

# 二维均匀流与重力短峰波相互作用解析\*

文锋 王建华<sup>†</sup>

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

(2013年11月12日收到; 2013年12月25日收到修改稿)

短峰波和海流广泛分布于海洋之中, 但二者的相互作用直到近些年才逐渐受到关注, 根据速度势函数理论, 推导二维均匀流与重力短峰波的相互作用, 区别于之前的研究, 推导时不考虑波面的毛细影响, 避免了将位置变量( $x$ )与时间变量( $t$ )绑定的假设, 使得二阶速度势函数包含了的时间( $t$ )一阶项, 从而给出了完整的二维流与短峰波交互作用的二阶解析解, 对比结果说明上述考虑对于波流共同作用结果有影响, 尤其是在波高较大时, 影响更加明显, 所得结果, 可用于高波浪条件下海洋波浪与流相互作用的计算.

**关键词:** 短峰波, 二维均匀流, 波流相互作用, 二阶解析解

**PACS:** 47.35.Bb, 47.35.Lf, 92.10.ah

**DOI:** 10.7498/aps.63.094701

## 1 引言

短峰波是一种由两列同频率、同波长但前进方向不同的前进波交汇而成的三维波浪形式, 在海洋中, 当波浪遇到防波堤或者海洋建筑物, 入射波和反射波会叠加而形成短峰波, 此类型波浪在海洋中分布广泛, 自从Hsu等<sup>[1]</sup>给出短峰波的三阶解析表达式以来, 后续研究往往着眼于更高阶次<sup>[2]</sup>或者考虑表面张力影响<sup>[3]</sup>, 邓争志等<sup>[4]</sup>研究了毛细-重力短峰波作用下海底边界层速度的二阶解, 可用于分析海底泥沙等的运输问题; 黄虎等<sup>[5]</sup>考虑了一维均匀流的影响, 并给出了三阶完备解, 之后又考虑了一维、二维均匀流作用和表面张力的共同影响, 得到了一阶解析解<sup>[6,7]</sup>, 并利用摄动分析法, 给出了二维均流与毛细-重力短峰波相互作用的二阶解析表达式<sup>[8]</sup>, Jian等<sup>[9]</sup>在文献<sup>[8]</sup>的基础之上给出了三阶解析解.

细究前述文献, Huang<sup>[8]</sup>和Jian<sup>[9]</sup>等在进行推导时, 考虑了波面的毛细影响, 为了简化推导, 将位置变量 $x$ 和时间 $t$ 项合并为一项(即设无量纲参

数 $X = mkx - \omega t$ )进行求解, 而在实际海洋环境中, 对海洋构筑物或海床有明显影响的波浪波高通常是米级的, 此时毛细作用对于波浪的影响将变得非常微小<sup>[9]</sup>, 而波浪非线性的影响则相对明显, 毛细影响此时往往可以忽略, 而须着重考虑非线性重力短峰波的影响. 本文在分析重力短峰波与二维均匀流共同作用时, 忽略毛细作用的影响, 重点关注重力短峰波与均匀流的相互作用, 分析时不采用 $X = mkx - \omega t$ 的假设, 而采用类似Hsu等<sup>[1]</sup>的方法, 将位置变量( $x$ )和时间变量( $t$ )分开(即假设无量纲参数 $X = kx$ ), 推导并给出了相应的二阶解析解, 结果表明: 在一定条件下, 假设 $X = kx$ 会给二阶波形函数及速度势函数带来明显不同于假设 $X = mkx - \omega t$ 所得到的二阶解析结果, 进而影响相关运动学和动力学结果.

本文旨在建立重力短峰波与二维均匀流相互作用解答, 假设 $X = kx$ 并给出相应二阶解析结果, 并与Huang等<sup>[8]</sup>的解析结果进行对比, 对比时取表面张力项为零以忽略毛细影响, 得到在假设 $X = mkx - \omega t$ 条件下重力短峰波与二维均匀流的解答.

\* 国家自然科学基金(批准号: 41330633)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: [wjh417@sjtu.edu.cn](mailto:wjh417@sjtu.edu.cn)

## 2 控制方程及求解

重力短峰波与二维均匀流相互作用示意图如图1所示, 通常采用如下假设: 1) 海水是不可压缩且无旋的; 2) 忽略海水黏滞性; 3) 海水深度是有限的; 4) 反射墙和海床均为不透水边界.

基于上述假设, 海水流场满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \quad (1)$$

其中  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  为 Laplace 算子,  $\Phi$  表示总的速度势函数, 考虑流的影响时, 可表示为

$$\Phi(x, y, z, t) = \tilde{\phi}(x, y, z, t) + U_1x + U_2y. \quad (2)$$

$\tilde{\phi}(x, y, z, t)$  为无流时的速度势函数,  $U_1$  和  $U_2$  分别为  $x$  和  $y$  方向均匀流的速率. 海水各个方向上的速度场为

$$\begin{aligned} u_f &= \Phi_x = \tilde{\phi}_x + U_1, \\ v_f &= \Phi_y = \tilde{\phi}_y + U_2, \\ w_f &= \Phi_z = \tilde{\phi}_z, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $u_f, v_f$  和  $w_f$  为流体在  $x, y$  和  $z$  方向的速度.

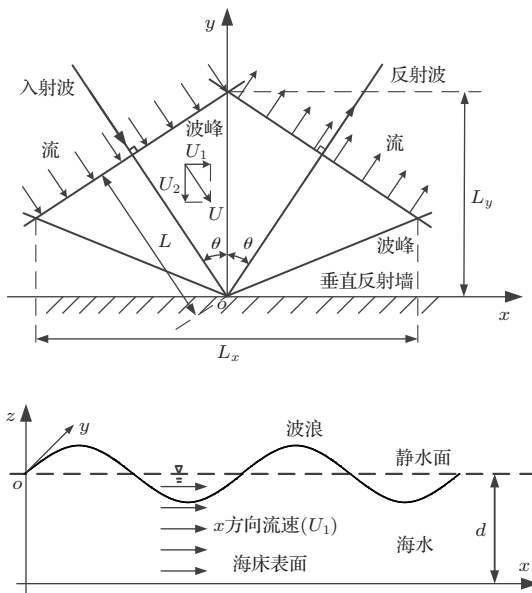


图1 波浪-海床共同作用示意图

海水的边界包括波面处动力学边界、运动学边界、反射墙和水底不透水边界, 分别为

1) 动力学边界 ( $z = \eta$ )

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + g\eta = C(t). \quad (4)$$

2) 运动学边界 ( $z = \eta$ )

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z = 0. \quad (5)$$

3) 不透水反射墙 ( $y = 0$ )

$$v_f = \Phi_y = \tilde{\phi}_y + u_2 = 0. \quad (6)$$

4) 不透水海床面 ( $z = -d$ )

$$w_f = \Phi_z = 0. \quad (7)$$

其中  $t$  表示时间,  $d$  表示水深,  $\eta$  为波形函数, 即波面相对于静水的高度;  $C(t)$  为 Bernoulli 常数.

为便于推导, 采用如下无量纲变量, 其中令  $\hat{x} = kx$  以将  $x$  与时间  $t$  分离考虑, 而非  $X = mkx - \omega t$ :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= kx, \hat{y} = ky, \hat{z} = kz, \\ \hat{t} &= t\sqrt{gk}, \hat{\omega} = \omega/\sqrt{gk}, \hat{d} = kd, \\ \hat{u}_i &= U_i\sqrt{k/g} (i = 1, 2), \\ \hat{\phi} &= k^2\tilde{\phi}/\sqrt{gk}, \hat{\eta} = k\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $k = 2\pi/L$  为波数,  $L$  为波长,  $g$  为重力加速度;  $T$  为波浪周期;  $\omega$  为角频率,  $\omega = 2\pi/T$ . 为求简便, 略去“ $\hat{\phantom{x}}$ ”符号, 即下面表述中  $x$  与  $\hat{x}$  等是相同的.

