

强阻尼广义 sine-Gordon 方程特征问题的变分迭代法

许永红 石兰芳 莫嘉琪

The variational iteration method for characteristic problem of strong damping generalized sine-Gordon equation

Xu Yong-Hong Shi Lan-Fang Mo Jia-Qi

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 010201 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.010201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.010201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

太阳强迫厄尔尼诺/南方涛动充电振子模型的 Hopf 分岔与混沌

Hopf bifurcation and chaos in the solar-forced El Niño/Southern Oscillation recharge oscillator model

物理学报.2014, 63(21): 210201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.210201>

具有一般非线性弹性力和广义阻尼力的相对转动非线性系统的周期解问题

The periodic solution problem of a relative rotation nonlinear system with nonlinear elastic force and generalized damping force

物理学报.2014, 63(20): 200202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200202>

地球磁层电磁场中粒子引导中心漂移运动模型的周期轨

The periodic problem of drift motion of the guidance center in the earth's magnetosphere electromagnetic field

物理学报.2014, 63(19): 190202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.190202>

完整力学系统的广义梯度表示

Generalized gradient representation of holonomic mechanical systems

物理学报.2014, 63(11): 110202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110202>

两自由度带电耦合振子系统的守恒量与近似解

Conserved quantities and approximate solutions of a two-dimensional charged coupled oscillator system

物理学报.2014, 63(9): 090202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.090202>

强阻尼广义sine-Gordon方程特征问题的变分迭代法*

许永红^{1)†} 石兰芳²⁾ 莫嘉琪^{3)‡}

1)(蚌埠学院数理系, 蚌埠 233030)

2)(南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

3)(安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2014年7月24日收到; 2014年8月14日收到修改稿)

研究了在数学、力学中广泛出现的一类非线性强阻尼广义sine-Gordon扰动微分方程问题. 首先, 引入行波变换, 求出退化方程的精确解. 再构造一个泛函, 创建了一个变分迭代算法, 最后, 求出原非线性强阻尼广义sine-Gordon扰动微分方程问题的近似行波解析解. 用变分迭代法可得到的各次近似解, 具有便于求解、精度高等特点. 求得的近似解析解弥补了单纯用数值方法的模拟解的不足.

关键词: 行波, 强阻尼, sine-Gordon 方程

PACS: 02.30.Hq

DOI: 10.7498/aps.64.010201

1 引言

非线性扰动发展方程在理论物理学、力学、光学的许多领域中是广泛的研究对象. 例如在激波、量子力学、大气物理、光波散射等方面都有重要的研究^[1-4]. 非线性扰动发展方程的定量和定性的各种方法也有许多发展. 当前, 研究了非线性发展方程的一些有效的方法, 如Jacobi椭圆函数法, 双曲函数法, G'/G 展开法, 修正的CK方法, 非经典李群方法, 齐次平衡法等, 不断地被改进和创新^[5-9]. 作者等也利用不动点原理、摄动理论、微分不等式, 泛函同伦映射等理论和方法研究了一系列非线性方程的有关物理问题^[10-19].

本文利用变分迭代法^[20,21], 研究了一类非线性广义sine-Gordon发展扰动方程, 求其行波近似解析解. 非线性扰动方程的渐近方法其要点是用扰动理论的渐近展开式将较复杂的非线性方程转化

为较简单的方程, 并用其得到的解去逼近原非线性方程的解^[22,23].

变分法是处理泛函的一种数学方法, 变分法的目的之一是寻求相应一类泛函的极值函数. 其关键是将对应的泛函求变分, 并取此变分为零, 以达到满足极值的函数性态. 变分迭代法是根据泛函变分的相应结果构造一个迭代式, 通过迭代关系式, 求得各次迭代的函数序列, 已达到所得的近似函数序列较快地逼近所讨论问题的精确解. 所以从某种意义上来说, 利用变分迭代方法得到的各次近似函数能够具有较快逼近精确解的特点. 近十余年来, He等学者对古典的变分迭代法作了许多研究、改进和发展^[24-31], 并在数学的各领域, 特别是微分方程各分支中, 都有重要的应用和推广, 经过改进的变分迭代法近来在物理学科中也都有很多的应用, 解决了许多近代物理中的非线性现象, 得到了满意的结果. 本文是将相应的方法推广到强阻尼广义sine-Gordon方程物理问题中.

