

弹性支撑双稳压电悬臂梁振动响应及 能量采集研究*

高毓璣¹⁾ 冷永刚^{1)2)†} 范胜波¹⁾ 赖志慧¹⁾

1)(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

2)(天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300072)

(2013年11月15日收到; 2014年1月21日收到修改稿)

在分析了常规刚性支撑非线性能量采集系统的研究基础上, 提出外部磁铁弹性支撑的结构设想, 保证系统在低强度激励条件下也能处于双稳态振荡, 提高机电能量转换效率. 研究表明, 对于强度变化的随机激励历程, 弹性支撑非线性能量采集系统不需要实时调整磁铁间距, 能够更好地迎合强度时刻变化的随机激励源, 实现高效的机电能量转换.

关键词: 能量采集, 双稳结构, 压电悬臂梁, 弹性支撑

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.63.090501

1 引言

近年来, 随着微电子技术和无线技术的发展, 手持型电子设备和无线传感器进入了小型、低功耗化的时代^[1,2]. 通常情况下, 这些设备都是依靠传统的电池来提供能量, 如镍氢电池、锂聚合物电池等. 但是, 传统电池存在的缺点在于, 一是相对于微型传感器其体积仍然较大, 限制了微传感器的进一步小型化; 二是供能寿命有限, 使用一段时间后需要更换或者充电, 对于放置在恶劣环境或者遥远地区的无线传感器而言, 这是个很严重的制约条件. 因此, 人们希望制造出一种可以吸收周围环境能量的器件, 为电池充电甚至取代传统电池, 这种器件就是能量采集器.

由于能量采集器可以把环境中存在的能量转换成电能, 而成为一种可代替电池和可自我维持的新型电源, 因此正受到越来越广泛的重视^[3,4]. 振动是环境中最普通的一种能源, 由于环境中的振动现象无处不在, 所以, 振动能量采集器成为可自

我维持电源研究中的一大热点. 在振动能量采集器中, 压电式振动能量采集方式较为普遍, 它利用压电材料的正压电效应, 即压电晶体受到外界振动力的作用而引起其内部电荷的流动, 达到产生电信号和输出电能的目的^[7]. 由于直线型悬臂梁结构可产生最大的挠度和柔顺系数, 具有较低的谐振频率和较宽的动态范围, 且拥有结构刚度低、高灵敏度、容易通过微细加工实现等优点, 因此压电悬臂梁式振动能量采集器成为压电式振动能量采集器的首选结构^[5-8].

压电悬臂梁振动能量采集器按系统运动方程又可分为线性与非线性两种系统方式. 这里的线性是指系统的运动方程只含有变量及其导数的一次项^[9], 相应的, 非线性是指系统的运动方程含有状态变量或其导数的高次项. 传统线性压电悬臂梁振动能量采集器的工作条件是振动激励与线性系统产生共振, 进而达到最大能量获取目的, 这种能量采集器的缺陷是达到最大输出的激励信号频带过窄, 很难与环境中的较宽频率范围(以低频分量较为常见)的有效振动激励相匹配^[10], 致使无法满足宽

* 国家自然科学基金(批准号: 51275336)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20120032110001)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn

频带环境振动能量采集的工作任务. 为克服线性压电悬臂梁振动能量采集器的这一缺陷, 非线性压电悬臂梁振动能量采集器成为研究热点^[11-14], 这种非线性振动能量采集器相比于线性振动能量采集器能够在宽频谱范围上表现出更好的振动能量采集性能.

从结构上看, 常规非线性压电悬臂梁振动能量采集器的外部磁铁支撑通常采用刚性支撑方式, 其压电悬臂梁自由端随振动激励围绕外部磁铁进行双稳态振荡. 这种非线性压电悬臂梁振动能量采集器虽然能够满足宽频带振动能量的采集, 但当环境振动激励强度不足够高时, 压电悬臂梁的响应可能局限在某个势阱中做单阱小幅振荡, 无法达到大幅度的双稳跃迁振荡, 从而降低了机电能量转换效率^[10]. 为了克服常规非线性压电悬臂梁振动能量采集的这一缺陷, 本文提出弹性支撑外部磁铁的结构设想, 意在保证系统在低强度激励条件下也能处于双稳状态振荡, 实现高效的机电能量转换.

2 刚性支撑外部磁铁的双稳压电悬臂梁振动能量采集器

2.1 基本结构与系统模型

刚性支撑外部磁铁的双稳压电悬臂梁振动能量采集器(以下简称“刚性支撑能量采集系统”或“刚性支撑系统”)的基本结构及受力分析如图1所示^[13,14], 该结构由末端带有磁铁A的压电悬臂梁B、刚性支撑外部磁铁C和基座D组成, 基座受到外界激励 $P(t)$ 作用. 压电悬臂梁B由金属板和压电陶瓷片(PZT)组成: 金属板上下表面各粘贴有一层压电片, 两层压电片厚度相同并且串联连接. 压电悬臂梁的自由端固定有永磁铁A, 其与外部磁铁C相互排斥作用, 构成双稳系统. 当在外界激励 $P(t)$ 的激励下, 压电悬臂梁B会产生振动, 进而使得PZT产生变形, 根据压电效应就可以实现振动能量到电能的转化. 需要说明的是, 系统处于平衡位置时, 不考虑磁铁A的重力对压电悬臂梁静力形变的影响, 此时磁铁A位于悬臂梁水平位置延长线上, 磁铁A与外部磁铁C水平对中.

图1结构可简化成典型的质量弹簧阻尼模型, 其等效模型如图2所示. 根据牛顿第二定律, 可以

得到该系统的动力学方程^[13]

$$kP(t) + \theta V(t) + F_v = M_{eq}\ddot{Z}(t) + \eta_{eq}\dot{Z}(t) + K_{eq}Z(t), \quad (1)$$

其中, M_{eq} , K_{eq} 及 η_{eq} 分别为压电悬臂梁部分的等效质量、等效刚度及等效阻尼, θ 为压电陶瓷PZT的机电耦合系数, $P(t)$ 为外界激励, $V(t)$ 为压电片输出电压, F_v 是两磁铁A, C排斥力 F 的垂直分力, $Z(t)$ 为等效质量的位移, k 为集总参数模型的幅值修正因子. M_{eq} , η_{eq} , K_{eq} 及 θ 分别由下列方程计算给出^[15-18]:

$$M_{eq} = M + 33m/140, \quad (2)$$

$$K_{eq} = \frac{6E_b I}{(l_b - l_B)^2 [2(l_b - l_B) + 1.5l_B]}, \quad (3)$$

$$\eta_{eq} = 2M_{eq}\xi_r\omega_r, \quad (4)$$

$$\theta = e_{31}\psi'_r w_b \frac{t_b + t_e}{2}. \quad (5)$$

方程(2)中, M 为末端质量, 即磁铁A的质量, $M = \rho_B l_B w_B h_B$, m 为压电悬臂梁的质量

$$m = \rho_b l_b w_b t_b + 2\rho_e l_e w_e t_e.$$

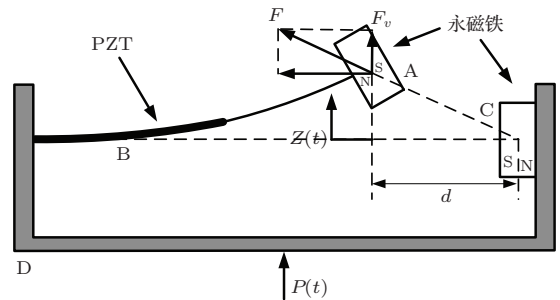


图1 刚性支撑能量采集系统结构的受力分析图

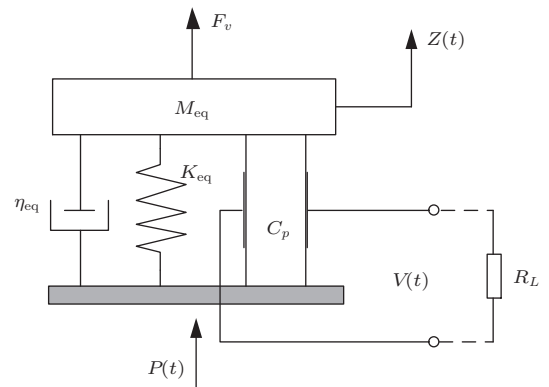


图2 刚性支撑能量采集系统等效模型

方程 (3) 中, I 为转动惯量,

$$I = 2 \left[\frac{w_b t_e^3}{12} + w_b t_e \left(\frac{t_e + t_b}{2} \right)^2 \right] + \frac{E_b w_b t_b^3}{12 E_e},$$

E_b 为悬臂梁基体弹性模量, E_e 为压电陶瓷弹性模量. 方程 (4) 中, ω_r 为压电悬臂梁部分的结构固有频率, $\omega_r = \sqrt{K_{eq}/M_{eq}}$, ξ_r 为机械阻尼比. 方程 (5) 中, e_{31} 为压电常数, ψ'_r 为机械振型向量的空间导数. 方程 (2)—(5) 中的其他参数 ρ_B , l_B , w_B 及 h_B 分别为磁铁 A 与 C 的密度、厚度、宽度及高度 (见图 3), ρ_b , l_b , w_b 及 t_b 分别为悬臂梁基体的密度、长度、宽度及厚度, ρ_e , l_e , w_e 及 t_e 分别为压电陶瓷的密度、长度、宽度及厚度.