利用摄动法求解方程组, 设微小量  $\varepsilon = kH/2$ , 其中  $H$  为波高, 对各无量纲变量按照  $\varepsilon, \varepsilon^2$  及  $o(\varepsilon^2)$  展开, 其中  $o(\varepsilon^2)$  为比  $\varepsilon^2$  高阶量:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^{(1)}\varepsilon + \phi^{(2)}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \\ \eta &= \eta^{(1)}\varepsilon + \eta^{(2)}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \\ \omega &= \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \\ u_1 &= u_{10} + u_{11}\varepsilon + u_{12}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \\ u_2 &= u_{20} + u_{21}\varepsilon + u_{22}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9)$$

将(9)式代入(4)–(7)式, 依据  $\varepsilon$  和  $\varepsilon^2$  项得到一阶和二阶控制方程, 然后依次求解一阶和二阶控制方程.

### 2.1 一阶控制方程

$$\begin{aligned} \phi_{xx}^{(1)} + \phi_{yy}^{(1)} + \phi_{zz}^{(1)} &= 0, \\ \omega_0\phi_t^{(1)} + \eta^{(1)} + u_1\phi_x^{(1)} &= 0, \quad z = 0, \\ \omega_0\eta_t^{(1)} + u_{10}\eta_x^{(1)} - \phi_z^{(1)} &= 0, \quad z = 0, \\ \phi_y^{(1)} + u_{21} &= 0, \quad y = 0, \\ \phi_z^{(1)} &= 0, \quad z = -d, \\ u_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

求解方程组(10)得到

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \omega_0 \frac{\cosh(z+d)}{\sinh(d)} \cos(ny) \sin(mx-t) \\ &\quad - u_{21}y, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $n = \cos \theta$ ,  $m = \sin \theta$ ,  $\theta$  为波的入射角 (见图 1), 将 (11) 式代入方程组 (10) 的第二式, 有

$$\eta^{(1)} = \frac{\omega_0}{\omega_0 - mu_{10}} \cos(ny) \cos(mx - t). \quad (12)$$

由 (11), (12) 和 (10) 第三式, 得到色散关系

$$(\omega_0 - mu_{10})^2 = \tanh(d). \quad (13)$$

由 (11) 式及 (12) 式可知, 一阶无量纲速度势函数  $\phi^{(1)}$  与波形函数  $\eta^{(1)}$  均与 Huang<sup>[8]</sup> 等的结果一致, 说明一阶解不受位置变量 ( $x$ ) 和时间变量 ( $t$ ) 绑定的影响.

## 2.2 二阶控制方程

$$\begin{aligned} & \phi_{xx}^{(2)} + \phi_{yy}^{(2)} + \phi_{zz}^{(2)} = 0, \\ & \omega_0 \phi_t^{(2)} + \eta^{(2)} + u_{10} \phi_x^{(2)} \\ & = -\frac{1}{2} [(\phi_x^{(1)})^2 + (\phi_y^{(1)})^2 + (\phi_z^{(1)})^2] \\ & \quad - \eta^{(1)} (\omega_0 \phi_{zt}^{(1)} + u_{10} \phi_{zx}^{(1)}) - \omega_1 \phi_t^{(1)} - u_{11} \phi_x^{(1)} \\ & \quad - u_{21} \phi_y^{(1)}, \quad z = 0, \\ & \omega_0 \eta_t^{(2)} + u_{10} \eta_x^{(2)} - \phi^{(2)} \\ & = -\eta_x^{(1)} (\phi_x^{(1)} + u_{11}) - \eta_y^{(1)} (\phi_y^{(1)} + u_{21}) - \omega_1 \eta_t^{(1)} \\ & \quad + \phi_{zz}^{(1)} \eta^{(1)}, \quad z = 0, \\ & \phi_y^{(2)} + u_{22} = 0, \quad y = 0, \\ & \phi_z^{(2)} = 0, \quad z = -d. \end{aligned} \quad (14)$$

作为特征条件, 利用前进波和立波作为参数确定之用, 根据 Hsu 等建议:

1) 立波 ( $\theta = \pi/2$ )

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^\pi \eta(x, y, t) dy dx = 0, \\ & \nabla \phi(x, y, z, t + 2\pi) = \nabla \phi(x, y, z, t), \\ & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \eta(y, t) \sin t \cos y dy dt = 0, \\ & \int_{-d}^0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \phi(y, z, t) \sin t \cos y dt dy dz \\ & = \frac{\pi^2}{2} \omega_0. \end{aligned} \quad (15)$$

2) 前进波 ( $\theta = 0$ )

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \eta(x, t) dx = 0, \\ & \nabla \phi(x, z, t + 2\pi) \\ & = \nabla \phi(x + 2\pi, z, t) \\ & = \nabla \phi(x, z, t), \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ , 为 Hamiltonian 算子, 求解得到  $\eta^{(2)}$ ,  $\phi^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} & = a_{220} \cos 2(mx - t) + a_{202} \cos 2ny \\ & \quad + a_{222} \cos 2(mx - t) \cos 2ny, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} & = \alpha_0 t + b_{220} \sin 2(mx - t) \cosh 2m(z + d) \\ & \quad + b_{222} \sin 2(mx - t) \cos 2ny \cosh 2(z + d) \\ & \quad - u_{22} y. \end{aligned} \quad (18)$$

上式中系数  $\alpha_0, a_{220}, a_{202}, a_{222}, b_{220}, b_{222}$  见附录, 同时可以得到

$$\omega_1 = mu_{11}. \quad (19)$$

对比忽略毛细影响时 Huang 等<sup>[8]</sup> 的解析解, 可以看到因为  $x$  和  $t$  分离, (18) 式中  $\phi^{(2)}$  多了一项  $\alpha_0 t$ , 同时其他系数也均不相同, 至此, 一阶波形函数及速度势函数  $\eta^{(1)}, \phi^{(1)}$  和二阶波形函数及速度势函数  $\eta^{(2)}, \phi^{(2)}$  均已求到 (分别见 (11), (12), (17), (18) 式, 为无量纲形式), 波形函数  $\eta$  及速度势函数  $\phi$  为

$$\eta = \eta^{(1)} \varepsilon + \eta^{(2)} \varepsilon^2, \quad (20)$$

$$\phi = \phi^{(1)} \varepsilon + \phi^{(2)} \varepsilon^2. \quad (21)$$

总的色散关系式可表示为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 + \omega_1 \varepsilon, \quad (22)$$

其中  $\omega_0 = \sqrt{\tanh(d)} + mu_{10}$ ,  $\omega_1 = mu_{11}$ .

可以验证, 当实际流速  $U_1$  及  $U_2$  为零时, 则本解析解一阶和二阶速度势函数  $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$  和波形函数  $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$  退化为无流重力短峰波情况, 与 Hsu 的一阶、二阶结果完全符合, 证明推导是正确的.

## 3 影响分析

海水内任意位置的 Bernoulli 方程为

$$\Phi_t + gz + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{P}{\rho} = C(t), \quad (23)$$

其中  $\rho$  为海水密度, 根据已求得的一阶和二阶速度势函数  $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ , 由 (23) 式, 化简并求出流体内任意位置的波压力  $P$ :

$$\begin{aligned} P \cdot \frac{k}{\rho g} & = -z - \omega \phi_t - \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \\ & \quad - u_1 \phi_x - u_2 \phi_y \\ & = -z + P_1 \varepsilon + P_2 \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式中  $-z$  表示静水压力, 作为特例, 给出海床表面 ( $z = -d$ ) 处的波压力, 海洋工程中常用海床表面的波压力来计算海床响应:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (\omega_0 - mu_{10})\phi_x^{(1)} \\
 &= \frac{\omega_0(\omega_0 - mu_{10})}{\sinh d} \cos(mx - t) \cos ny, \quad (25) \\
 P_2 &= \omega_0\phi_x^{(2)} + \omega_1\phi_x^{(1)} - \frac{m^2}{2}(\phi_x^{(1)})^2 - \frac{n^2}{2}(\phi_y^{(1)})^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}(\phi_z^{(1)})^2 - mu_{10}\phi_x^{(2)} - mu_{11}\phi_x^{(1)} \\
 &\quad - nu_{21}\phi_y^{(1)} \\
 &= D_1 \cos 2(mx - t) + D_2 \cos 2ny \\
 &\quad + D_3 \cos 2(mx - t) \cos 2ny. \quad (26)
 \end{aligned}$$

(26) 式中的系数  $D_1, D_2, D_3$  见附录. 可以看到, 速度势函数  $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$  与  $u_2$  有关, 但海床表面一阶和二阶波压力 ( $P_1, P_2$ ) 均不受  $u_2$  影响, 对于另一个方向上的无量纲速度  $u_1$ , 每个值均有多组  $u_{10}$  和  $u_{11}$  可同时满足  $u_1 = u_{10} + u_{11}\varepsilon$ , 根据摄动法要求, 首项  $u_{10}$  应占大比例, 在给定实际流速  $U_1$  情况下, 图 2 显示不同 ( $u_{10}/u_1$ ) 值对于相对最大波压力 ( $(p_{\max} - p_0)/p_0$ ),  $p_0$  为对应的线性无流波压力幅值的影响, 可以看到随着  $u_{10}/u_1$  的增大, 相对最大波压力有所增加, 且随着实际流速  $U_1$  的增大而增加, 当实际流速  $U_1 = 1$  m/s 时,  $u_{10}/u_1 = 1.0$  相比  $u_{10}/u_1 = 0.5$  的相对最大波压力差值 ( $(p_{\max} - p_0)/p_0$ ) 约为 4%, 说明  $u_{10}/u_1$  宜取大以考虑不利影响, 后面对比分析中均采用  $u_1 = u_{10}$ .

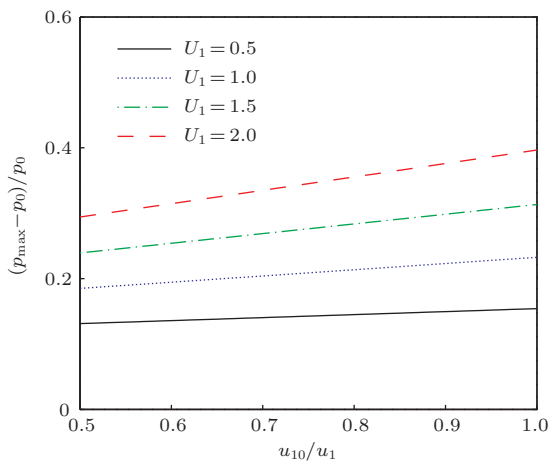


图 2 不同  $u_{10}/u_1$  对海床最大波压力 ( $z = 0$ ) 的影响 (波流参数:  $T = 10$  s,  $H = 3$  m,  $d = 10$  m,  $\theta = 45^\circ$ ,  $U_2 = 0$  m/s)

### 3.1 波形对比

波形的一阶解与 Huang 等 [8] 的一阶解相同, 二阶解的表达式形式相同但系数不同, 为了分析不同波浪周期 ( $T$ ) 和波高 ( $H$ ) 条件下两种假设所推得波形的差异, 选用  $y = 0$  平面上的二维波形图进行比较.

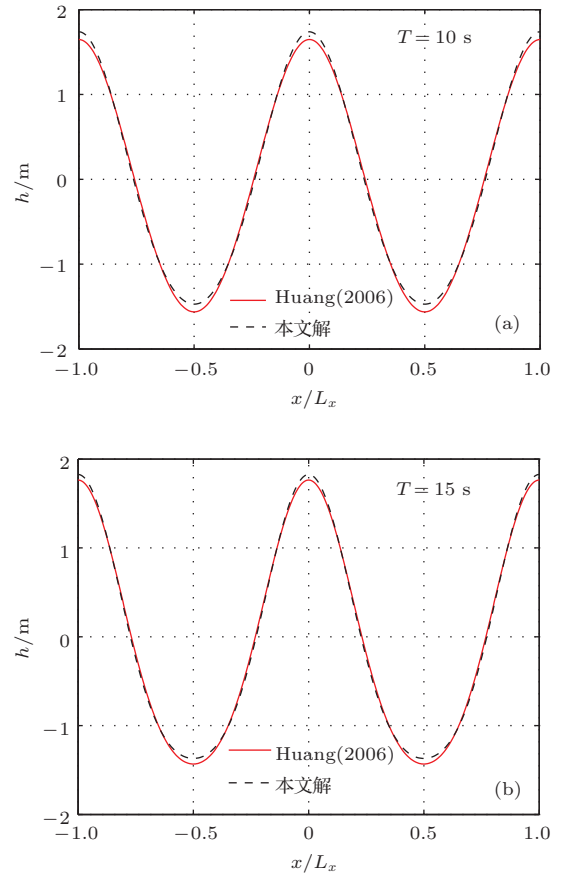


图 3 不同波浪周期条件下,  $y = 0$  平面上波浪-流相互作用波形图 (a)  $T = 10$  s; (b)  $T = 15$  s (波流输入参数:  $H = 3$  m,  $d = 20$  m,  $\theta = 60^\circ$ ,  $U_1 = 1$  m/s,  $U_2 = 0.5$  m/s)

图 3 为  $y = 0$  平面上, 波浪周期 ( $T$ ) 为 10 s 和 15 s 时的波形图, 其中实线为 Huang 解析解, 虚线为本文解析解. 由图 3 可以看到, 虽然两种解析解中波形略有差异, 但不同波浪周期 ( $T$ ) 条件下,  $x$  与  $t$  绑定与否对波形影响较小.

图 4 为  $y = 0$  平面上, 波浪高度 ( $H$ ) 分别为 3 m 和 6 m 时的波形图, 由图 4 可以看到, 在波高较大的情况下, 随着波高的增加,  $x$  与  $t$  绑定与否对波形的影响也随之变得明显, 假设  $X = kx$  和  $X = mkx - \omega t$  推得波形之间的差异将随着波高的增大而变大.

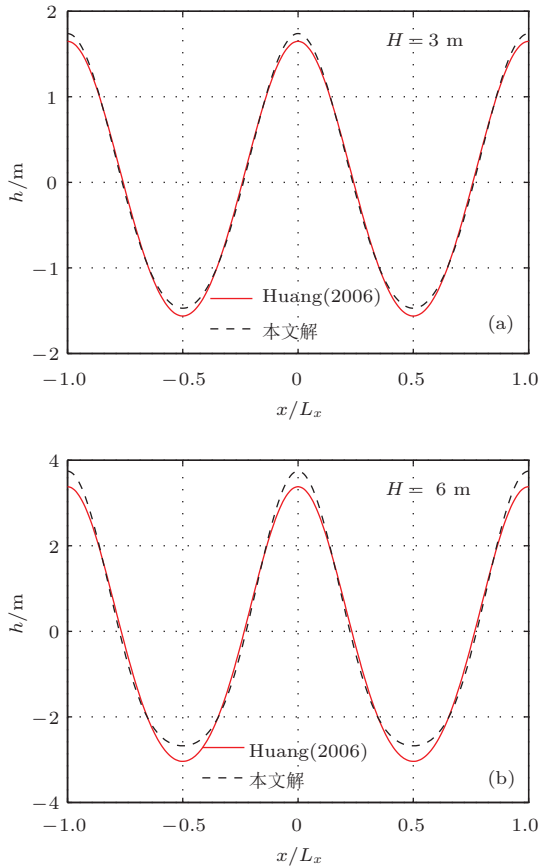


图4 不同波高条件下,  $y = 0$  平面上波浪-流相互作用波形图 (a)  $H = 3$  m; (b)  $H = 6$  m (波流输入参数:  $T = 10$  s,  $d = 20$  m,  $\theta = 60^\circ$ ,  $U_1 = 1$  m/s,  $U_2 = 0.5$  m/s)

### 3.2 波压力对比 ( $z = 0$ )

波浪-流作用下海床表面的波浪压力由(24)式决定, 依此可进一步分析不同波浪周期和波高情况下, 不同假设对海床表面处波压力的影响, 图5显示在不同波浪周期( $T$ )条件下, 假设  $X = kx$  和  $X = mkx - \omega t$  所引起海床表面波压力的差异:  $\Delta P = P_{\max} - P_{\max}(\text{Huang})$ , 其中  $P_{\max}$  为本文波压力幅值,  $\Delta P$  反映了本文解与Huang解析解(不考虑毛细影响)在海床表面波压力最大值上的差值, 由图5可以看到, 波浪周期( $T$ )在5 s到20 s范围内变化时, 最大相对波压力差值不超过3%, 说明在不同波浪周期条件下, 两种假设对海床表面波压力影响不大.

图6表示不同波浪高度( $H$ )条件下, 随着波浪高度的增加, 两种解之间的最大波压力差值越来越大, 当波浪高度为  $H = 15$  m时,  $\Delta P/P_{\max}$  最大值接近15%, 考虑到随着波高的增加,  $P_{\max}$  也相应增加, 故波压力差值将会非常可观. 因而在高波浪条

件下, 假设  $X = mkx - \omega t$  得到的结果将低估海床表面的波压力, 用于海床响应分析时会低估波浪-流的作用, 其结果用于工程时偏于不安全.

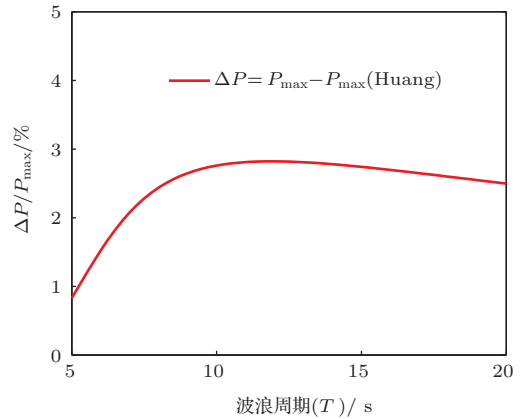


图5 波浪周期对海床表面 ( $z = 0$ ) 处波浪压力的影响 (波流输入参数:  $H = 30$  s,  $d = 30$  m,  $\theta = 60^\circ$ ,  $U_1 = 1$  m/s,  $U_2 = 0$  m/s)

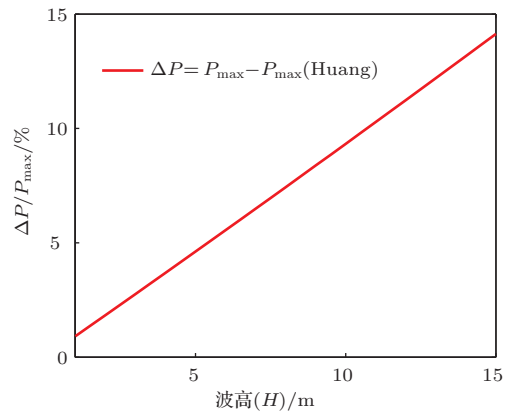


图6 波高对海床表面 ( $z = 0$ ) 处波浪压力的影响 (波流输入参数:  $T = 10$  s,  $d = 30$  m,  $\theta = 60^\circ$ ,  $U_1 = 1$  m/s,  $U_2 = 0.0$  m/s)

## 4 结 论

参照Hus等<sup>[1]</sup>求解短峰波方法, 在忽略波面的毛细影响条件下, 本文采用假设  $X = kx$  取代  $X = mkx - \omega t$  假设, 从而将变量  $x$  和  $t$  分开考虑, 进行无量纲处理后采用摄动分析法, 得到了重力短峰波与二维均匀流相互作用的二阶解析解, 该解析解能顺利退化(取流速为零)到Hus的二阶解析结果, 证明推导是正确的, 同时通过与Huang等<sup>[8]</sup>结果的对比分析, 可以得出如下结论:

1) 假设  $X = kx$  或  $X = mkx - \omega t$ , 对于一阶波形函数及速度势函数没有影响, 但对于二阶波形函数及速度势函数均有影响, 因此影响高阶效应的



波浪参数(如波高等)会影响两种假设所得到结果的差异大小;

2) 波浪周期对两种假设( $X = kx$ 或 $X = mkx - \omega t$ )所得波形的差异影响不大,但波形的差异随着波高的增加而增大;

3) 在不同波浪周期条件下,两种假设对海床表面波压力影响较小,而在不同波高条件下,相对最大波压力差值( $\Delta P/P_{\max}$ )随着波高的增加而增大,在波高较大时,假设 $X = mkx - \omega t$ 所推出的结果将低估作用在海床表面的波压力,其相对误差甚至可高达15%,因此其高波浪条件下适用性降低,本文的结果将更加适用.

本文研究中考虑了二阶波浪-流的相互作用,在接下来的研究中,可考虑比二阶更高阶解的推导和影响,以求更加准确的理解和计算波浪-流的相互作用.

附录

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\omega_0}{8}(1 - \coth^2 d) + \frac{u_{21}^2}{2\omega_0}, \\ a_{202} &= \frac{\omega_0^2}{8}[1 - (m^2 - n^2) \coth^2 d], \\ a_{220} &= \left\{ \frac{\omega_0^2}{8}[3 - (m^2 - n^2) \coth^2 d]m \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_0^2}{2}m^2 \coth d \coth(2md) \right\} \\ &\quad \times [m - 2 \tanh d \coth(2md)]^{-1}, \\ a_{222} &= \frac{\frac{\omega_0^2}{8}[3 - \coth^2 d] - \frac{\omega_0^2}{2} \coth(d) \coth(2d)}{1 - 2 \tanh(d) \coth(2d)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{220} &= \left\{ \frac{\omega_0^2}{8}[3 - (m^2 - n^2) \coth^2 d] \tanh d \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}m^2 \omega_0^2 \coth d \right\} [m(\omega_0 - mu_{10}) \sinh 2md \\ &\quad - 2(\omega_0 - mu_{10})^3 \cosh 2md]^{-1}, \\ b_{222} &= \frac{\frac{\omega_0^2}{8}(3 - \coth^2 d) \tanh d - \frac{\omega_0^2}{4} \coth d}{(\omega_0 - mu_{10}) \sinh(2d) - 2 \cosh(2d)(\omega_0 - mu_{10})^3}, \\ D_1 &= 2(\omega_0 - mu_{10})b_{220} - \frac{\omega_0^2}{8 \sinh^2 d}(m^2 - n^2), \\ D_2 &= -\frac{\omega_0^2}{8 \sinh^2 d}(m^2 - n^2), \\ D_3 &= 2(\omega_0 - mu_{10})b_{222} - \frac{\omega_0^2}{8 \sinh^2 d}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Hsu J R C, Tsuchiya Y, Silvester R 1979 *J. Fluid Mech.* **90** 179
- [2] Robert A J 1983 *J. Fluid Mech.* **135** 301
- [3] Kimmoun O, Branger H, Kharif C 1999 *Eur. J. Mech. B* **18** 889
- [4] Deng Z Z, Huang H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 735 (in Chinese) [邓争志, 黄虎 2010 物理学报 **59** 735]
- [5] Huang H, Xia Y B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3663 (in Chinese) [黄虎, 夏应波 2010 物理学报 **59** 3663]
- [6] Huang H 2008 *Chinese Sin. Bulletin* **53** 1759 (in Chinese) [黄虎 2008 科学通报 **53** 1759]
- [7] Huang H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3655 (in Chinese) [黄虎 2009 物理学报 **58** 3655]
- [8] Huang H, Jia F 2006 *Acta Mech. Sin.* **22** 433
- [9] Jian Y J, Zhu Q Y, Zhang J, Wang Y F 2009 *Appl. Math. Model* **33** 2035

# An analytical solution for the interaction of two-dimensional currents and gravity short-crest waves\*

Wen Feng Wang Jian-Hua<sup>†</sup>

(School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

( Received 12 November 2013; revised manuscript received 25 December 2013 )

## Abstract

Short-crest wave and current coexist widely in the ocean environments. However, the interaction between them has been studied recently and the method of velocity potential function was generally applied. Unlike the previous study, this article considers that location variable ‘ $x$ ’ and time variable ‘ $t$ ’ are independent of each other and it does not take into account the capillary effect, thus leading to an addition of a first-order time item in the second-order velocity potential function. Based on the perturbation technique, a second-order analytical solution is derived. Comparisons between the result in this article, where variables ‘ $x$ ’ and ‘ $t$ ’ are dependent on each other and the capillary effect is considered, and Huang’s solutions show the difference. The difference between wave profile and wave pressure on mudline will become apparent with the increase of wave height, indicating that the solutions obtained in this article will be much suitable for ocean conditions with larger wave height.

**Keywords:** short-crest wave, two-dimensional uniform currents, interaction of wave and current, second-order analytical solutions

**PACS:** 47.35.Bb, 47.35.Lf, 92.10.ah

**DOI:** [10.7498/aps.63.094701](https://doi.org/10.7498/aps.63.094701)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 41330633).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wjh417@sjtu.edu.cn](mailto:wjh417@sjtu.edu.cn)