* 国家自然科学基金(批准号: 11202106), 中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 2232012D3-34), 安徽高校省级自然科学基金项目(批准号: KJ2014A151)和江苏省自然科学基金(批准号: 13KJB170016)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: slxyh@163.com

‡ 通信作者. E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

本文使用的方法具有思路简明, 计算简单, 得到的近似解有较高的精度, 且还可以继续进行解析运算等方面的优点. 本方法有较广泛的研究前景.

今讨论如下—类被广泛用到的强阻尼广义 sine-Gordon 扰动发展方程广义特征问题:

$$u_{tt} - u_{xx} + a u_t + b u_{tx} + c u_{txx} = f(u), \quad (1)$$

$$u|_{x-t=0} = g_1, \quad u_t|_{x-t=0} = g_2,$$

$$u_{tt}|_{x-t=0} = g_3, \quad (2)$$

其中 a, b, c 为阻尼参数, $g_i (i = 1, 2, 3)$ 为常数, $f(u)$ 为扰动项, 它们是关于其变量为充分光滑的函数, 由于非线性方程 (1) 一般不能用有限个初等函数来表示其精确解. 为此, 我们先作一个行波变换, 得到一个退化的方程, 从而得到其精确解. 然后引入一个泛函, 并利用经过改造的泛函变分迭代方法得到原强阻尼广义 sine-Gordon 扰动发展方程的近似行波解.

2 退化方程的解

现作行波变换

$$z = x - t. \quad (3)$$

将变换 (3) 式代入问题 (1), (2) 得

$$\frac{d^3 u}{dz^3} + \frac{b}{c} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{a}{c} \frac{du}{dz} = -\frac{1}{c} f(u), \quad (4)$$

$$u|_{z=0} = g_1, \quad u_z|_{z=0} = -g_2,$$

$$u_{zz}|_{z=0} = g_3. \quad (5)$$

首先考虑方程 (4) 的退化情形

$$\frac{d^3 u}{dz^3} + \frac{b}{c} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{a}{c} \frac{du}{dz} = 0. \quad (6)$$

不难得到退化方程 (6) 对应的初始条件 (5) 下的精确解 \bar{u} 为

$$\begin{aligned} \bar{u} = & C_1 \exp\left(\frac{1}{2c}[-b + \sqrt{b^2 - 4ac}]z\right) \\ & + C_2 \exp\left(\frac{1}{2c}[-b - \sqrt{b^2 - 4ac}]z\right) + C_3, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 = & -[b + \sqrt{b^2 - 4ac}] \\ & \times \frac{[b + \sqrt{b^2 - 4ac}]g_2 + g_3}{8ac\sqrt{b^2 - 4ac}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_2 = & [b - \sqrt{b^2 - 4ac}] \\ & \times \frac{[b - \sqrt{b^2 - 4ac}]g_2 + g_3}{8ac\sqrt{b^2 - 4ac}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$C_3 = g_1 - \frac{2b g_2 - g_3}{4ac}. \quad (10)$$

选取 $a = 4, b = 5, c = 1, g_1(x) = g_3 = 0, g_2(x) = 1$. 得到 $\bar{u}(z)$ 的曲线图形见图 1 所示.