研究表明, 对于横向或纵向振动的悬臂梁, 传统形式的集总参数激励振动响应会产生误差, 因此需要引入修正因子对激励幅值进行修正, 使修正后的集总参数模型在一阶振动频率附近的大范围内与分布参数模型很好地符合, 从而满足动力学仿真的精度要求. 修正因子 k 的数学表达式为 [15]

$$k = \frac{(M/m)^2 + 0.603(M/m) + 0.08955}{(M/m)^2 + 0.4637(M/m) + 0.05718}. \quad (6)$$

根据基尔霍夫第一定律, 可以得到采集电路的电路方程 [15]

$$\theta \dot{Z}(t) = \frac{1}{2} C_p \dot{V}(t) + \frac{V(t)}{R_L}, \quad (7)$$

其中, C_p 是电路电容, R_L 是电路电阻, 其计算公式为 [17]

$$C_p = \frac{\epsilon_{33}^S w_b l_b}{t_e}, \quad (8)$$

其中 ϵ_{33}^S 为介质的介电常数, 由公式 $\epsilon_{33}^S = \epsilon_{31} \epsilon_0$ 确定, ϵ_{31} 为相对介电常数, ϵ_0 为真空绝对介电常数.

2.2 非线性势函数分析

根据磁场力的计算方法, 两块磁铁 A 和 C 在平衡位置处的排斥力 F 大小为 [13]

$$F = \frac{1.5}{1 + 3d} \times \frac{w_B h_B}{2\mu_0} \times \left[\frac{B_r}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{w_B h_B}{2d\sqrt{w_B^2 + h_B^2 + 4d^2}} - \tan^{-1} \frac{w_B h_B}{2(l_B + d)\sqrt{w_B^2 + h_B^2 + 4(l_B + d)^2}} \right) \right]^2, \quad (9)$$

其中, d 为两磁铁间的间距, 如图 3. μ_0 为真空导磁率, B_r 为永磁铁的磁性能参数.

排斥力的垂直分力 F_v 随磁铁 A 垂直方向位移 $Z(t)$ 的变化而变化, 见图 1, 其大小为

$$F_v = F \times \frac{Z(t)}{\sqrt{Z(t)^2 + d^2}}. \quad (10)$$

在不考虑重力的情况下, 系统势能包括等效模型中的弹性势能和磁力 F 对磁铁做的功, 由此可得刚性支撑能量采集系统在 $Z = Z_0$ 时刻的势函数

$$V(Z_0) = \int_0^{Z_0} K_{eq} Z dZ - \int_0^{\sqrt{Z_0^2 + d^2} - d} F dZ. \quad (11)$$

对方程 (11) 进行积分计算, 可以得到势函数 $V(Z)$ 随磁铁间距 d 的变化趋势, 如图 4 所示. 其中积分计算的参数选取参见表 1 和表 2. 由图 4 可以看出, 间距 d 很大时, 特别是 d 为无穷大时, 系统实际为线性系统, 其势函数为单稳, 表现为只在原点处出现一个稳定的平衡位置; 随着间距 d 的减小, 系统由线性系统变成非线性系统, 其势函数由单稳变为双稳, 即在两个势阱处出现两个稳定的平衡位置, 在原点处出现一个非稳定平衡位置.

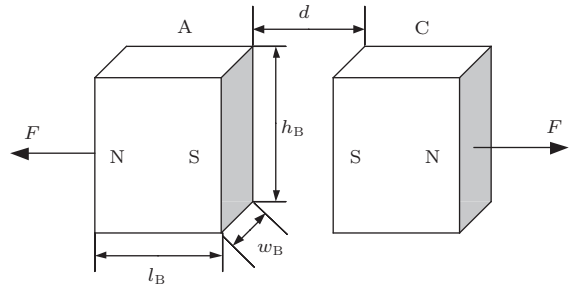


图 3 两磁铁几何尺寸及间距示意图

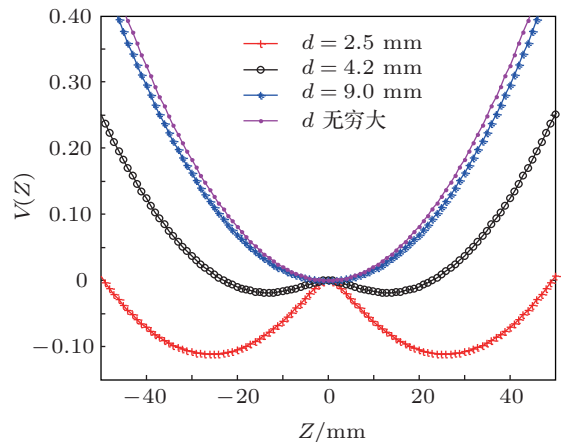


图 4 磁铁间距 d 对势函数 $V(Z)$ 的影响

表1 刚性支撑能量采集系统材料参数

参数	数值
基体材料: 铜	
E_b / GPa	100
ρ_b / $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	7165
压电片材料: PZT-5A	
E_e / GPa	66
ρ_e / $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	7800
ϵ_{31}	1500
ϵ_0	8.854
d_{31} / $\text{pC}\cdot\text{N}^{-1}$	-190
永磁铁材料: $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$	
ρ_B / $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	7500
B_r / T	1.25
μ_0 / $\text{N}\cdot\text{A}^{-2}$	$4\pi \times 10^{-7}$

表2 刚性支撑能量采集系统结构参数

几何参数	数值	几何参数	数值
l_b, l_e / mm	64	l_B / mm	8
w_b, w_e / mm	10	w_B / mm	10
t_e / mm	0.27	h_B / mm	20
t_b / mm	0.14		

2.3 数值计算与仿真分析

为了仿真外加激励作用下刚性支撑系统的能量采集性能, 本文根据文献[16—18]固定选取一组材料属性参数(见表1)与系统几何结构尺寸(见表2), 通过数值计算的方式研究输出位移与输出

电压的响应. 仿真分析中所需的其他主要参数为 $\xi_r = 0.0178$, $\psi_r' = 0.0513$, $R_L = 10 \text{ M}\Omega$ [17].

为了模拟低频宽带的振动环境, 本文选取一段频率带宽为0—120 Hz、强度为 $D = 1$ 的随机激励 $P(t)$ 作为振动输入, 对方程(1)和(7)采用 Runge-Kutta 法进行数值计算, 得到磁铁A输出位移 $Z(t)$ 和压电梁输出电压 $V(t)$ 的计算结果[19—21], 如图5所示. 数值模拟发现, 压电梁输出电压均方值 V_{rms} 随着间距 d 的增大而先增大后减小, 其在间距 d 为4.2 mm附近存在一个极大峰值. 图5(a)和(b)分别给出 $d < 4.2 \text{ mm}$, $d = 4.2 \text{ mm}$, $d > 4.2 \text{ mm}$ 时 $Z(t)$ 和 $V(t)$ 的时间历程波形图. 结合图4与图5可以看到, 当 $d < 4.2 \text{ mm}$ 时, 虽然势函数 $V(z)$ 为双稳, 但因势阱较深势垒太高, 导致双稳跃迁很难实现, 因此振动只能发生在双阱中的某个单势阱中, 输出的位移和电压较小; 当 $d = 4.2 \text{ mm}$ 时, 双稳势函数的势垒降低, 振动可以在两个势阱间做往复跃迁运动, 产生的位移和电压可以大幅度呈正负交替输出, 机电能量转换效率较高; 当 $d > 4.2 \text{ mm}$ 时, 势函数逐渐由双稳变成单稳, 此时系统可以近似看作线性系统, 振动变成单稳势阱线性振荡, 输出位移和电压又降低下来.

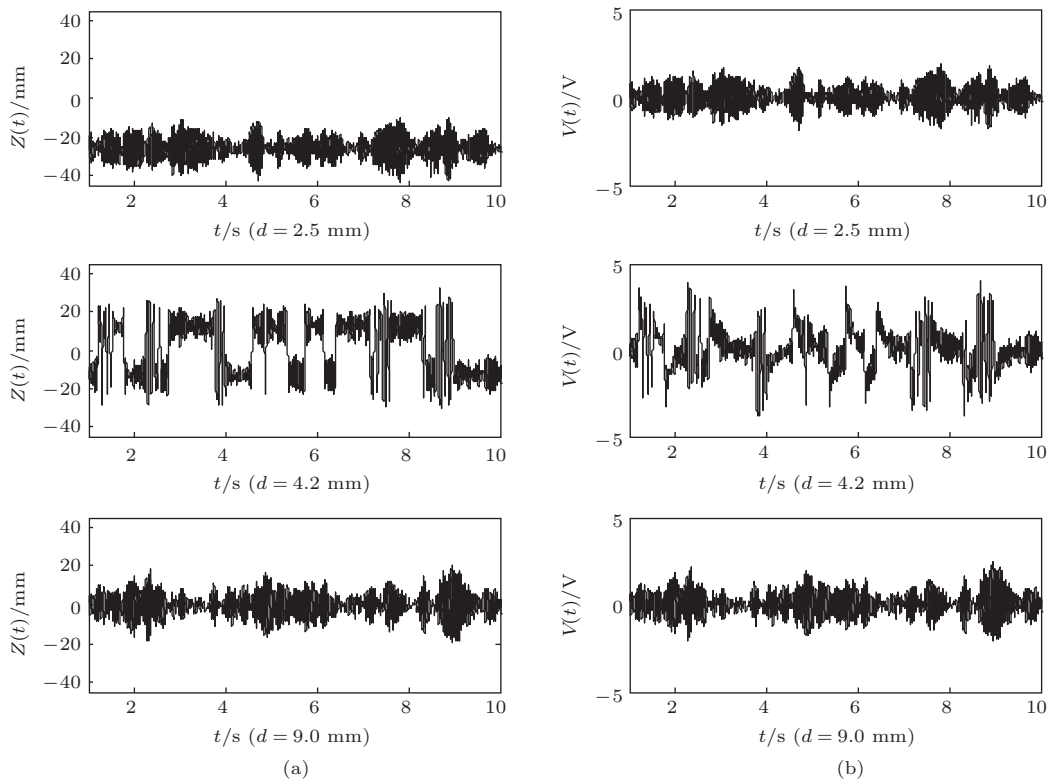


图5 磁铁间距 d 对输出位移和输出电压的影响 (a) 输出位移; (b) 输出电压

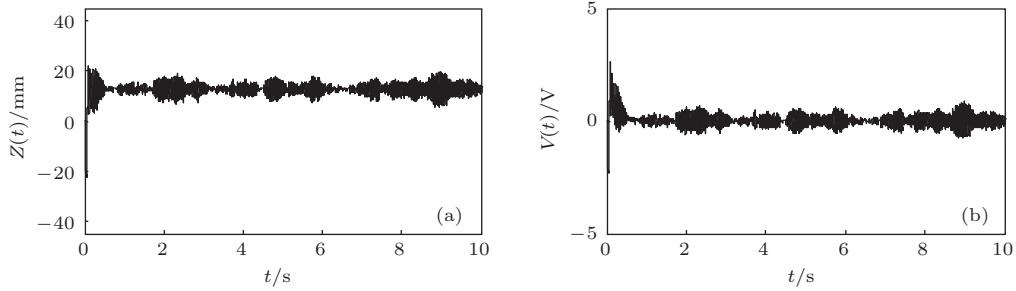


图6 $d = 4.2 \text{ mm}$ 和 $D = 0.1$ 时梁的振动响应与输出电压 (a) 输出位移; (b) 输出电压

针对图5机电能量转换效率高的磁铁间距 $d = 4.2 \text{ mm}$ 的情况, 定义强度为 $D = 1$ 及其附近小范围波动变化的噪声为高强度随机激励条件, 相应的定义强度为 $D = 0.1$ 及其附近小范围波动变化的噪声为低强度随机激励条件. 判断随机激励强度大小的依据在于, 一定时间内, 系统发生跃迁所消耗的时间占总分析时间的比例; 当这个比例很低或接近零时, 我们称系统处于低强度随机激励条件. 对于图5磁铁间距 $d = 4.2 \text{ mm}$ 的情况, 当随机激励强度降低为 $D = 0.1$ 时, 可以得到 $Z(t)$ 和 $V(t)$ 的时间历程波形图, 如图6(a)和(b). 可以看到, 当激励强度降低至一定数值后, 即梁处于低强度随机激励时, 梁的振动响应会局限在某个势阱中做单阱小幅振荡, 无法达到大幅度的双稳跃迁振荡, 从而导致机电能量转换效率降低.

从以上仿真结果不难判断, 对于两磁铁A和C存在特定间距的非线性悬臂梁结构, 只有在振动激励达到一定强度的条件下, 非线性压电悬臂梁的振动才可实现双阱间的往复跃迁运动, 采集系统才能实现高效的机电能量转换. 然而当振动激励强度不足够强时, 显然这种刚性支撑非线性压电悬臂梁的振动会局限在双阱中的某一个势阱做单阱振荡, 其能量采集效力也较低. 有鉴于此, 本文提出弹性支撑外部磁铁的方法来研究小强度激励下的非线性压电悬臂梁振动能量采集方式.

3 弹性支撑外部磁铁的双稳压电悬臂梁振动能量采集器

3.1 基本结构与系统模型

弹性支撑外部磁铁的双稳压电悬臂梁振动能量采集器(以下简称“弹性支撑能量采集系统”或“弹性支撑系统”)的基本结构和受力分析如图7所

示, 该结构与图1中常规刚性支撑能量采集系统结构的不同之处在于外部磁铁C采用弹性支撑结构. 这种改进结构不仅保留了悬臂梁的双稳振动特性, 同时也使外部磁铁C的振动具有了双稳特性, 为小强度激励条件下增大悬臂梁双阱跃迁运动创造了条件. 需要说明的是, 系统处于平衡位置时, 不考虑磁铁A和外部磁铁C的重力对压电悬臂梁以及弹簧静力形变的影响, 此时磁铁A位于悬臂梁水平位置延长线上, 磁铁A与外部磁铁C水平对中.

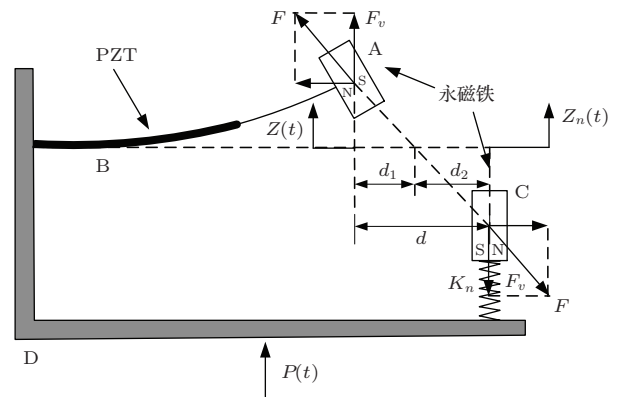


图7 弹性支撑能量采集系统结构的受力分析图

图7结构同样可简化成典型的质量弹簧阻尼模型, 其等效模型如图8所示, 根据牛顿第二定律, 可以得到该系统的动力学方程

$$kP(t) + \theta V(t) + F_v = M_{eq} \ddot{Z}(t) + \eta_{eq} \dot{Z}(t) + K_{eq} Z(t), \quad (12a)$$

$$kP(t) - F_v = M_n \ddot{Z}_n(t) + \eta_n \dot{Z}_n(t) + K_n Z_n(t), \quad (12b)$$

其中方程(12a)与方程(1)相同, M_{eq} , K_{eq} 及 η_{eq} 仍然分别为压电悬臂梁部分的等效质量、等效刚度及等效阻尼, θ 为PZT的机电耦合系数, $P(t)$ 为外界激励, $V(t)$ 为压电片输出电压, $Z(t)$ 为磁铁A等效质量的位移, F_v 是两磁铁A, C排斥力 F 的垂直

分力. 方程 (12b) 中的 M_n 为外部磁铁 C 的质量, 其大小与磁铁 A 相同, $Z_n(t)$ 为磁铁 C 的振动位移, k 为集总参数模型的幅值修正因子, K_n 和 η_n 分别代表弹簧的弹性刚度与阻尼, η_n 的计算公式同理于 (4) 式:

$$\eta_n = 2M_n\xi_n\omega_n, \quad (13)$$

其中 ω_n 为弹性支撑部分的结构固有频率, $\omega_n = \sqrt{K_n/M_n}$, ξ_n 为机械阻尼比, 弹簧弹性刚度 K_n 作为本文讨论弹性支撑状态的一个参数将在后文中展开讨论. 采集电路的电路方程仍由方程 (7) 确定.

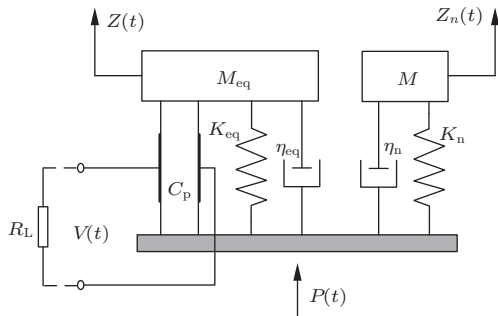


图 8 弹性支撑能量采集系统等效模型

需要说明的是, 图 7 中所示磁铁 C 的弹簧支撑方式仅为示意图, 前期仿真阶段假定磁铁 C 只能沿 $Z(t)$ 方向运动, 不考虑其沿悬臂梁方向及垂直纸面方向的运动. 在具体实验模型的实现过程中, 为最大限度保证磁铁 C 沿 $Z(t)$ 方向运动, 本文选用悬臂梁结构作为其弹性支撑方式 (见第 5 节), 对 (12b) 式进行了集总参数模型的幅值修正, 并对文章仿真模拟结果做出相应修正.

3.2 非线性势函数分析

根据磁场力的计算方法, 两块磁铁 A, C 的排斥力 F 同样由方程 (9) 确定. 根据图 7 的受力分析, 两磁铁 A, C 的排斥力 F 的垂直分力 F_v 不同于方程 (10), 由于磁铁 C 存在振动位移 $Z_n(t)$, 所以 F_v 的表达式变为

$$F_v = F \times \frac{Z(t) - Z_n(t)}{\sqrt{[Z(t) - Z_n(t)]^2 + d^2}}. \quad (14)$$

在不考虑重力的情况下, 弹性支撑能量采集系统势能可以分为两部分, 分别是悬臂梁振动形成的势能 $V(Z)$ 和外部磁铁 C 运动形成的势能 $V(Z_n)$, 同理于刚性支撑系统方程 (11) 的推导, 不难得到二

者分别在某一时刻对应 $Z = Z_0$ 和 $Z_n = Z_{n0}$ 位置的势能表达式为

$$V(Z_0) = \int_0^{Z_0} K_{eq} Z dZ - \int_0^{\sqrt{Z_0^2 + d_1^2} - d_1} F dZ, \quad (15a)$$

$$V(Z_{n0}) = \int_0^{Z_{n0}} K_{eq} Z_n dZ_n - \int_0^{\sqrt{Z_{n0}^2 + d_2^2} - d_2} F dZ_n, \quad (15b)$$

其中, d_1 与 d_2 分别表示两磁铁 A 和 C 运动到任意位置时, 其重心位置连线与悬臂梁水平位置延长线的交点到其重心位置的水平间距, 如图 7 所示. $d_1 + d_2 = d$, d 仍表示两磁铁 A 和 C 的间距. 显然, 方程 (15) 与刚性支撑系统势函数 (11) 的形式完全相同, 这表明弹性支撑系统同样具有双稳特性.

由图 7 可知, d_1 与 d_2 满足关系式

$$d_1/d_2 = Z(t)/Z_n(t),$$

这就意味着对于某个固定间距值 d , 在两磁铁振动过程的不同时刻, d_1 和 d_2 可取 $[0, d]$ 区间内的任意数值. 取表 1, 表 2 的参数且令 $K_n = 0.6K_{eq}$, 并取 $d = 4.2 \text{ mm}$, 任意给定不同时刻 d_1 的五个值: $d/100, d/4, d/2, 3d/4, d$. 对方程 (15) 进行积分计算, 可以绘制出弹性支撑系统 $V(Z)$ 和 $V(Z_n)$ 随不同 d_1 位置的变化趋势, 如图 9 (a) 和 9 (b) 所示. 可以看到, 弹性支撑系统悬臂梁及其外磁铁的双稳势函数形状会随 d_1 值发生变化.

由图 9 可知, 当 $d_1 = d$ 时, 弹性支撑系统悬臂梁的势函数与刚性支撑系统悬臂梁的势函数一致, 此时梁可以处在偏离水平平衡位置的某一势阱中; 当 $d_1 = 0$ 时, 梁处在水平平衡位置. 当 d_1 取 $[0, d]$ 区间内的任意数值时, 弹性支撑系统的势函数 $V(Z)$ 和 $V(Z_n)$ 都会有所不同, 即在随机激励下, 悬臂梁的势函数会随着不同时间点对应的不同位置 d_1 而随机变化. 这种随机变化体现在势函数的势垒、势阱间距、形状等的随机变化. 因此当悬臂梁 (或外磁铁) 处于某个大势垒较深的势阱中振动时, 外磁铁 (或悬臂梁) 则可能处于小势垒较浅的势阱中振动, 一旦外磁铁 (或悬臂梁) 发生越过水平平衡位置的阱间跃迁, 必然为悬臂梁 (或外磁铁) 越过水平平衡位置的跃迁创造了条件, 跃迁概率的增大会相应带来跃迁频率的提升, 即促使压电梁产生频

繁双稳跃迁运动,从而达到有效的机电能量转换目的.

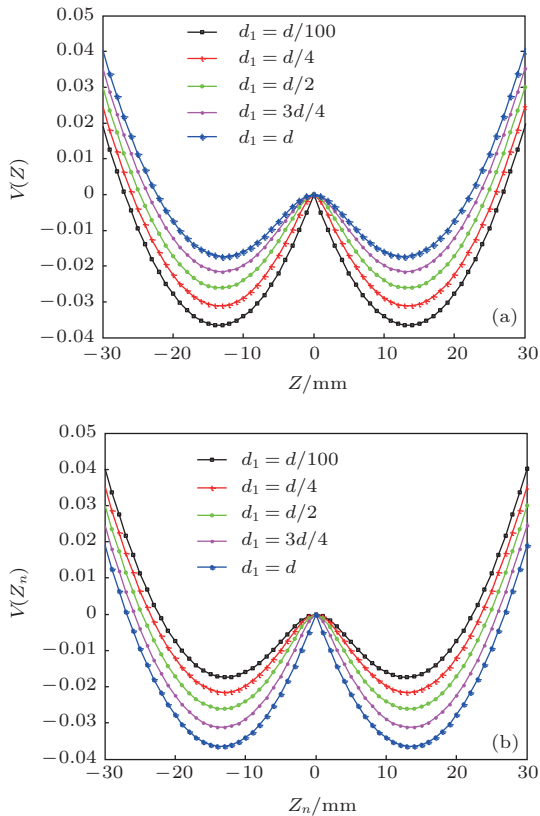


图9 (网刊彩色) $d = 4.2 \text{ mm}$ 时,弹性支撑系统动态间距 d_1 对势函数 $V(Z)$ 和 $V(Z_n)$ 的影响 (a) 悬臂梁 $V(Z)-d_1$ 曲线; (b) 外磁铁 $V(Z_n)-d_1$ 曲线

3.3 数值计算与仿真分析

令随机激励强度 $D = 1$, 调节磁铁间距 d 和弹簧弹性刚度 K_n , 对方程 (12) 和 (7) 采用 Runge-Kutta 法数值计算, 可以得到悬臂梁磁铁 A 输出位移 $Z(t)$ 和输出电压 $V(t)$ 的计算结果, 发现弹性支撑系统在 $d = 8 \text{ mm}$ 和 $K_n = 0.6K_{eq}$ 时可以频繁围绕初始平衡位置进行双稳跃迁的振荡, 如图 10 所示, 其输出电压均方值出现极大峰值. 图 10 类似但又不同于图 5 中 $d = 9 \text{ mm}$ 的线性振荡情况, 它是在弹性支撑外磁铁的条件下实现频繁的双稳跃迁, 其输出位移 $Z(t)$ 和输出电压 $V(t)$ 总体上明显大于图 5 的线性振荡情况. 此外, 图 11 给出了 $d = 8 \text{ mm}$ 时弹性支撑系统 $V(Z)$ 关于动态间距 d_1 的变化情形, d_1 在 $[0, d]$ 范围内变化时, 弹性支撑系统势函数 $V(Z)$ 总会存在变化的双稳势函数状态, 不同于图 4 刚性支撑系统 $d = 9 \text{ mm}$ 的固定不变的线性势函数状态.

在 $d = 8 \text{ mm}$ 和 $K_n = 0.6K_{eq}$ 条件下, 当激

励强度降至 $D = 0.1$ 时, 弹性支撑系统输出位移 $Z(t)$ 和输出电压 $V(t)$ 如图 12 所示. 可以看到, 当 $D = 0.1$ 时, 相对于图 6 中刚性支撑系统压电悬臂梁响应局限在某个势阱中做单阱小幅振荡无法达到跃迁的双稳振荡情况, 弹性支撑系统的悬臂梁可达到围绕初始平衡位置的双稳跃迁振荡, 而且可以保持较高的双稳往复跃迁率, 这得益于弹性支撑系统随时间变化的势函数, 使得悬臂梁的双稳跃迁振荡更容易发生. 这也表明弹性支撑系统能够适应激励强度变化的随机激励振动, 可充分实现机电能量的转换.

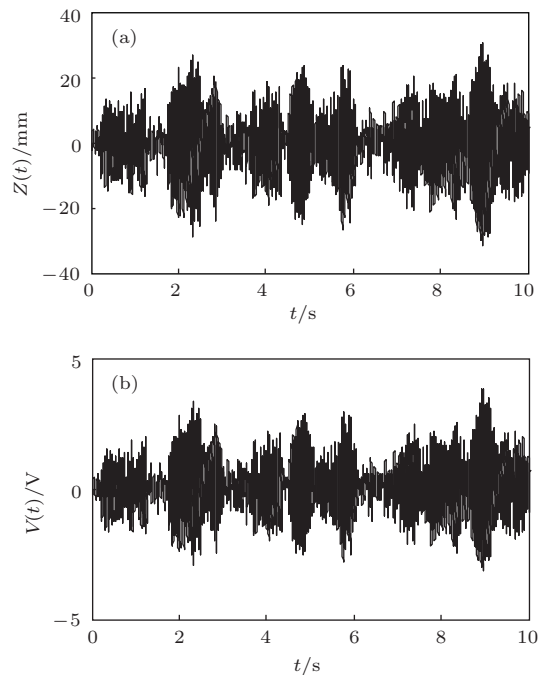


图 10 $D = 1, d = 8 \text{ mm}, K_n = 0.6K_{eq}$ 时, 弹性支撑系统梁的振动响应与输出电压 (a) 输出位移; (b) 输出电压

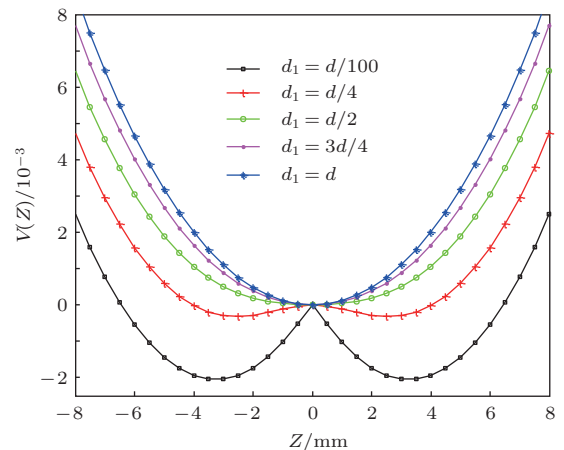


图 11 (网刊彩色) $d = 8 \text{ mm}$ 时, 弹性支撑系统动态间距 d_1 对势函数 $V(Z)$ 的影响

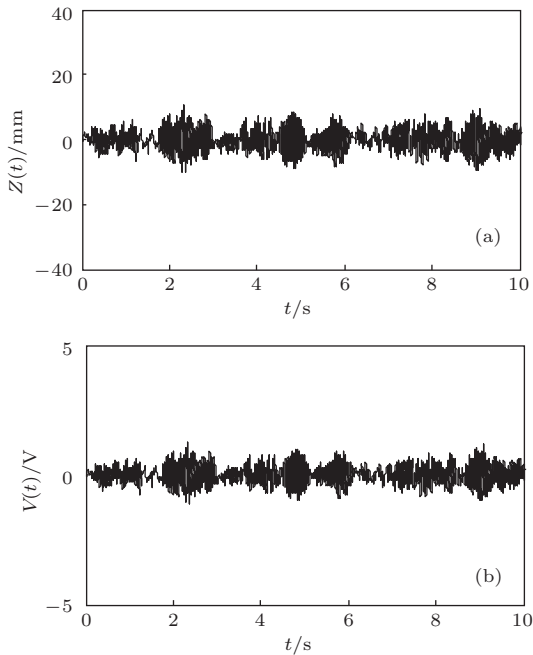


图12 $D = 0.1$, $d = 8$ mm, $K_n = 0.6K_{eq}$ 时, 弹性支撑系统梁的振动响应与输出电压 (a) 输出位移; (b) 输出电压

4 两种支撑方式能量采集性能对比分析

为了方便比较, 这里用弹性支撑系统外部磁铁 C 的弹性刚度 K_n 与悬臂梁末端磁铁 A 的等效刚度 K_{eq} 的比值关系来反映系统的支撑状态. K_n/K_{eq} 越大, 表示外部磁铁 C 的支撑越接近刚性支撑状态, K_n/K_{eq} 为无穷大时系统可以完全看做刚性支撑外磁铁的非线性能量采集系统; 而 K_n/K_{eq} 越小, 则表示系统弹性支撑状态特征越明显.

4.1 磁铁间距和弹簧刚度对系统采集性能的影响

首先在高强度随机激励条件下, 考察压电梁输出电压均方值 V_{rms} 随着磁铁间距 d 和弹簧刚度 K_n 的变化规律. 按照前节分析, 设 $D = 1$ 为高强度的随机激励并固定 D , 对一段时间内的输出电压 $V(t)$ 进行统计平均, 可以得到输出电压均方值 V_{rms} . 图 13(a) 给出了 V_{rms} 关于 d 和 K_n/K_{eq} 的函数关系. 由图可知, 1) 在 K_n/K_{eq} 为 $[0, 1]$ 和 $[2, 10]$ 区间内, V_{rms} 随着间距 d 的增大而先增大后减小, 特别是在小刚度区间 $[0, 1]$ 内, V_{rms} 在间距 d 为 5.8—9.0 mm 范围内基本能保持一个较大的水平峰值, 而在大刚度区间 $[2, 10]$ 内, V_{rms} 只在间距 d

为 4.2 mm 附近保持大的峰值. 2) 对于任意间距 d , V_{rms} 随着 K_n/K_{eq} 的增大先增大后减小, 分别在 $K_n = 0.6K_{eq}$ 和 $K_n = K_{eq}$ 处出现极大值和极小值, 然后又随着 K_n 的继续增大而增大, 最终趋于一个定值. 不难发现, 弹性支撑系统外部磁铁 C 的弹性刚度 K_n 越大, 或系统越接近刚性支撑系统情况, 那么系统可在较小的间距下输出较大电压; 而当弹性支撑系统的 K_n 较小时, 系统可在较大间距条件下输出较大电压. 这表明, 在 $D = 1$ 大强度激励条件下, 刚性支撑或接近刚性支撑系统在间距较小时可发生较频繁的双稳跃迁, 其最优结构参数为 $d = 4.2$ mm, 而弹性支撑系统则在间距较大时发生频繁的双稳跃迁, 其最优结构参数为 $d = 8$ mm 和 $K_n = 0.6K_{eq}$.

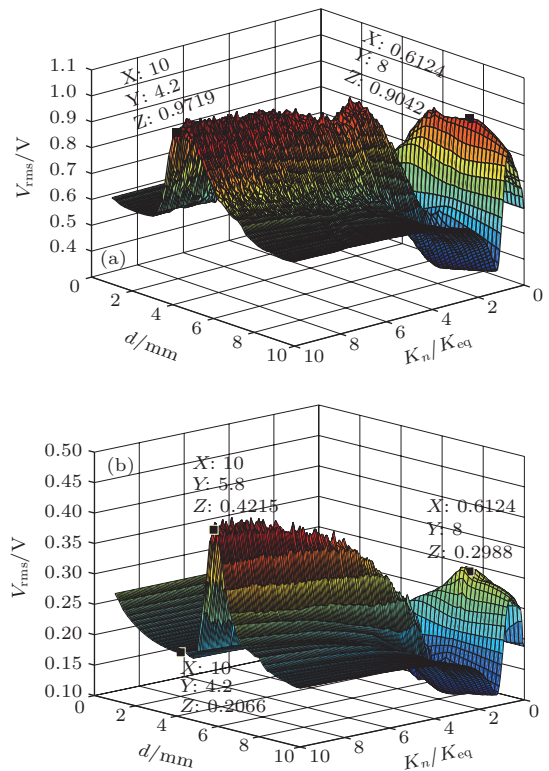


图13 V_{rms} 关于磁铁间距 d 和外部磁铁支撑刚度 K_n/K_{eq} 的关系 (a) 大激励强度 $D = 1$; (b) 小激励强度 $D = 0.1$

其次在低强度随机激励条件下, 考察压电梁输出电压均方值 V_{rms} 随着磁铁间距 d 和弹簧刚度 K_n 的变化规律. 设 $D = 0.1$ 为低强度的随机激励并固定 D , 同理得到 V_{rms} 关于 d 和 K_n/K_{eq} 的函数关系, 如图 13(b) 所示. 可以发现, 图 13(b) 与图 13(a) 形状非常相似, 但低强度激励条件下, 刚性支撑系统的最优结构参数点已经不在原来 $d = 4.2$ mm 位

置, 而是移动到了 $d = 5.8 \text{ mm}$ 处, 而弹性支撑系统的最优结构参数点仍然在 $d = 8 \text{ mm}$ 和 $K_n = 0.6K_{eq}$ 处.

比较图 13 (a) 和 (b) 知, 在 $D = 1$ 高强度激励条件下, $d = 4.2 \text{ mm}$ 的刚性或近似刚性支撑系统输出的最大电压均方值 V_{rms} 为 0.9719 (图 13 中 $d, K_n/K_{eq}, V_{rms}$ 分别对应 X, Y, Z 坐标轴), 相比于 $d = 8 \text{ mm}$ 的弹性支撑系统输出的最大电压均方值 $V_{rms} = 0.9042$ 要高. 而在 $D = 0.1$ 低强度激励条件下, $d = 4.2 \text{ mm}$ 的刚性或近似刚性支撑系统输出的电压均方值 V_{rms} 为 0.2066 (其最大 $V_{rms} = 0.4215$ 值移至 $d = 5.8 \text{ mm}$ 处), 相比于保持间距 $d = 8 \text{ mm}$ 的弹性支撑系统仍然输出最大电压均方值 $V_{rms} = 0.2988$ 要低. 由于实际应用中能量采集器件的结构参数不可实时改变, 因此从保持结构间距不变且稳定输出其最大电压方面考虑, 弹性支撑系统比刚性支撑系统具有优越性.

4.2 磁铁间距和噪声强度对系统采集性能的影响

为了进一步比较刚性支撑系统和弹性支撑系统的特性, 分别取 $K_n = 10K_{eq}$ 和 $K_n = 0.6K_{eq}$ 代表二者并各自保持 K_n 不变, 图 14 给出了两系统输出电压的均方值 V_{rms} 随激励强度 D 和间距 d 的变

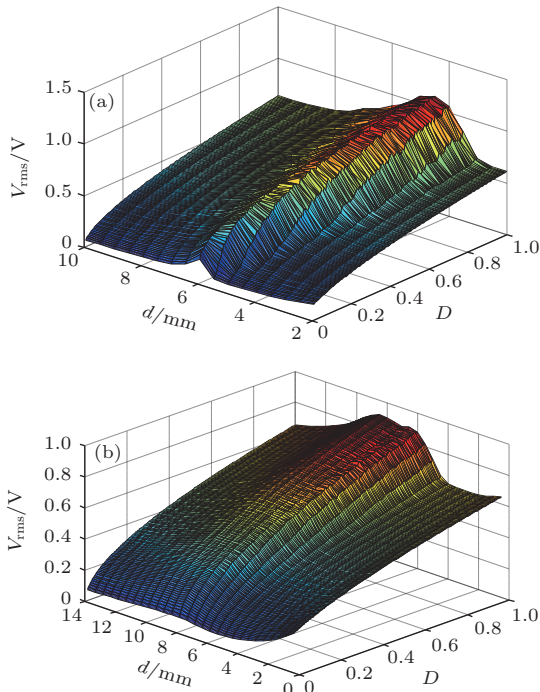


图 14 V_{rms} 关于磁铁间距 d 和激励强度 D 的关系 (a) 刚性支撑系统 ($K_n = 10K_{eq}$); (b) 弹性支撑系统 ($K_n = 0.6K_{eq}$)

化关系图. 由图 14 可以看到, 两系统输出电压均方值 V_{rms} 都随着间距 d 的增大而先增大后减小, 随着激励强度 D 的增大而增大. 对于刚性支撑系统图 14 (a), 当激励强度 D 减小时, 其最大值 V_{rms} 对应的间距 d 发生移动, 而对于弹性支撑系统图 14 (b), 当激励强度 D 减小时, 其最大值 V_{rms} 对应的间距 d 基本不变, 这也证明了上述论点. 如果从保持结构参数不变角度考虑, 分别截取图 14 (a) 中 $d = 4.2 \text{ mm}$ 和图 14 (b) 中 $d = 8 \text{ mm}$ 的 V_{rms} 关于 D 的变化趋势进行对比, 则得到图 15 结果. 可以看出, 在低随机激励强度下弹性支撑系统相比刚性支撑系统可以发挥出更高效率的机电能量转换特性, 而在高随机激励强度下刚性支撑系统比弹性支撑系统可以表现出好的机电能量转换特性.

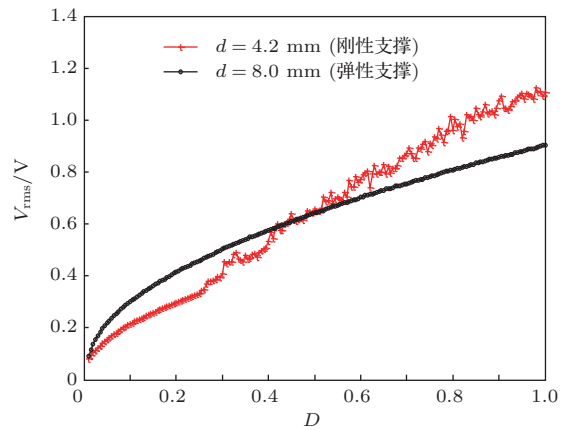


图 15 K_n 分别为 $10K_{eq}$ 和 $0.6K_{eq}$ 时, 刚性和弹性支撑系统的 V_{rms} 关于 D 的变化趋势对比图

5 实验分析

为了验证前面的理论分析与仿真模拟结果, 本文根据表 1 和表 2 的参数数据制作了压电悬臂梁能量采集结构. 压电陶瓷的型号为 PZT-5A, 结构上采用双晶片结构, 两层压电陶瓷片同极化方向排列, 与中间电极层紧密粘结 [22,24], 在 PZT 上下表面引出导线作为电压输出, 中间电极层即悬臂梁基体的材料为铜. 压电悬臂梁自由端固定有永磁铁 A, 型号为 N35, 其根部固定在基座 1 上, 且该压电悬臂梁基座 1 与能量采集结构底板基座 2 固定, 见图 16 (a). 为了便于进行弹性支撑系统与刚性支撑系统的对比实验, 本文在设计弹性支撑结构的实物模型时, 选取矽钢悬臂梁 (厚度为 0.25 mm) 来代替物理模型图 7 中的弹簧结构, 如图 16 (a) 所示. 矽钢悬臂梁自由端固定有永磁铁 C, 其根部固定在基

座3上,且该砒钢悬臂梁基座3可以在能量采集结构底板基座2上沿梁长度方向水平移动,用于调整两块磁铁之间的间距 d . 压电悬臂梁平面和砒钢悬臂梁平面平行于能量采集结构底板基座2平面放置,整个能量采集结构通过底板基座2受到激振器的激励作用.

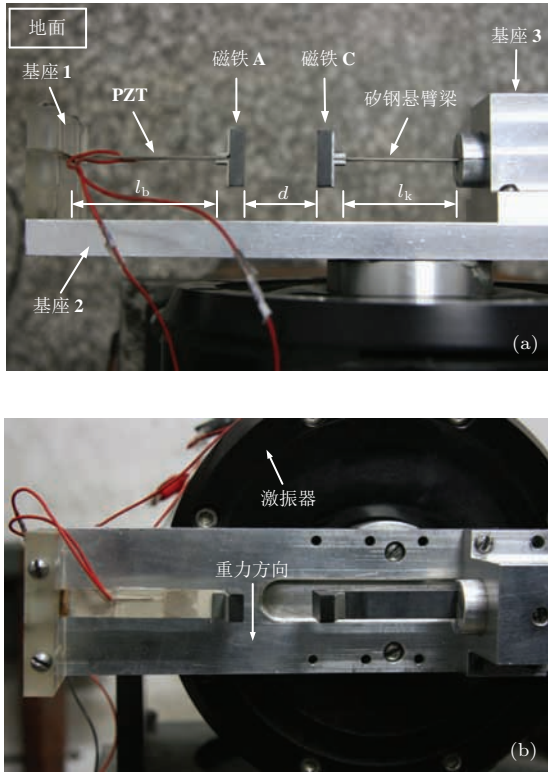


图 16 弹性支撑压电振动能量采集系统实验结构图

需要说明的是,砒钢悬臂梁的伸出长度 l_k 可以在 $[0, 40 \text{ mm}]$ 范围内进行调节,用于改变外部磁铁C的弹性支撑状态,即根据弹性力 F_n 、弹性变形 X_n 和弹簧刚度 K_n 的关系 $F_n = -K_n X_n$,以及 l_k 与 X_n 成比例的关系,可以用 l_k 的长短变化模拟弹簧刚度 K_n 的变化. 砒钢悬臂梁伸出长度越小,表示系统越接近刚性支撑状态, $l_k = 0$ 时为刚性支撑状态,反之弹性支撑状态则越明显. 实验中设计砒钢悬臂梁结构的目的在于: 1) 仅需要调节砒钢悬臂梁的伸出长度就可以实现对弹簧弹性刚度 K_n 的调节,这样在进行对比实验时可以保证其他参数的一致性. 2) 图 16 (a) 中的系统结构符合前文 3.1 节中提到的“最大限度保证磁铁 C 沿 $Z(t)$ 方向运动”的假设. 此外,为了满足前文 3.1 节中提到的“系统处于平衡位置时,不考虑磁铁 A 和外部磁铁 C 的重力对压电悬臂梁以及弹簧静力形变的影响”的假设,

实际实验过程中,能量采集结构底板基座2平面及其两个梁的平面均垂直于地面放置,如图 16 (b) 所示,即激振器沿平行于地面的方向激励底板基座2振动,以消除两块磁铁的重力对压电悬臂梁与砒钢悬臂梁的静力形变影响.

整个实验测试系统框架如图 17 所示,主要由信号发生器、功率放大器、激振器、压电悬臂梁能量采集器、数据采集器、计算机等组成. 实验中,信号发生器可以产生不同强度且频率带宽为 $0\text{--}120 \text{ Hz}$ 的随机激励,该激励信号经过功率放大器及激振器作用于能量采集器上,能量采集器的压电悬臂梁在随机振动激励的作用下振动发电,其压电片产生的电压通过引线和数据采集器进行采集,并在计算机中进行分析.

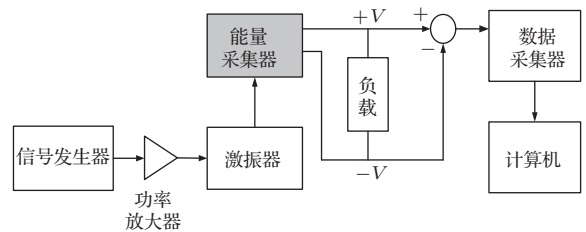


图 17 弹性支撑压电振动能量采集器实验测试系统

通过调节两块磁铁的间距 d 和砒钢悬臂梁伸出长度 l_k ,实验中分别记录了大激励强度 $D = 1.5$ 和小激励强度 $D = 0.5$ 时,不同 d 值和 l_k 值下压电悬臂梁的输出电压统计平均值 V_{rms} . 仿照图 13 (a) 和 (b),可以绘制输出电压均方值 V_{rms} 关于磁铁间距 d 和砒钢悬臂梁伸出长度 l_k 的关系,如图 18 (a) 和 (b) 所示. 可以看出,无论是在高强度还是低强度的随机激励下,图 18 (a) 和 (b) 与图 13 (a) 和 (b) 的形状都非常相似,说明刚性支撑结构与弹性支撑结构下系统的电压输出特性及变化趋势与仿真模拟基本一致,验证了理论分析的正确性.

进一步由图 18 可知,无论是大激励强度 $D = 1.5$ 还是小激励强度 $D = 0.5$,弹性支撑系统的 V_{rms} 在间距 d 为 $35\text{--}45 \text{ mm}$ 范围内、砒钢悬臂梁的伸出长度 $l_k = 30 \text{ mm}$ 处基本能保持一个较大的水平峰值,故将 $l_k = 30 \text{ mm}$ 作为弹性支撑系统的最优弹性支撑参数. 对于刚性支撑系统($l_k = 0$ 时),当激励强度 D 变化时,其最大值 V_{rms} 对应的间距 d 发生移动. 为了看清变化情况,仿照图 14,通过调节两块磁铁的间距 d 和噪声强度 D ,实验中同样记录了 l_k 分别为 0 和 30 mm 时,不同 d 值和 D

值下压电悬臂梁的输出电压统计平均值,可分别绘制出刚性和弹性支撑系统的输出电压均方值 V_{rms} 关于磁铁间距 d 和激励强度 D 的关系,如图19所示.不难发现,对于刚性支撑系统图19(a),当激励强度 D 减小时,其最大值 V_{rms} 对应的间距 d 发生30 mm到25 mm的移动,而对于弹性支撑系统图19(b),当激励强度 D 减小时,其最大值 V_{rms} 对应的间距 $d = 35$ mm基本不变.由于实际应用中能量采集器件的结构参数不可实时改变,因此从保持结构间距不变且稳定输出其最大电压方面考虑,弹性支撑系统比刚性支撑系统具有优越性,验证了第4节的结论.

的机电能量转换特性,而在高强度随机激励下,刚性支撑系统比弹性支撑系统可以表现出好的机电能量转换特性,进一步验证了第4节的结论.

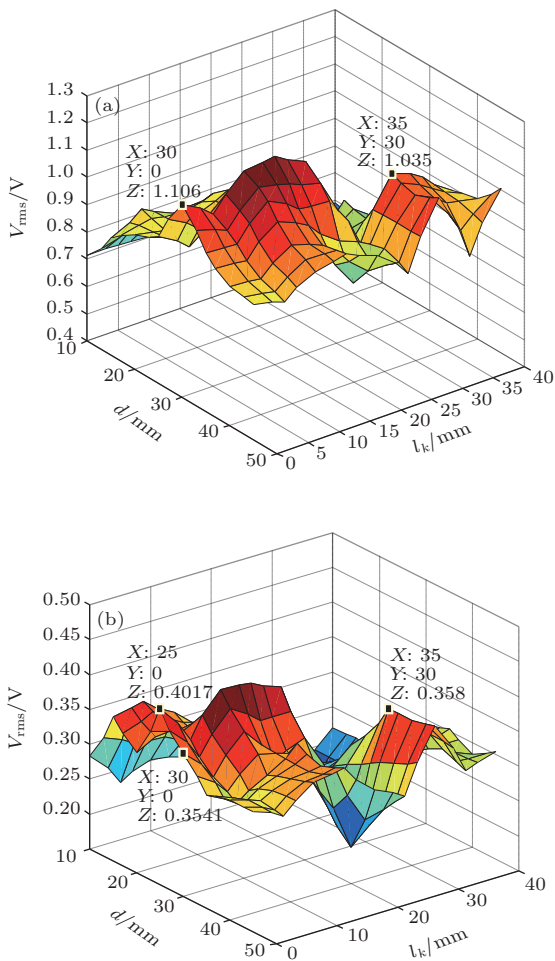


图18 (网刊彩色) 输出电压均方值 V_{rms} 关于磁铁间距 d 和砂钢悬臂梁伸出长度 l_k 的关系 (a) 大激励强度 $D = 1.5$; (b) 小激励强度 $D = 0.5$

从保持结构参数不变角度考虑,分别截取图19(a)中 $d = 30$ mm和图19(b)中 $d = 35$ mm的 V_{rms} 关于 D 的变化趋势进行对比,得到图20结果.可以看出,与图15相似,在低强度随机激励下,弹性支撑系统相比刚性支撑系统可以发挥出更好

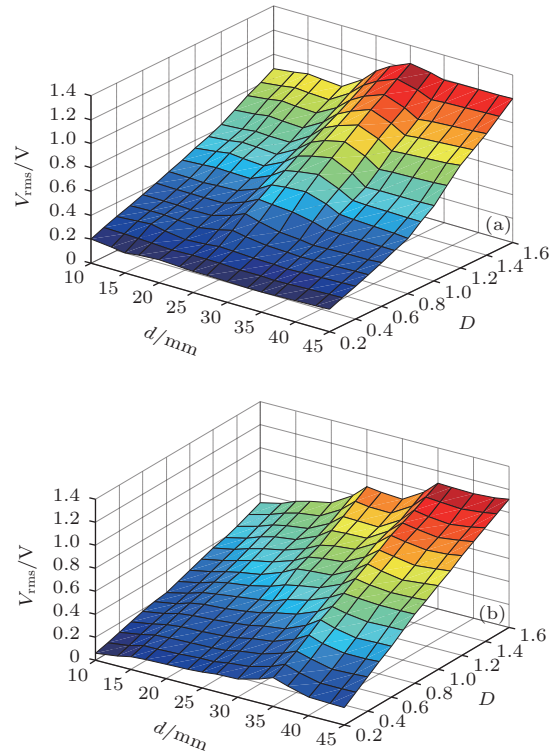


图19 (网刊彩色) V_{rms} 关于磁铁间距 d 和激励强度 D 的关系 (a) 刚性支撑系统($l_k = 0$); (b) 弹性支撑系统($l_k = 30$ mm)

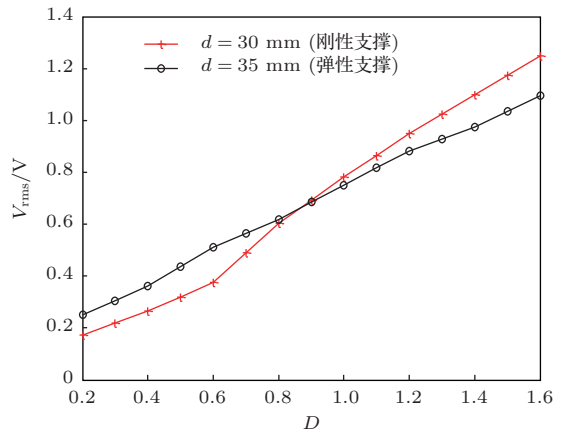


图20 l_k 分别为0和30 mm时,刚性和弹性支撑系统的 V_{rms} 关于 D 的变化趋势对比图

6 结 论

针对振动激励强度不够强时,刚性支撑外部磁铁结构式的非线性压电悬臂梁能量采集系统,存在悬臂梁的振动局限在单阱中做拟线性振荡,其能

量采集效力较低的缺陷, 本文提出弹性支撑外部磁铁结构方式来研究低强度随机激励下的非线性压电悬臂梁振动能量采集特性. 由于弹性支撑系统具有随时间变化的势函数, 为悬臂梁在低强度激励下达到双稳的跃迁振荡创造了条件, 因此可提升压电梁的机电转换效率. 研究发现, 在低随机激励强度下弹性支撑系统相比刚性支撑系统可以发挥出更好的机电能量转换特性. 此外, 当环境中的随机激励强度变化时, 为得到高效的机电能量转换, 刚性支撑系统的磁铁间距需要实时调整, 而弹性支撑系统的磁铁间距无需调整. 所以, 对于变化的随机激励历程, 当结构参数固定时, 弹性支撑非线性能量采集系统能够更好地迎合强度变化的随机激励源, 可实现高效的机电能量转换.

参考文献

- [1] Roundy S J 2003 *Doctor of Philosophy* (Berkeley: University of California)
- [2] Sun J, Li Y G, Liu J Q, Yang C S, He D N 2009 *Micro-nano-electronic Technology* **46** 673 (in Chinese) [孙健, 李以贵, 刘景全, 杨春生, 何丹农 2009 微纳电子技术 **46** 673]
- [3] Mateu L, Moll F 2005 *Proceedings of the SPIE-The International Society for the Optical Engineering* Seville, Spain, June, 2005 p359
- [4] Paradiso J A, Starner T 2005 *IEEE Pervasive Computing* Hawaii, USA March 8–12, 2005 p18
- [5] Anton S R, Sodano H A 2007 *Smart Mater. Struct.* **16** R1
- [6] Lu Y W, Shan X B, Yuan J B, Xie T 2010 *Machinery Design & Manufacture* **5** 118 (in Chinese)[卢有为, 单小彪, 袁江波, 谢涛 2010 机械设计与制造 **5** 118]
- [7] Kim S 2002 *Doctor of Philosophy* (Pittsburgh: University of Pittsburgh)
- [8] Wang Z P, Liu J B, Jiang N, Li B 2010 *Piezoelectrics & Acousto-optics* **32** 763 (in Chinese) [王治平, 刘俊标, 姜楠, 李博 2010 压电与声光 **32** 763]
- [9] Liu B Z, Peng J H 2010 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) pp1–6 (in Chinese) [刘秉正, 彭建华 2010 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第1–6页]
- [10] Cottone F, Vocca H, Gammaitoni L 2009 *Physical Review Letters* **102** 080601
- [11] Ajitsaria J, Choe S Y, Shen D, Kim D J 2007 *Smart Mater. Struct.* **16** 447
- [12] Guyomar D, Badel A, Lefeuvre E, Richard C 2005 *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* April, 2005 p584
- [13] Chen Z S, Yang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074301 (in Chinese) [陈仲生, 杨拥民 2011 物理学报 **60** 074301]
- [14] Ferrari M, Baù M, Guizzetti M, Ferrari V 2011 *Sensors and Actuators A* **172** 287
- [15] Priya S, Inman D J (translated by Huang J Q, Huang Q A) 2010 *Energy harvesting technologies* (Nanjing: Dongnan University Press) (in Chinese) [(印) 沙山克·普利亚, (美) 丹尼尔·茵曼著 (黄见秋, 黄庆安译) 2010 能量收集技术 (南京: 东南大学出版社)]
- [16] Roundy S, Wright P K, Rabaey J 2003 *Computer Communications.* **26** 1131
- [17] DuToit N E, Wardle B L 2005 *Integrated Ferroelectrics.* **45** 1126
- [18] Roundy S, Wright P K 2004 *Smart Mater Struct* **13** 1131
- [19] Leng Y G, Leng Y S, Wang T Y 2006 *Journal of Sound and Vibration* **292** 788
- [20] Leng Y G, Wang T Y 2007 *Mechanical Systems and Signal Processing* **21** 138
- [21] Leng Y G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020503 (in Chinese) [冷永刚 2011 物理学报 **60** 020503]
- [22] Qiu H C, Dara F, Wu X Z, Helmet S 2014 *Chin. Phys. B* **23** 027701
- [23] Gu Y, Li Q, Xu B J, Zhao Z 2014 *Chin. Phys. B* **23** 017804
- [24] Gu Y, Li Q, Xu B J, Zhao Z 2014 *Chin. Phys. B* **23** 017804

Studies on vibration response and energy harvesting of elastic-supported bistable piezoelectric cantilever beams*

Gao Yu-Ji¹⁾ Leng Yong-Gang^{1)2)†} Fan Sheng-Bo¹⁾ Lai Zhi-Hui¹⁾

1) (*School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

2) (*Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

(Received 15 November 2013; revised manuscript received 21 January 2014)

Abstract

Based on the results of study on conventional rigid support nonlinear energy harvesters, in this paper, we conceive a kind of structure with an elastic-supported external magnet, for keeping the system in a state of bistable oscillation due to low-intensity excitations. Thus, an efficient electromechanical energy conversion can be accomplished. Studies show that the elastic-supported nonlinear energy harvesting systems do not need real-time adjustment of magnet spacings to meet varying-intensity random excitation vibrations. This structure helps to better satisfy the variable-intensity random excitation source, consequently it achieves efficiently electromechanical energy conversion.

Keywords: energy harvesting, bistable oscillation, piezoelectric cantilever, elastic support

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: [10.7498/aps.63.090501](https://doi.org/10.7498/aps.63.090501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51275336), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of High Education of China (Grant No. 20120032110001).

† Corresponding author. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn