$, 则 $n = 2$;
- ii) 若 $k < b - c - a^2/2$, 则 n 为使得 ψ_n 最接近于 $\tau_2 \sqrt{b - k - c - a^2/2}$ 的偶数.

则对 $\tau_2 \neq 0$, 当 $\tau_1 = 0$ 时, 系统 (2) 的零平衡点是渐近稳定的.

证明 设 $z = \lambda\tau_2$, 将其代入 (13) 并整理得

$$[z^2 + a\tau_2 z + (b - k - c)\tau_2^2] e^z + k\tau_2^2 = 0.$$

记 $p = a\tau_2, q = (b - k - c)\tau_2^2, r = k\tau_2^2$, 结合引理 2 和上述条件可知, 方程 (13) 的根均具有负实部, 从而当 $\tau_1 = 0$ 时, 系统 (2) 的零平衡点是渐近稳定的. 定理证毕.

2) 下面讨论 $\tau_2 \neq 0$ 且 $\tau_1 > 0$ 时, 系统 (2) 的稳定情况.

设特征方程 (13) 有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ($\omega > 0$), 将其代入 (13) 并分离实部和虚部得

$$\begin{aligned} c \cos \omega \tau_1 &= -\omega^2 - k + b + k \cos \omega \tau_2, \\ c \sin \omega \tau_1 &= -a\omega + k \sin \omega \tau_2. \end{aligned} \quad (15)$$

进一步可得

$$\begin{aligned} \omega^4 + [2(k - b) + a^2 - 2k \cos \omega \tau_2] \omega^2 - 2ak\omega \sin \omega \tau_2 \\ + (k - b)^2 + k^2 - c^2 - 2k(k - b) \cos \omega \tau_2 = 0. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^4 + [2(k - b) + a^2 - 2k \cos \omega \tau_2] \omega^2 \\ &\quad - 2ak\omega \sin \omega \tau_2 + (k - b)^2 + k^2 - c^2 \\ &\quad - 2k(k - b) \cos \omega \tau_2 = 0, \end{aligned}$$

若 $|c| > b$, 则 $f(0) < 0$. 由于 ω^4, ω^2 及 ω 的系数都是有界的且 $f(\omega)$ 为其定义域上的连续函数, 从而随着 ω 的增大, 必定存在 $\omega_0 > 0$, 使得 $f(\omega_0) = 0$.

将 $\omega = \omega_0$ 代入 (15) 式中的第一式得

$$\begin{aligned} \tau_1^j &= \frac{1}{\omega_0} \left(\arccos \frac{-\omega_0^2 - k + b + k \cos \omega_0 \tau_2}{c} + 2j\pi \right), \\ j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

不妨记 $\tau_1^* = \min \tau_1^j = \tau_1^0$.

对特征方程 (13) 关于 τ_1 求导得

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d\lambda}{d\tau_1} \right]^{-1} \\ &= \frac{-2\lambda - a - c\tau_1 e^{-\lambda\tau_1} + k\tau_2 e^{-\lambda\tau_2}}{c\lambda e^{-\lambda\tau_1}} \\ &= \frac{(-2\lambda - a - \tau_2\lambda^2 - a\tau_2\lambda - \tau_2b + \tau_2k) e^{\lambda\tau_1}}{c\lambda} \\ &\quad + \frac{\tau_2c - \tau_1c}{c\lambda}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\left[\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right]^{-1} \Big|_{\tau_1=\tau_1^*, \lambda=i\omega_0} \\ &= \frac{(k\tau_2 - b\tau_2 - a)(k \sin \omega_0 \tau_2 - a\omega_0)}{c^2\omega_0} \\ &\quad + \frac{(\omega_0\tau_2 - a\tau_2 - 2)(\omega_0^2 + k - b - k \cos \omega_0 \tau_2)}{c^2}. \end{aligned}$$

若

$$\left[\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right]^{-1} \Big|_{\tau_1=\tau_1^*, \lambda=i\omega_0} < 0,$$

则特征方程 (13) 在 $\tau_1 = \tau_1^*$ 时有且仅有一对纯虚根, 其他特征根均具有负实部, 并且随着 τ_1 的增大, $\operatorname{Re} \lambda$ 减小.

若

$$\left[\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right]^{-1} \Big|_{\tau_1=\tau_1^*, \lambda=i\omega_0} > 0,$$

则当 $\tau_1 > \tau_1^*$ 时, 特征方程 (13) 增加一对正实部根.

通过上述分析, 我们得到下面的结论:

定理 5 若 a, b, c, k, τ_2 满足定理 4 中的条件且 $|c| > b$ 成立, 则

i) 当

$$\left[\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right]^{-1} \Big|_{\tau_1=\tau_1^*, \lambda=i\omega_0} < 0$$

时, 系统 (2) 的零平衡点对 $\forall \tau_1 \geq 0$ 且 $\tau_1 \neq \tau_1^*$ 是渐近稳定的.

ii) 当

$$\left[\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right]^{-1} \Big|_{\tau_1=\tau_1^*, \lambda=i\omega_0} > 0$$

时, 对 $\forall \tau_1 \in [0, \tau_1^*)$, 系统 (2) 的零平衡点对是渐近稳定的; 对 $\forall \tau_1 > \tau_1^*$ 是不稳定的, 且 $\tau_1 = \tau_1^*$ 是系统 (2) 的分岔值.

3 数值模拟

例1 在系统(3)中, 取定参数 $a = 1.6, b = 0.5, c = -2$. 下面, 我们考虑受控系统(3)中反馈控制参数 k 对系统稳定性的影响. 首先分析控制器中时滞与原系统时滞相等情况, 即 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. 根据定理1, 通过简单计算可得, 控制参数 $k > -0.75$. 通过调节反馈控制参数 k , 我们可以得到系统(3)相应的分岔临界值 τ^* 及其稳定区域, 如表1所示.

表1 系统(3)的分岔临界值 τ^* 与稳定域随反馈控制系数 k 减小的变化情况

反馈控制系数 k	分岔临界值 τ^*	稳定区域
0	1.0102	[0, 1.0102)
-0.4	1.5132	[0, 1.5132)
-0.6	2.2142	[0, 2.2142)
-0.72	4.0575	[0, 4.0575)

由表1不难发现, 对无控系统(1)引进恰当的反馈控制器可以明显的扩大原系统的稳定区域; 并且通过适当的减小控制器中反馈控制系数 k , 可以使得受控系统(3)的稳定区域进一步增大. 根据定理1, 当 $\tau = 0.9 < \tau^*$ 时, 系统(3)的零平衡点局部渐近稳定(如图1), 并且从图1中, 我们可以发现受控系统(3)的收敛速度明显比无控系统(1)的收敛速度要快; 进一步调节反馈控制系数 k 使其逐渐减小, 可以不断加快受控系统(3)的收敛速度. 对于无控系统(1), 根据定理1, 当 $\tau = 1.02 > \tau^*$ 时, 零平衡点不稳定且系统发生周期振荡; 然而, 对于受控系统(3), 根据定理1, 当 $\tau = 1.02 > \tau^*$ 时, 零平衡点是局部渐近稳定的, 并且随着反馈控制系数 k 的减小, 系统(3)的收敛速度加快(如图2). 由此可见, 时滞反馈控制器有效的扩大了原系统的稳定区域, 并且加快了系统的收敛速度. 另外, 对于受控系统(3), 当 $k = -0.4, \tau = 1.52 > \tau^*$ 时, 根据定理1, 系统(3)的零平衡点不稳定且系统发生周期振荡; 而当 $k = -0.6, -0.72, \tau = 1.52 < \tau^*$ 时, 系统(3)零平衡点是渐近稳定的, 并且随着反馈控制系数 k 的减小, 系统(3)的收敛速度加快(如图3). 由此可见, 通过调节反馈控制系数 k 有助于扩大受控系统的稳定区域, 改善收敛速度. 最后, 我们考虑 $k = -0.75$ 的情形. 显然, 参数满足定理3的条件, 从而系统(3)对 $\forall \tau \geq 0$ 都是渐近稳定的, 显然比无控系统(1)及上述受控系统的稳定域都要大. 不妨取

$\tau = 4.1$, 可见系统(3)的零平衡点是局部渐近稳定的(如图4), 且扩大了受控系统的稳定区域. 进一步, 在反馈控制参数 k 取定情况下, 且在系统(3)的同一稳定区域内, 我们发现随着时滞 τ 的增加, 网络的收敛速度变慢(如图5). 数值模拟验证了理论的正确性, 并且我们发现通过调节反馈率 k , 能有效地控制网路的分岔行为, 改善其稳定性, 同时加快系统的收敛速度, 具有一定的实际应用价值.

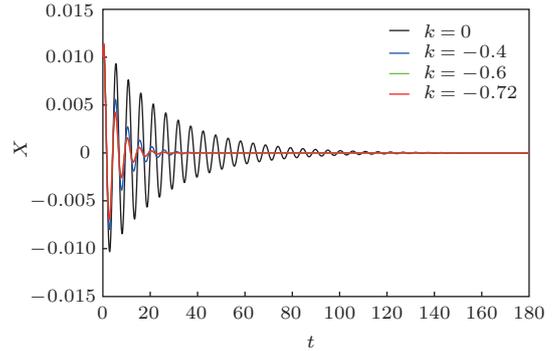


图1 $\tau = 0.9 < \tau^*$ 且反馈控制系数 k 变化时, 受控系统(3)在零平衡点处渐近稳定

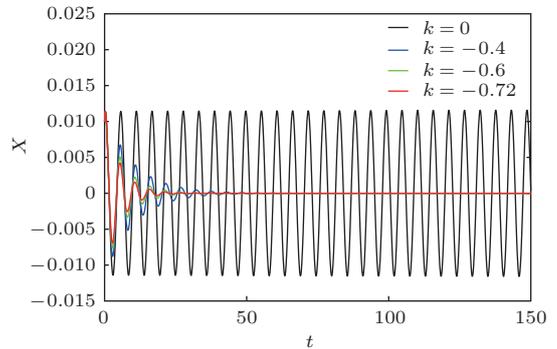


图2 $\tau = 1.02$ 时, 系统(3)的零平衡点稳定性随反馈控制系数 k 减小的变化情况

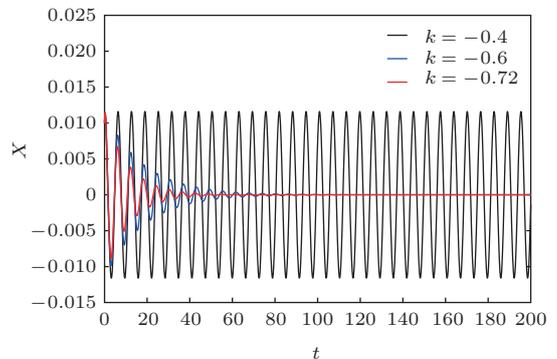


图3 $\tau = 1.52$ 时, 系统(3)的零平衡点稳定性随反馈控制系数 k 减小的变化情况

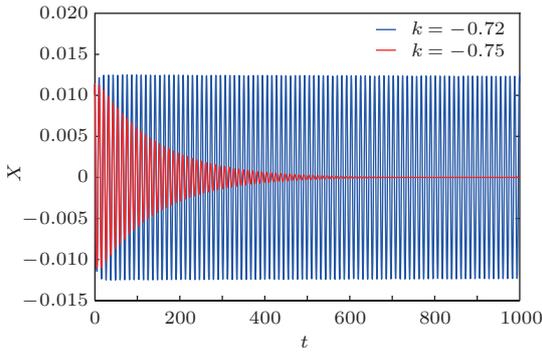


图4 $\tau = 4.1$ 时, 系统(3)的零平衡点稳定性随反馈控制系数 k 减小的变化情况

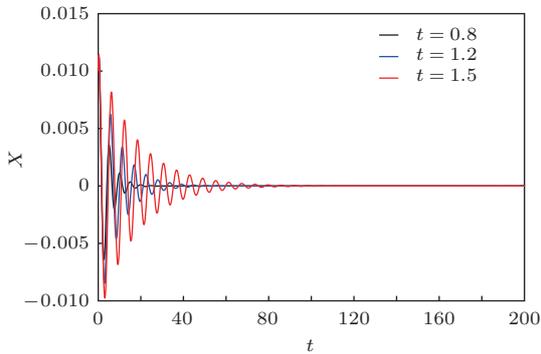


图5 $k = -0.6, \tau = 0.8, 1.2, 1.5 < \tau^*$ 时, 受控系统(3)在零平衡点处渐近稳定

对 $\tau_1 \neq \tau_2$, 我们进一步研究时滞反馈对系统(2)稳定性的影响, 不妨取定 $k = -4$, 参数 a, b, c 的取值不变. 当反馈时滞 τ_2 变化时, 根据定理5, 此时容易得到系统(2)相应的分岔临界值 τ_1^* 及其稳定区域, 如表2所示.

表2 系统(2)的分岔临界值 τ_1^* 与稳定域随反馈时滞 τ_2 增大的变化情况

反馈时滞 τ_2	分岔临界值 τ_1^*	稳定区域
0	1.0102	[0, 1.0102)
0.8	4.5511	[0, 4.5511)
1.0	5.4675	[0, 5.4675)
1.2	6.3780	[0, 6.3780)

由表2不难发现, 对无控系统(1)引进恰当的时滞反馈控制器可以明显的扩大原系统的稳定区域; 并且通过适当的增加控制器中反馈时滞 τ_2 , 可以使得受控系统(2)的稳定区域进一步增大. 根据定理5, 当 $\tau_1 = 0.9 < \tau_1^*$ 时, 系统(2)的零平衡点局部渐近稳定(如图6), 并且从图6中, 我们可以发现受控系统(2)的收敛速度明显比无控系统(1)的

收敛速度要快. 对于无控系统(1), 根据定理1, 当 $\tau_1 = 1.02 > \tau_1^*$ 时, 零平衡点不稳定且系统发生周期振荡; 然而, 对于受控系统(2), 根据定理5, 当 $\tau_1 = 1.02 > \tau_1^*$ 时, 零平衡点是局部渐近稳定的, 并且随着反馈时滞 τ_2 的减小, 系统(2)的收敛速度加快(如图7). 另外, 对于无控系统(2), 根据定理5, 当 $\tau_2 = 0.8$ 且 $\tau_1 = 4.57 > \tau_1^*$ 时, 系统(2)的零平衡点不稳定且系统发生周期振荡; 而当 $\tau_2 = 1, 1.2$ 且 $\tau_1 = 4.57 < \tau_1^*$ 时, 系统(2)零平衡点是渐近稳定的, 并且随着反馈时滞 τ_2 的减小, 系统(2)的收敛速度加快(如图8). 进一步, 在反馈时滞 τ_2 取定情况下, 且在系统(2)的同一稳定区域内, 我们发现随着时滞 τ_1 的增加, 网络的收敛速度变慢(如图9). 在参数 a, b, c 为上面取值并固定 $k = -4$ 情况下, 通过对反馈时滞 τ_2 反复取值并进行数值模拟, 我们得到, 随着 τ_2 的取值不断增大, 系统(2)的稳定域也在不断扩大; 而在反馈时滞 τ_2 取定情况下, 在同一稳定区域内, 随着 τ_1 的增加, 网络的收敛速度有所变慢. 由此可以看出, 通过调节反馈时滞 τ_2 , 能有有效的控制网络的岔行为, 改变系统的稳定性.

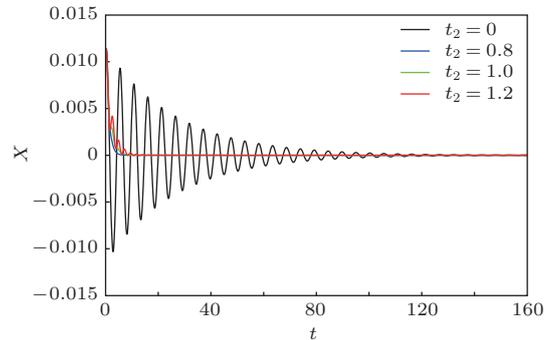


图6 $\tau = 0.9 < \tau_1^*$ 且反馈时滞 τ_2 变化时, 受控系统(2)在零平衡点处渐近稳定

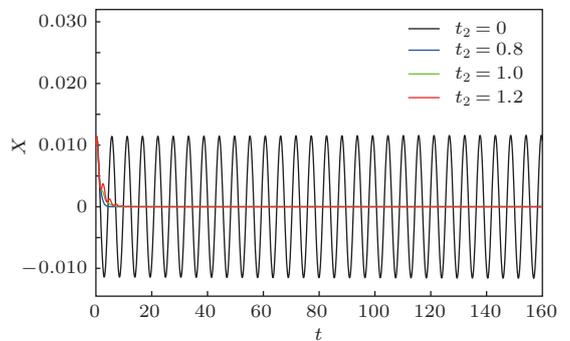


图7 $k = -4$ 时, 系统(2)的零平衡点稳定性随反馈时滞 τ_2 增大的变化情况

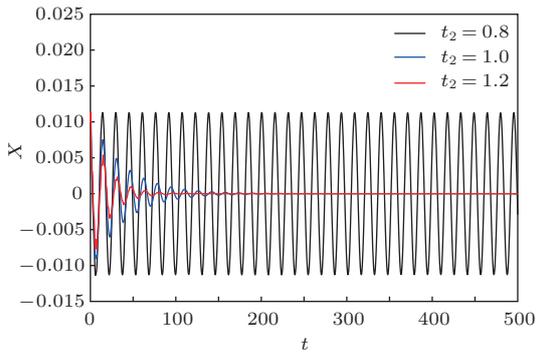


图8 $k = -4$ 时, 系统(2)的零平衡点稳定性随反馈时滞 τ_2 增大的变化情况

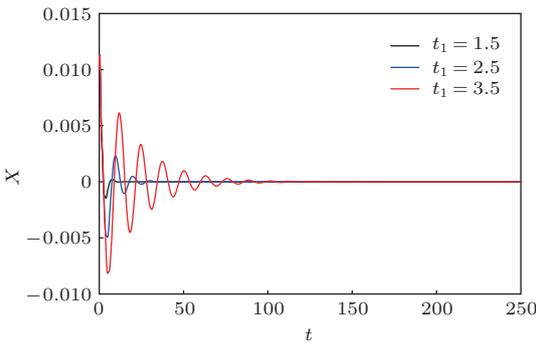


图9 $\tau_2 = 0.8, \tau_1 = 1.5, 2.5, 3.5 < \tau_1^*$ 时, 受控系统(2)在零平衡点处渐近稳定

例2 在系统(3)中, 取定参数 $a = 2, b = 1, c = -2, k = -7.8$, 并代入(10)可得以下两组临界时滞:

$$\tau_{n,1} = 1.6104, 3.7416, 6.0014, 8.1742, 10.3470 \dots$$

$$\tau_{n,2} = 2.3480, 5.0933, 7.8387, 10.5840, 13.3294 \dots$$

它们可按大小顺序排列为

$$0 < \tau_{0,1} < \tau_{0,2} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,1} < \tau_{2,2} < \tau_{3,1} < \tau_{4,1} < \tau_{3,2} \dots$$

在这一部分的讨论中, 不失一般性, 我们可以在下列关于临界时滞的各数值区间

$$[0, \tau_{0,1}), (\tau_{0,1}, \tau_{0,2}), (\tau_{0,2}, \tau_{1,1}), (\tau_{1,1}, \tau_{1,2}), (\tau_{1,2}, \tau_{2,1}), (\tau_{2,1}, \tau_{2,2}), (\tau_{2,2}, \tau_{3,1}), (\tau_{3,1}, \tau_{4,1})$$

内分别取某个时滞 τ , 根据定理3, 可得表3.

由表3, 显然, 系统(3)发生七次稳定性切换, 当 $\tau > \tau_{4,1}$ 时系统稳定性不再发生切换, 并最终保持不稳定, 从而验证了定理3的正确性.

表3 不同时滞对应系统(3)的动力学特征

临界时滞	时滞取值及系统(3)相应的动力学特征
$\tau_{0,1} = 1.6104$	当 $\tau = 1.575 \in [0, \tau_{0,1})$ 时, 零平衡点渐近稳定(图10);
$\tau_{0,2} = 2.3480$	当 $\tau = 2.335 \in (\tau_{0,1}, \tau_{0,2})$ 时, 零平衡点不稳定并出现周期振荡(图11).
$\tau_{1,1} = 3.7416$	当 $\tau = 2.4 \in (\tau_{0,2}, \tau_{1,1})$ 时, 零平衡点渐近稳定(图12).
$\tau_{1,2} = 5.0933$	当 $\tau = 3.85 \in (\tau_{1,1}, \tau_{1,2})$ 时, 零平衡点不稳定并出现周期振荡(图13)
$\tau_{2,1} = 6.0014$	当 $\tau = 5.2 \in (\tau_{1,2}, \tau_{2,1})$ 时, 零平衡点渐近稳定(图14)
$\tau_{2,2} = 7.8387$	当 $\tau = 6.05 \in (\tau_{2,1}, \tau_{2,2})$ 时, 零平衡点不稳定并出现周期振荡(图15)
$\tau_{3,1} = 8.1742$	当 $\tau = 7.9 \in (\tau_{2,2}, \tau_{3,1})$ 时, 零平衡点渐近稳定(图16)
$\tau_{4,1} = 10.347$	当 $\tau = 8.35 \in (\tau_{3,1}, \tau_{4,1})$ 时, 零平衡点不稳定并出现周期振荡(图17)
	当 $\tau = 10.35 > \tau_{4,1}$ 时, 零平衡点不稳定并出现周期振荡(图18)

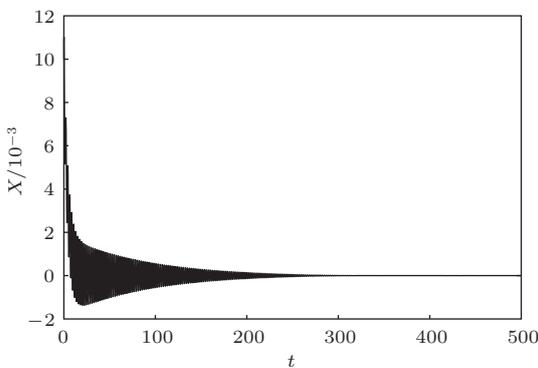


图10 $\tau = 1.575$ 时, 受控系统(3)在零平衡点处渐近稳定

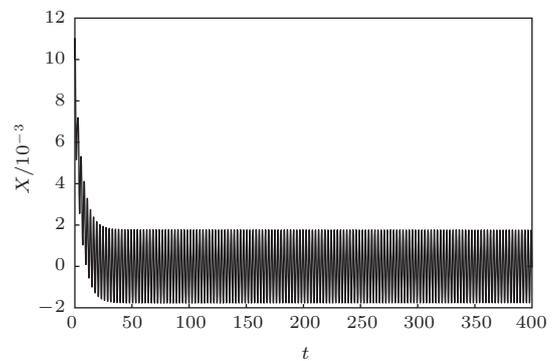


图11 $\tau = 2.335$ 时, 受控系统(3)发生周期振荡

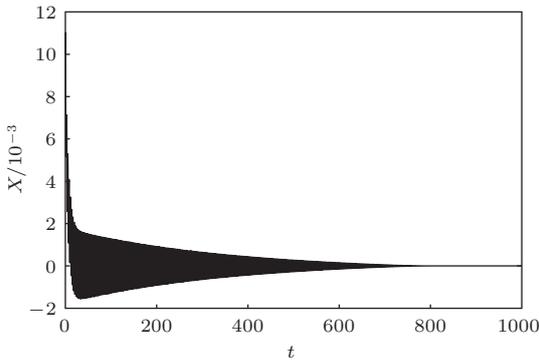


图12 $\tau = 2.4$ 时, 受控系统(3)在零平衡点处渐近稳定

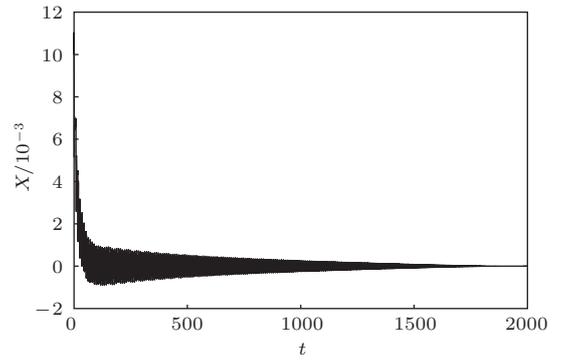


图16 $\tau = 7.9$ 时, 受控系统(3)在零平衡点处渐近稳定

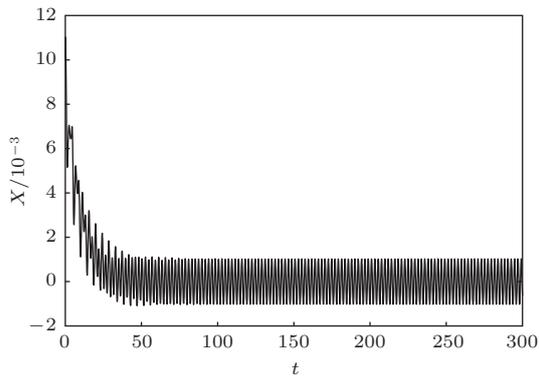


图13 $\tau = 3.85$ 时, 受控系统(3)发生周期振荡

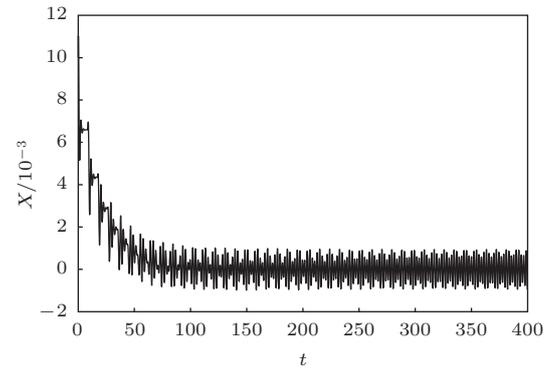


图17 $\tau = 8.35$ 时, 受控系统(3)发生周期振荡

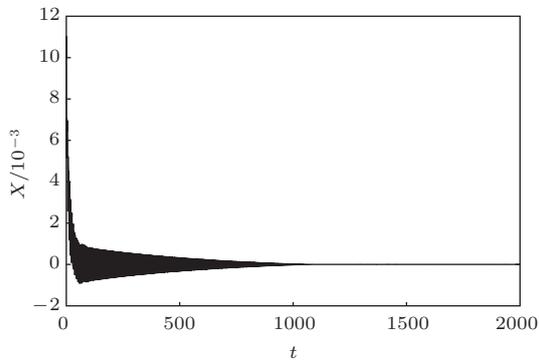


图14 $\tau = 5.2$ 时, 受控系统(3)在零平衡点处渐近稳定

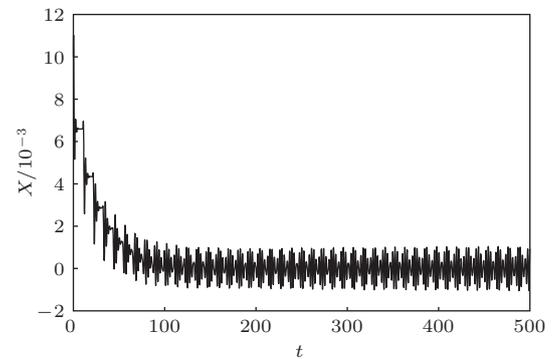


图18 $\tau = 10.35$ 时, 受控系统(3)发生周期振荡

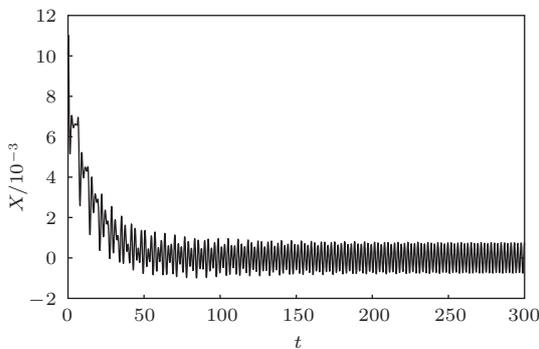


图15 $\tau = 6.05$ 时, 受控系统(3)发生周期振荡

在无控系统(1)中, 仍取定参数 $a = 2, b = 1, c = -2$, 根据文献[17], 可计算出分岔临界值为 $\tau_0 = 1.5708$, 此时系统的稳定区域为 $[0, 1.5708)$, 不妨取 $\tau = 1.575 > \tau_0$, 则系统不稳定并出现周期振荡(图19). 然而, 在本例设计的控制器中, 当 $\tau = 1.575 \in [0, 1.6558)$ 时, 系统的零平衡点渐近稳定(图10). 由此可见, 通过选取恰当的反馈控制器能有效的控制网络的分岔行为, 扩大系统的稳定域.

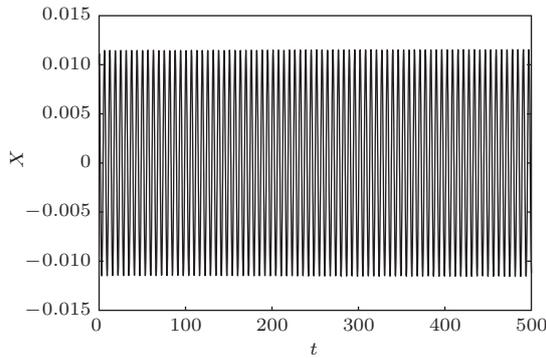


图19 $\tau = 1.575 > \tau_0$ 时, 无控系统 (1) 发生周期振荡

4 结 论

本文讨论了二阶时滞惯性神经网络模型的Hopf分岔控制问题. 利用时滞微分方程的稳定性和分岔理论, 讨论了反馈控制率 k 及反馈时滞 τ_2 对系统平衡点的稳定性及Hopf分岔的影响情况. 最后进行了数值仿真, 实例分析表明: 对于单时滞受控系统, 随着反馈控制率 k 的减小, 系统收敛速度不断加快且有效的延迟了网络的分岔, 而在反馈控制率 k 取定情况下, 在同一稳定区域内, 随着时滞 τ 的增加, 网络的收敛速度变慢, 并且从例2中我们不难发现系统有可能发生有限次的稳定性切换; 对于多时滞受控系统, 当反馈控制率固定时, 随着反馈时滞 τ_2 的取值不断减小, 系统收敛速度不断加快且稳定域也在不断扩大, 而在反馈时滞 τ_2 取定情况下, 在同一稳定区域内, 随着 τ_1 的增加, 网络的收敛速度变慢. 因此, 通过调整反馈控制率 k 及反馈时滞 τ_2 的大小, 能有效地改善网络的稳定性和收敛速度.

参考文献

- [1] Hopfield J 1984 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **41** 3088
- [2] Yang Z, Xu D 2005 *IEEE Trans. Circu. Syst.* **52** 517
- [3] Liao X, Chen G, Sanchez E N 2002 *Neural Networks* **15** 855
- [4] Wang L, Xu D 2003 *Science in China* **46** 466
- [5] Cao J, Xiao M 2007 *IEEE Trans. Neural Net.* **18** 416
- [6] Kwon O, Kwon J, Kim S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050505
- [7] Lee S, Kwon O, Park J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050507
- [8] Li H, Liao X, Huang H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020512 (in Chinese) [李华青, 廖晓峰, 黄宏宇 2011 物理学报 **60** 020512]
- [9] Wang H, Yu J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2303 (in Chinese) [王宏霞, 虞厥邦 2001 物理学报 **50** 2303]
- [10] Wang Z, Zhang H, Wang L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2687 (in Chinese) [王占山, 张化光, 王智良 2006 物理学报 **55** 2687]
- [11] Wheeler D W, Schieve W C 1997 *Physica D* **105** 267
- [12] Yi L, Zhou X, Wu Y, Zhou M 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **29** 190
- [13] Zhao H, Chen L, Yu X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070202 (in Chinese) [赵洪涌, 陈凌, 于小红 2011 物理学报 **60** 070202]
- [14] Yang X, Yang F 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **20** 587
- [15] Li C, Chen G, Liao X 2004 *The European Physical Journal B* **41** 337
- [16] Liao X, Li S, Wong K 2003 *Nonlinear Dynamics* **31** 299
- [17] Liu Q, Liao X, Guo S, Wu Y 2009 *Nonlinear Analysis* **10** 2384
- [18] Liu Z, Li C, Liu J 1997 *Acta Acustica* **22** 297 (in Chinese) [刘镇清, 李成林, 刘江伟 1997 声学学报 **22** 297]
- [19] Jiang M, Lin B, Yuan B 1998 *Signal Processing* **14** 331 (in Chinese) [江铭虎, 林碧琴, 袁保宗 1998 信号处理 **14** 331]
- [20] Zeng Q, Song A, Huang W 1999 *J of Southeast University* **29** 25 (in Chinese) [曾庆军, 宋爱国, 黄惟一 1999 东南大学学报 **29** 25]
- [21] Ellman R, Cooke K 1963 *Differential-Difference Equations* (New York Academic Press)

Stability and bifurcation control in inertial neuron networks with delays*

Zhu Lin-He Zhao Hong-Yong[†]

(Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(Received 5 December 2013; revised manuscript received 17 January 2014)

Abstract

Based on the second order delay inertia neural network model, this paper puts forward the bifurcation control method: delay feedback control method. Applying the theory of delay differential equations, we give some stability and Hopf bifurcation conditions for the feedback control system. Examples are given to validate that the feedback controller can control the occurrence of bifurcation effectively, expand the stability domain, and change the convergence speed of the network as well.

Keywords: delay inertial neural network, bifurcation control, stability, Hopf bifurcation

PACS: 02.30.Oz, 02.30.ry, 05.10.-a, 47.20.ky

DOI: [10.7498/aps.63.090203](https://doi.org/10.7498/aps.63.090203)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61174155), the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11032009), and the Qing Lan Project of Jiangsu, China.

† Corresponding author. E-mail: hongyongz@126.com