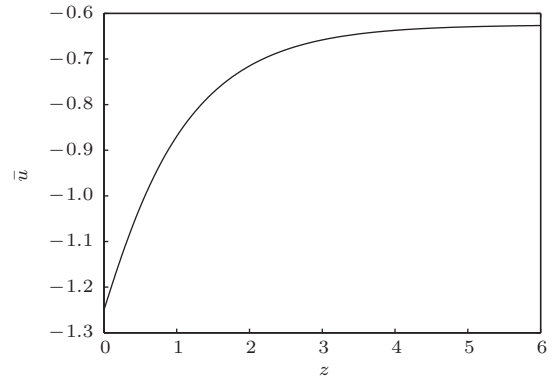


图 1 $\bar{u}(z)$ 的曲线图

将行波变换 (3) 式代入 (7) 式, 便得到退化方程 (6) 对应的初始条件 (5) 下的精确行波解:

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, t) = & C_1 \exp\left(\frac{1}{2c}[-b + \sqrt{b^2 - 4ac}](x - t)\right) \\ & + C_2 \exp\left(\frac{1}{2c}[-b - \sqrt{b^2 - 4ac}](x - t)\right) \\ & + C_3. \end{aligned} \quad (11)$$

选取 $a = 4, b = 5, c = 1, g_1(x) = g_3 = 0, g_2(x) = 1$. 退化问题行波解 $\bar{U}(x, t)$ 的曲面图形见图 2 所示.

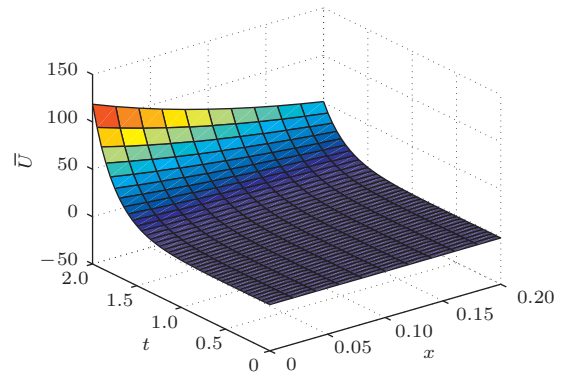


图 2 退化问题行波解 $\bar{U}(x, t)$ 的曲面图

3 扰动方程解的变分迭代算法

由变分迭代算法, 引入一个泛函 $F[u]$ [20,21],

$$F[u] = u - \int_0^z \mu(\xi, z) \left[\frac{d^3 u}{d\xi^3} + \frac{b}{c} \frac{d^2 u}{d\xi^2} \right]$$

$$+ \frac{a}{c} \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{c} f(\bar{u}) \Big] d\xi, \quad (12)$$

式中 \bar{u} 为 u 的限制变量^[20], μ 为待定函数. 将泛函 (12) 式并进行变分运算

$$\begin{aligned} \delta F = & \delta u - \mu|_{\xi=z} \delta u_{\xi\xi} + \mu_{\xi}|_{\xi=z} \delta u_{\xi} - \mu_{\xi\xi}|_{\xi=z} \delta u \\ & - \frac{b}{c} \mu|_{\xi=z} \delta u_{\xi} + \frac{b}{c} \mu_{\xi}|_{\xi=z} \delta u - \frac{a}{c} \mu|_{\xi=z} \delta u \\ & + \int_0^z [\mu_{\xi\xi\xi} - \frac{b}{c} \mu_{\xi\xi} + \frac{a}{c} \mu_{\xi}] \delta u d\xi. \end{aligned}$$

令 $\delta F = 0$. 可得到待定函数 μ 应满足的关系式

$$\mu_{\xi\xi\xi} - \frac{b}{c} \mu_{\xi\xi} + \frac{a}{c} \mu_{\xi} = 0, \quad (13)$$

$$\mu|_{\xi=z} = 0, \quad \mu_{\xi}|_{\xi=z} = 0, \quad \mu_{\xi\xi}|_{\xi=z} = 1. \quad (14)$$

由 (13), (14) 式, 不难得到

$$\begin{aligned} \mu(\xi) = & \frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left[\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1(\xi - z) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2(\xi - z) \right] - \frac{4a}{c}, \quad (15) \end{aligned}$$

其中 λ_i ($i = 1, 2$) 分别为

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{1}{2c} [b + \sqrt{b^2 - 4ac}], \\ \lambda_2 = & \frac{1}{2c} [b - \sqrt{b^2 - 4ac}]. \quad (16) \end{aligned}$$

由 (12) 式和待定函数 (15), 我们构造如下的扰动方程解的变分迭代式:

$$\begin{aligned} u_n(z) = & u_{n-1}(z) - \int_0^z \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right. \\ & \times \left(\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1(\xi - z) - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2(\xi - z) \right) \\ & \left. - \frac{4a}{c} \right] \left[\frac{d^3 u_{n-1}}{d\xi^3} + \frac{b}{c} \frac{d^2 u_{n-1}}{d\xi^2} + \frac{a}{c} \frac{du_{n-1}}{d\xi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} f(u_{n-1}) \right] d\xi, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (17) \end{aligned}$$

在 (17) 式中. 选取初始近似 u_0 为退化方程 (6) 及对应的初始条件 (5) 下的解 (7) 式 \bar{u} . 即

$$\begin{aligned} u_0 = & C_1 \exp \left[\frac{1}{2c} (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) z \right] \\ & + C_2 \exp \left[\frac{1}{2c} (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) z \right] \\ & + C_3, \quad (18) \end{aligned}$$

其中 C_i ($i = 1, 2, 3$) 由 (8)—(10) 式表示. 再由变分迭代 (17) 式, 并考虑到 (18) 式, 可以得到初值问题 (4), (5) 的一次近似解 u_1 为

$$u_1 = C_1 \exp \left[\frac{1}{2c} (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) z \right]$$

$$\begin{aligned} & + C_2 \exp \left[\frac{1}{2c} (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) z \right] + C_3 \\ & - \int_0^z \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left(\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1(\xi - z) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2(\xi - z) \right) - \frac{4a}{c} \right] \\ & \times f(u_0(\xi)) d\xi, \quad (19) \end{aligned}$$

其中 C_i, λ_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) 由 (8)—(10) 和 (16) 式表示, u_0 由 (18) 式表示.

由 (18), (19) 和 (17) 式, 可以得到初值问题 (4), (5) 的二次近似解 u_2 为

$$\begin{aligned} u_2 = & C_1 \exp \left[\frac{1}{2c} (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) z \right] \\ & + C_2 \exp \left[\frac{1}{2c} (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) z \right] + C_3 \\ & - \int_0^z \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left(\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1(\xi - z) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2(\xi - z) \right) - \frac{4a}{c} \right] \\ & \times \left[\frac{d^3 u_1}{d\xi^3} + \frac{b}{c} \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + \frac{a}{c} \frac{du_1}{d\xi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} (f(u_0(\xi)) + f(u_1(\xi))) \right] d\xi, \quad (20) \end{aligned}$$

其中 C_i, λ_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) 分别由 (8)—(10) 式和 (16) 式表示, u_0, u_1 分别由 (18) 和 (19) 式表示.

由 (17) 和 (18)—(20) 式, 继续可以得到初值问题 (4), (5) 的 n 次近似解 u_n ($n = 3, 4, \dots$). 利用泛函原理和函数的逼近理论及泛函分析的不动点定理, 可以证明^[20,21,24], 在适当的假设下, 用上述变分迭代方法得到的函数序列 $\{u_n\}$ 在所考虑的区域是当 $n \rightarrow \infty$ 时为一致收敛的. 因此由迭代 (17) 式知, 极限函数 $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 就是初值问题 (4), (5) 的精确解. u_n 就是初值问题 (4), (5) 的第 n 次近似解.

再将行波变换 (3) 式: $z = x - t$ 代入 u_n 式, 我们便得到强阻尼广义 sine-Gordon 方程特征问题 (1), (2) 的第二次近似行波解 $U_2(x, t)$ 为

$$\begin{aligned} U_2(x, t) = & C_1 \exp \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} (x - t) \right] \\ & + C_2 \exp \exp \left[\frac{1}{2c} (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) (x - t) \right] \\ & + C_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{x-t} \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left(\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1 (\xi - x + t) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2 (\xi - x + t) \right) - \frac{4a}{c} \right] \\
 & \times \left[\frac{d^3 u_1}{d\xi^3} - \frac{b}{c} \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - \frac{a}{c} \frac{du_1}{d\xi} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{c} (f(u_0(\xi)) + f(u_1(\xi))) \right] d\xi, \quad (21)
 \end{aligned}$$

其中 C_i, λ_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) 分别由(8)—(10)式和(16)式表示, u_0, u_1 由(18)和(19)式表示.

4 举 例

为了方便, 现讨论如下强阻尼广义 sine-Gordon 扰动发展方程特征问题

$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_t + 5u_{tx} + u_{txx} = u^2, \quad (22)$$

$$u|_{x-t=0} = 0, \quad u_t|_{x-t=0} = 1,$$

$$u_{tt}|_{x-t=0} = 0. \quad (23)$$

利用本文构造的变分迭代方法. 事实上, 比较广义 sine-Gordon 扰动发展方程(1). 可知 $a = 4, b = 5, c = 1, f(u) = u^2, g_1(x) = g_3 = 0, g_2(x) = 1$. 于是由(8)—(10)和(18)式, 选取发展方程初始问题的初始近似 u_0 为

$$u_0 = -\frac{2}{3} \exp(-z) + \frac{1}{24} \exp(-8z) - \frac{5}{8}. \quad (24)$$

由(19)和(20)式. 依次可得 u_1 和 u_2 ,

$$\begin{aligned}
 & u_1 \\
 & = -\frac{2}{3} \exp(-z) + \frac{1}{24} \exp(-8z) - \frac{5}{8} \\
 & + \int_0^z \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \exp(4(\xi - z)) - \exp(\xi - z) \right) - 16 \right] \\
 & \times \left[-\frac{2}{3} \exp(-\xi) + \frac{1}{24} \exp(-8\xi) - \frac{5}{8} \right]^2 d\xi, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u_2 \\
 & = -\frac{2}{3} \exp(-z) + \frac{1}{24} \exp(-8z) - \frac{5}{8} \\
 & + \int_0^z \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \exp(4(\xi - z)) - \exp(\xi - z) \right) - 16 \right] \\
 & \times \left[\frac{d^3 u_1}{d\xi^3} + 5 \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + 4 \frac{du_1}{d\xi} \right. \\
 & \left. + \left[-\frac{2}{3} \exp(-\xi) + \frac{1}{24} \exp(-8\xi) - \frac{5}{8} \right]^2 \right. \\
 & \left. + (u_1(\xi))^2 \right] d\xi, \quad (26)
 \end{aligned}$$

其中 u_1 由(25)式表示.

将行波变换(3)式代回(25)式, 便得到强阻尼广义 sine-Gordon 扰动发展方程特征问题(22), (23)的一次近似行波解 $U_1(x, t)$ 为

$$\begin{aligned}
 & U_1(x, t) \\
 & = -\frac{2}{3} \exp(-(x-t)) + \frac{1}{24} \exp(-8(x-t)) \\
 & - \frac{5}{8} + \int_0^{x-t} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \exp(4(\xi - (x-t))) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \exp(\xi - (x-t)) \right) - 16 \right] \\
 & \times \left[-\frac{2}{3} \exp(-\xi) + \frac{1}{24} \exp(-8\xi) - \frac{5}{8} \right]^2 d\xi. \quad (27)
 \end{aligned}$$

由(26)和(27)式, 强阻尼广义 sine-Gordon 扰动发展方程特征问题(22), (23)的二次近似行波解 $U_2(x, t)$ 为

$$\begin{aligned}
 & U_2(x, t) \\
 & = -\frac{2}{3} \exp(-(x-t)) + \frac{1}{24} \exp(-8(x-t)) \\
 & - \frac{5}{8} + \int_0^{x-t} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \exp(4(\xi - (x-t))) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \exp(\xi - (x-t)) \right) - 16 \right] \\
 & \times \left[\frac{d^3 u_1}{d\xi^3} + 5 \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + 4 \frac{du_1}{d\xi} \right] \\
 & + \left[-\frac{2}{3} \exp(-\xi) + \frac{1}{24} \exp(-8\xi) - \frac{5}{8} \right]^2 \\
 & + (u_1(\xi))^2] d\xi, \quad (28)
 \end{aligned}$$

其中 u_1 由(25)式表示.

继续用相同的方法, 可以依次得到扰动发展方程特征问题(22), (23)的更高次近似行波解 $U_n(x, t)$ ($n = 3, 4, \dots$).

5 微扰 sine-Gordon 方程

设强阻尼 sine-Gordon 扰动发展方程(1)中的扰动项是微扰的. 为简单起见, 现设 $f(x, t, u) = \varepsilon \exp(-u)$. 其中 ε 为正的小参数. 相应的强阻尼 sine-Gordon 微扰方程特征问题为

$$\begin{aligned}
 & u_{tt} - u_{xx} + au_t + bu_{tx} + cu_{txx} = \varepsilon \exp(-u), \\
 & 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$u|_{x-t=0} = \phi(x), \quad u_t|_{x-t=0} = 0. \quad (30)$$

由关系(18)–(20)式, 微扰方程特征问题(29), (30)的 $u_0(z)$, $u_1(z)$ 分别为

$$u_0 = C_1 \exp\left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}z\right) + C_2 \exp \exp\left[\frac{1}{2c}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})z\right] + C_3 \quad (31)$$

其中 C_i ($i = 1, 2, 3$) 由(8)–(10)式表示

$$u_1 = C_1 \exp\left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}z\right) + C_2 \exp \exp\left[\frac{1}{2c}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})z\right] + C_3 - \int_0^z \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left(\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1(\xi - z) - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2(\xi - z) \right) - \frac{4a}{c} \right] \times \left[\frac{\varepsilon}{c} \exp(-u_0(\xi)) \right] d\xi, \quad (32)$$

其中 C_i , $\bar{\lambda}_j$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) 由(8)–(10)和(16)式表示, u_0 由(31)式表示.

选定 $a = 4, b = 5, c = 1, f(u) = u^2, g_1(x) = g_3(x) = 0, g_2(x) = 1$. 并分别取 $\varepsilon = 1$ 和 $\varepsilon = 0.5$ 时, 可得到精确解 $u_{\text{exa}}(z)$ 和一次近似解 $u_1(z)$ 的曲线图形分别见图3, 图4所示. 从图3和图4还可以看出, 当小参数 ε 越小, 得到的近似解曲线就越靠近精确解. 即得到的近似解的精度就越高.

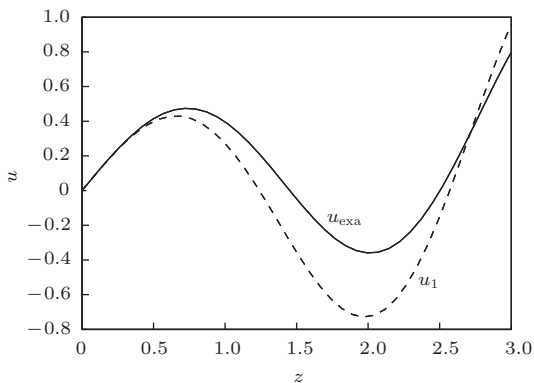


图3 精确解 $u_{\text{exa}}(z)$ 与一次近似解 $u_1(z)$ 的曲线比较 ($\varepsilon = 1$)

同样, 可得到微扰方程特征问题(29), (30)的 $u_2(z)$ 为

$$u_2 = C_1 \exp\left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}z\right)$$

$$+ C_2 \exp \exp\left(\frac{1}{2c}[-b + \sqrt{b^2 - 4ac}]z\right) + C_3 - \int_0^z \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left(\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1(\xi - z) - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2(\xi - z) \right) - \frac{4a}{c} \right] \times \left[\frac{d^3 u_1}{d\xi^3} - \frac{b}{c} \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - \frac{a}{c} \frac{d u_1}{d\xi} + \frac{\varepsilon}{c} (\exp(-u_0(\xi)) + \exp(-u_1(\xi))) \right] d\xi, \quad (33)$$

其中 C_i, λ_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) 分别由(8)–(10)和(16)表示, u_0, u_1 分别由(31)和(32)式表示.

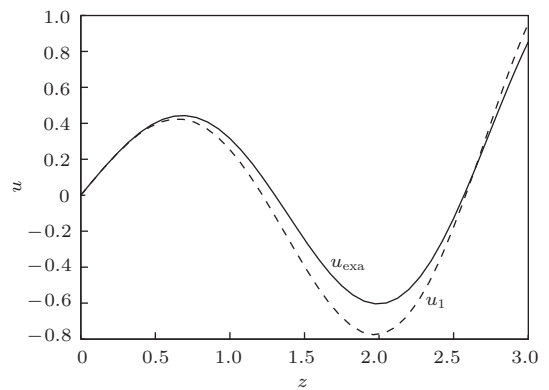


图4 精确解 $u_{\text{exa}}(z)$ 与一次近似解 $u_1(z)$ 的曲线比较 ($\varepsilon = 0.5$)

由行波变换(3)和关系(33)式, 我们便得到微扰 sine-Gordon 方程特征问题(29), (30)的二次近似行波解 $U_2(x, t)$ 为

$$U_2(x, t) = C_1 \exp\left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}(x - t)\right] + C_2 \exp \exp\left[\frac{1}{2c}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(x - t)\right] + C_3 - \int_0^{x-t} \left[\frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left[\frac{1}{\lambda_1} \exp \lambda_1(\xi - x + t) - \frac{1}{\lambda_2} \exp \lambda_2(\xi - x + t) \right] - \frac{4a}{c} \right] \times \left[\frac{d^3 u_1}{d\xi^3} - \frac{b}{c} \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - \frac{a}{c} \frac{d u_1}{d\xi} + \frac{\varepsilon}{c} (\exp(-u_0(\xi)) + \exp(-u_1(\xi))) \right] d\xi,$$

其中 C_i, λ_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) 分别由(8)–(10)式和(16)式表示, u_0, u_1 分别由(31)和(32)式表示.

因为强阻尼微扰方程特征问题(29), (30)为微扰问题, 因此我们还可用摄动方法来求得该问题的渐近解, 并且可以用摄动理论证明^[22,23], 微扰问题

(29), (30) 的精确解 $u_{\text{exa}}(x, t)$ 与用泛函变分迭代方法得到的 n 次近似行波解 $U_n(x, t)$ 具有如下的误差精度:

$$u_{\text{exa}}(x, t) = U_n(x, t) + O(\varepsilon^n),$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

6 近似解析解的意义

我们由变分迭代方法得到强阻尼广义 sine-Gordon 扰动发展方程特征问题的近似解 $u_{\text{napp}}(t)$ 是近似的解析关系式, 因此一般还可以通过解析运算, 譬如进行微分、积分等运算, 继续对强阻尼广义 sine-Gordon 扰动进一步研究, 得到其他相关的物理性态. 特别是一些微扰方程通常出现跳跃过渡的激波层现象的解.

例如, 我们可以通过近似行波解 $U_n(x, t)$ 计算出关于 x 或 t 的变化率的分布情况, 再如, 通过近似函数 $U_n(x, t)$ 可计算出对应的波峰值等. 不但如此, 我们还可采取措施, 人为地控制非线性 sine-Gordon 的扰动项, 使行波解达到满意的状态.

7 结 论

众所周知, 非线性方程一般是不能得到有限项组成的解析精确解. 人们只能用数值方法得到它的模拟解, 或者用近似解析解去逼近它. 然而由于用数值方法得到的模拟解不能再进行解析运算, 从而终止了对方程解的解析运算. 这样有时往往会忽略对一些非线性方程的某些特性的研究. 特别是一些微扰方程通常出现跳跃过渡的激波层现象的解, 有时就会被忽略. 广义泛函变分迭代方法是通过近似解析函数去逼近方程的精确解. 所以它还可利用解析的方法去继续探讨方程解的其他特殊物理性态.

本文采用的是经过修改的泛函变分迭代方法的优点还在于这种思路和方法简捷. 同时, 用此方法求得方程近似解的函数序列收敛速度的快慢, 也取决于采用合适的初始近似函数. 例如本文选的初始近似函数 u_0 的选取是用非扰动情形下的典型 sine-Gordon 方程的解 (7), 这是十分自然的. 它保证了相应非线性方程具有较快地得到要求的精度范围内的近似解.

参考文献

- [1] Parkes E J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **38** 154
- [2] Sirendaoreji J S 2003 *Phys. Lett. A* **309** 387
- [3] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603
- [4] Gu D F 1997 *Science* **275** 805
- [5] Wu J P 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 060207
- [6] Zuo J M, Zhang Y M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010205
- [7] Pang J, Jin L H, Zhao Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 140201 (in Chinese) [庞晶, 靳玲花, 赵强 2012 物理学报 **61** 140201]
- [8] Xin P, Liu X Q, Zhang L L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 020201
- [9] Li Ning, Liu Xi 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160203 (in Chinese) [李宁, 刘希 2013 物理学报 **62** 160203]
- [10] Xu Y H, Lin W T, Xu H, Yao J S, Mo J Q 2012 *J. Lanzhou Univ.* **48** 100 (in Chinese) [许永红, 林万涛, 徐惠, 姚静菀, 莫嘉琪 2012 兰州大学学报 **48** 100]
- [11] Shi L F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010201 (in Chinese) [石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 010201]
- [12] Mo Jiaqi 2009 *Science in China, Ser. G* **52** 1007
- [13] Mo J Q, Chen X F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100203
- [14] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* **19** 010203
- [15] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* **19** 030202
- [16] 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 387
- [17] Mo J Q, Lin W T 2011 *J. Sys. Sci. Complexity* **24** 271
- [18] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205
- [19] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010208
- [20] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法郑州: 河南科学技术出版社]
- [21] Lebedev L P, Cloud M J 2003 *The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics* (New York: World Scientific)
- [22] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)
- [23] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problem*, (Basel: Birkhauserm Verlag AG)
- [24] He J H 1999 *J. Non-Linear Mech* **34** 699
- [25] He J H 2000 *Appl. Math. Comput* **114** 115
- [26] He J H 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **19** 847
- [27] He J H, Wu X H 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **29** 108
- [28] He J H 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **34** 1430
- [29] He J H, Wu G C 2010 *Nonlinear Sci. Lett. A* **1** 1
- [30] He J H 2010 *J. Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* **11** 555
- [31] Wang Q, Fu F H 2012 *Int. J. Engineering and Manufacturing* **2** 36

The variational iteration method for characteristic problem of strong damping generalized sine-Gordon equation*

Xu Yong-Hong^{1)†} Shi Lan-Fang²⁾ Mo Jia-Qi^{3)‡}

1) (Department of Mathematics & Physics, Bengbu College, Bengbu 233030, China)

2) (College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

3) (Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

(Received 24 July 2014; revised manuscript received 14 August 2014)

Abstract

A class of nonlinear strong damping sine-Gordon disturbed evolution differential equation is studied which appears widely in mathematics and mechanics. Firstly, we introduce a traveling wave transformation, and obtain the exact solution of degenerate equation. Then a functional calculating method for variational iteration is constructed, thus an iterative expansion is found. Finally, the approximate traveling wave analytic solutions for the original strong damping generalized sine-Gordon disturbed evolution equation are found. The arbitrary order approximate solutions, and the simple variational iteration method are obtained with higher accuracy. The approximate analytic solution can make up for the imperfection of the simple numerical simulation solution.

Keywords: traveling wave, strong damping, sine-Gordon equation

PACS: 02.30.Hq

DOI: [10.7498/aps.64.010201](https://doi.org/10.7498/aps.64.010201)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202106), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 2232012D3-34), the Natural Science Foundation of the Education Department of Anhui Province, China (Grant No. KJ2014A151) and the Natural Sciences Foundation from the Universities of Jiangsu Province, China (Grant No. 13KJB170016).

† Corresponding author. E-mail: slxyh@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn