

星图上的散射量子行走搜索算法

刘艳梅 陈汉武 刘志昊 薛希玲 朱皖宁

Scattering quantum walk search algorithm on star graph

Liu Yan-Mei Chen Han-Wu Liu Zhi-Hao Xue Xi-Ling Zhu Wan-Ning

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 010301 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.010301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.010301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不同磁场环境下 Heisenberg XXZ 自旋链中的热量子失协

Thermal quantum discord in Heisenberg XXZ model under different magnetic field conditions

物理学报.2013, 62(11): 110303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110303>

星图上的散射量子行走搜索算法*

刘艳梅¹⁾ 陈汉武^{1)2)†} 刘志昊¹⁾ 薛希玲¹⁾ 朱皖宁¹⁾¹⁾(东南大学计算机科学与工程学院, 南京 210096)²⁾(东南大学计算机网路和信息集成教育部重点实验室, 南京 210096)

(2014年5月27日收到; 2014年8月22日收到修改稿)

量子行走是一种典型的量子计算模型, 近年来开始受到量子计算理论研究者们的广泛关注. 本文首先证明了在星图上硬币量子行走与散射量子行走的酉等价关系, 之后提出了一个在星图上的散射量子行走搜索算法. 该算法的时间复杂度与 Grover 算法相同, 但是当搜索的目标数目多于总数的 $1/3$ 时搜索成功概率大于 Grover 算法.

关键词: 硬币量子行走, 散射量子行走, Grover 算法**PACS:** 03.65.Aa, 03.67.Ac**DOI:** 10.7498/aps.64.010301

1 引言

利用随机行走求解问题是一种思维方法, 在计算机科学、生物学、物理学等多个学科有着广泛的应用. 随机行走的思想与方法作为随机算法的计算思维训练案例一直受到基础理论研究学者们的关注. 随着人类期望计算机能够解决问题领域的不断扩大, 仰或问题搜索空间的日益多维化和复杂化, 作为基础理论应用研究点, 渐渐地受到广泛关注. 在计算机科学中, 经典随机行走是解决许多计算问题的算法工具, 如 k -SAT 问题、S-T 连通性问题; 在物理学中, 随机行走理论可以模拟和解释很多物理学问题, 如布朗运动、粒子在介质中的扩散现象. 基于经典随机行走的多门学科中的成功应用, 人们将随机行走理论推广到量子系统中, 并建立了量子行走理论.

量子行走的概念最早在 1993 年由 Aharonov 等首次提出^[1], 它可以看作经典随机行走在量子系统上的一种自然推广. 之后分别出现了两种不同的量子行走计算模型: 离散量子行走和连续量子行走. 而离散量子行走模型又包括两种, 一种是需要

附加硬币空间的离散量子行走, 它是在图的顶点上的行走, 称为硬币量子行走 (coined quantum walk, CQW); 另外一种是在 2003 年 Hillery 等提出的散射量子行走^[2] (scattering quantum walk, SQW), 该模型不需要硬币空间并且是在图的边上的量子行走^[3-7]. 本文主要研究散射量子行走, 首先证明了在星图上两种离散量子行走的酉等价关系, 之后提出了一种星图上的散射量子行走搜索算法. 本算法采用文献^[8]中的算子, 该算子对基于量子行走搜索算法而言是一种新的算子, 并因此在搜索目标数多于总数的 $1/3$ 时取得大于 Grover 算法的成功概率.

2 两种离散量子行走的关系

2.1 硬币量子行走

与连续量子行走不同的是, 硬币量子行走的 Hilbert 空间除了与位置空间有关之外, 还需要附加一个满足 Hilbert 空间约束的硬币子空间. 这是硬币量子行走和经典随机行走的最大区别, 也是硬币量子行走和连续量子行走不能相互转化的根本

* 国家自然科学基金 (批准号: 61170321)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20110092110024) 和东南大学计算机网路和信息集成教育部重点实验室开放基金 (批准号: K93-9-2010-18) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hw_chen@seu.edu.cn

原因.

在正则图 $G(V, E)$ 上硬币量子行走对应的 Hilbert 空间可以表示为

$$H_C = H_v \otimes H_c,$$

其中 $H_v = \text{span}\{|v_i\rangle | v_i \in V\}$ 对应硬币量子行走的位置空间, 基态 $|v_i\rangle$ 表示行走者在顶点 v_i 的位置上; H_c 对应硬币空间. 对于非正则图 (irregular graph), 不可以将其 Hilbert 空间写成位置空间与硬币空间的张量形式 [9].

酉算子 U_c 由独立的两部分, 即硬币翻转算子和移位算子组成:

$$U_c = S \cdot (C \otimes I).$$

硬币量子行走的第一步是在硬币空间执行一个硬币翻转操作 C , 这相当于经典随机行走中的抛硬币动作, 通过这个操作可以得到硬币的叠加态; 第二步, 移位算子 S 根据硬币表示的方向移动到邻近的顶点. 基于硬币量子行走的算法可以定义为一个酉算子 U_c 在 Hilbert 空间中多次重复操作.

2.2 散射量子行走

散射量子行走的概念在 2003 年由 Hillery 等提出 [2], 它属于离散量子行走模型. 但与硬币量子行走不同的是散射量子行走的基态对应的是图的边, 并且不需要附加硬币空间.

在图 $G(V, E)$ 上的散射量子行走可以定义如下: 对应的 Hilbert 空间 H 为

$$H = l^2(\{|m, l\rangle : m, l \in V, ml \in E\}),$$

其中 ml 是从顶点 m 到顶点 l 的边的缩写. 对于散射量子行走而言, 张成其 Hilbert 空间的基态对应图 $G(V, E)$ 的边, 并且每条边对应两个不同的基态. 即如果顶点 p 和 q 之间有边存在, 则对应两个不同的基态 $|p, q\rangle$ 和 $|q, p\rangle$, 即 $|p, q\rangle \neq |q, p\rangle$. 图 $G(V, E)$ 的每个顶点 $k (k \in V)$ 存在两个不同的子空间

$$A_k = l^2(\{|k, m\rangle : m \in V, km \in E\})$$

和

$$\Omega_k = l^2(\{|m, k\rangle : m \in V, mk \in E\}),$$

其中 A_k 代表由顶点 k 出发的基态张成的子空间, Ω_k 代表以顶点 k 为终点的基态张成的子空间. 对于任意不同的两个顶点 k 和 l , A_k 与 A_l 不重叠, 且 Ω_k 与 Ω_l 不重叠, 即若 $k \neq l$, 则 $A_k \cap A_l = \phi$ 且

$\Omega_k \cap \Omega_l = \phi$. 由于图 $G(V, E)$ 是无向图, 因此 $|\Omega_k| = |A_k|$, 其中 $|\cdot|$ 表示空间的维数.

散射量子行走可以看作在顶点 k 的散射, 具体形式如图 1 所示.

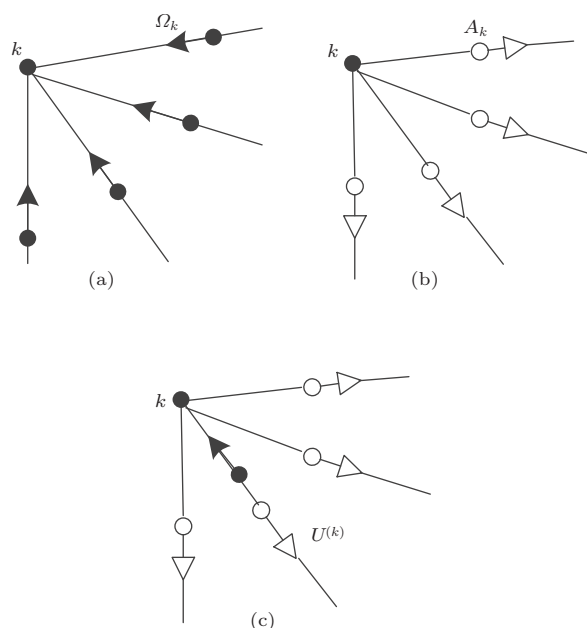


图 1 (a) 以顶点 k 为终点的基张成的子空间 Ω_k ; (b) 以顶点 k 为出发点的基张成的子空间 A_k ; (c) 酉变化 $U^{(k)}$: $\Omega_k \rightarrow A_k$ 可以看作在顶点 k 的散射

2.3 两种离散量子行走的关系

我们主要从两个方面来考察星图上两种离散量子行走的关系: 1) 两者对应的 Hilbert 空间的关系; 2) 两者对应的酉算子的关系. 星图 S_n 表示该图有一个中心点和 n 个叶节点, 在这里记中心点为 0, 叶节点标记为 $1, \dots, n$, 如图 2 所示.

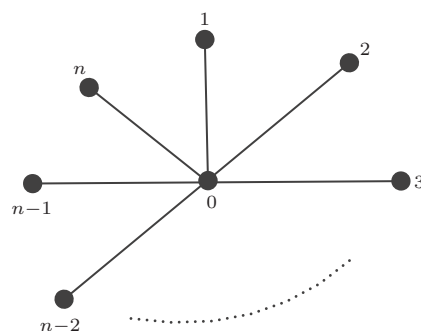


图 2 星图 S_n

引理 1 [10] 两个 Hilbert 空间同构的充要条件是它们有相同维数.

定理 1 在星图 S_n 上, 硬币量子行走的 Hilbert 空间 H_C 和散射量子行走的 Hilbert 空间

H_S 同构.

证明 首先讨论硬币量子行走对应的 Hilbert 空间 H_C : 将基态记为 $|v, \mathbf{s}\rangle_c$ (如图 3(a)), 其中下标 c 表示是硬币量子行走的基态, $v \in V$, $\mathbf{s} \in V$, $\mathbf{s}$ 为硬币方向, 基态 $|v, \mathbf{s}\rangle_c$ 表示行走者目前在顶点 v 上, 硬币方向为 $\mathbf{s}$, 并且硬币方向 $\mathbf{s}$ 与从顶点 v 到顶点 s 的边的方向一致. 星图上硬币量子行走对应的 Hilbert 空间 H_C 可以表示为由基态

$$\{|1, \mathbf{0}\rangle_c, K, |n, \mathbf{0}\rangle_c, |0, \mathbf{1}\rangle_c, K, |0, \mathbf{n}\rangle_c\}$$

张成的空间, 且维数为 $2n$.

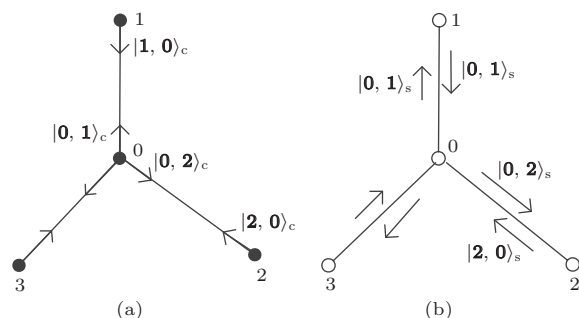


图 3 (a) 硬币量子行走对应的基态的表示; (b) 散射量子行走对应的基态的表示

散射量子行走的 Hilbert 空间 H_S : 散射量子行走的基态对应图中的边并且每条边对应两个不同的基态, 即如果 $i, j \in V$ 且 $ij \in E$, 则该边有两个不同基态 $|i, j\rangle_s$ 和 $|j, i\rangle_s$, 下标 s 表示该基态是散射量子行走的基态. 因此由其张成的 Hilbert 空间 H_S 的维数为边数的 2 倍, 即 $2n$.

由引理 1 可知, Hilbert 空间 H_C 和 H_S 是同构的.

定理 2 在星图 S_n 上, 硬币量子行走的西算子 U_c 与散射量子行走的西算子 U_s 西等价.

证明 对于硬币量子行走, 移位算子 S : $S|i, \mathbf{j}\rangle_c = |j, \mathbf{i}\rangle_c$, 硬币算子 C

$$C|i, \mathbf{j}\rangle_c = \begin{cases} |i, \mathbf{j}\rangle_c, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n c_k^{(j)} |i, \mathbf{k}\rangle_c, & i = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中系数 $c_k^{(j)}$ 需要保证硬币算子 C 是酉算子. $i = 0$ 表示行走者目前站在中心点, $i = 1, 2, \dots, n$ 则意味着行走者现在立于叶节点. 因此一步硬币量子行走为

$$U_c|i, \mathbf{j}\rangle_c = \begin{cases} |j, \mathbf{i}\rangle_c, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n c_k^{(i)} |k, \mathbf{i}\rangle_c, & i = 0. \end{cases} \quad (2)$$

对于散射量子行走,

$$U_s|i, \mathbf{j}\rangle_s = \begin{cases} |j, \mathbf{i}\rangle_s, & i = 0, \\ r^{(j)} |j, \mathbf{i}\rangle_s + \sum_{k \in \Gamma(j; i)} t_k^{(j)} |j, \mathbf{k}\rangle_s, & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $r^{(j)}$ 表示反射系数 (reflection coefficient), $t_k^{(j)}$ 对应透射系数 (transmission coefficient), $\Gamma(i)$ 表示与顶点 $i \in V$ 邻接的所有顶点的集合, $\Gamma(i; j)$ 表示与顶点 $i \in V$ 邻接的所有顶点中去除顶点 j 之后的集合.

因为两种离散量子行走所对应的 Hilbert 空间是同构的, 因此两个空间中的向量存在一一对应的关系, 定义酉操作: $E: H_S \rightarrow H_C$, 使得 $E|i, \mathbf{j}\rangle_s = |j, \mathbf{i}\rangle_c$. 因此,

$$U_c E|i, \mathbf{j}\rangle_s = U_c |j, \mathbf{i}\rangle_c = \begin{cases} |i, \mathbf{j}\rangle_c, & i = 0 \\ \sum_{k=1}^n c_k^{(j)} |k, \mathbf{j}\rangle_c, & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4)$$

$$EU_s|i, \mathbf{j}\rangle_s = \begin{cases} E|j, \mathbf{i}\rangle_s, & i = 0, \\ E(r^{(j)} |j, \mathbf{i}\rangle_s + \sum_{k \in \Gamma(j; i)} t_k^{(j)} |j, \mathbf{k}\rangle_s), & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} = \begin{cases} |i, \mathbf{j}\rangle_c, & i = 0, \\ r^{(j)} |i, \mathbf{j}\rangle_c + \sum_{k \in \Gamma(j; i)} t_k^{(j)} |k, \mathbf{j}\rangle_c, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

对任意的 k 如果 $k \in \Gamma(j; i)$ 时 $c_k^{(j)} = t_k^{(j)}$, 否则 $c_k^{(j)} = r^{(j)}$. 因此 $U_c E = E U_s$, 即 $U_c = E U_s E^+$, 于是酉算子 U_c 与 U_s 酉等价. 定理 2 证毕.

3 星图上的散射量子行走搜索算法

离散量子行走包括两种模型: 一种是硬币量子行走, 另外一种为散射量子行走. 到目前为止, 基于硬币量子行走的算法都是建立在正则图上^[11-13], 例如第一个基于硬币量子行走的 SKW 算法^[14] 是在超立方体上进行分析的. 上节证明了星图上两种离散量子行走的酉等价性, 该节将提出一个在星图上基于散射量子行走的搜索算法.

3.1 问题描述

本文提出的算法的数据结构是星图 S_N , 其中将中心点标记为0, 叶节点标记为1, 2, $\dots$, N , 如图2所示. 假设星图 S_N 存在 M ($M \geq 1$) 个特殊点 (special node), 不失一般性可以将特殊点标记为1, 2, $\dots$, M , 将普通点 (normal node) 标记为 $M+1$, $M+2$, $\dots$, N . 文中提出的算法是要搜索到特殊点, 而由于散射量子行走是在边上的行走, 因此研究方向转换为搜索与特殊点关联的特殊边, 找到特殊边也就意味着搜索到了特殊点.

3.2 算法思想以及描述

定义1^[15] (不变子空间) 如果 T 是线性空间 V 的线性变换, V_1 是 V 的子空间, 并且对于任意一个 $x \in V_1$, 都有 $Tx \in V_1$, 则称 V_1 是 T 的不变子空间.

为了可以在较小的空间内讨论散射量子行走, 定义如下4个基态:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M |0, i\rangle_s, \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M |i, 0\rangle_s, \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{i=M+1}^N |i, 0\rangle_s, \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{i=M+1}^N |0, i\rangle_s. \end{aligned} \quad (6)$$

在星图上, 一步散射量子行走定义为

$$\begin{aligned} U|j, 0\rangle_s &= -r|j, 0\rangle_s + t \sum_{k=1, k \neq j}^N |0, k\rangle_s, \\ U|0, j\rangle_s &= \begin{cases} |j, 0\rangle_s, & j = M+1, \dots, N, \\ e^{i\varphi}|j, 0\rangle_s, & j = 1, 2, \dots, M, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 r 为反射系数, t 为透射系数, φ 为相位旋转. 在(7)式中, 透射边的振幅相等, 这种选择保持了一定的对称性, 具有在所有方向上置换不变的特点. 为了使得算子 U 满足酉性, 反射系数 r 和透射系数 t 需要满足下面两个等式:

$$|r|^2 + (N-1)|t|^2 = 1, \quad (8)$$

$$(N-2)|t|^2 + r^*t + rt^* = 0. \quad (9)$$

本文所提算法的关键是系数 r , t 以及 φ 的选择, 而这三个系数的选择与对 Grover 算法的改进

算法息息相关. 1997年, Grover 首次提出对无序数据库的量子搜索算法^[16], 该算法的时间复杂度为 $O(\sqrt{N})$, 实现了对经典算法的二次加速作用. 但是 Grover 算法仅在若干离散点处的成功概率为1, 并且当标记态数与状态总数的比值 M/N 在区间 $[0.25, 0.5]$ 时, Grover 算法的成功概率迅速下降, 直至 $M/N = 1/2$ 时, Grover 算法失效(图4).

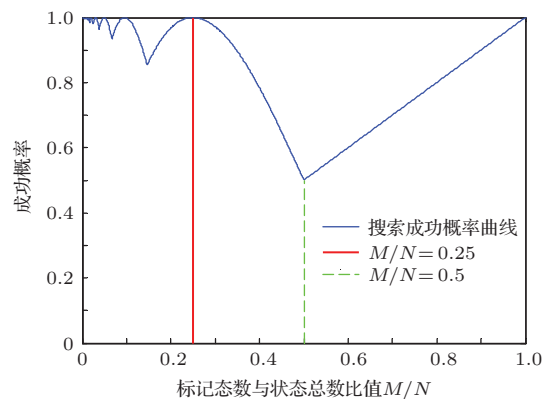


图4 Grover 算法成功搜索概率曲线

针对 Grover 算法的这些缺点, 目前国内外已有一些改进算法, 其中2007年, 李盼池等提出了基于 $\pi/2$ 相位旋转的改进 Grover 算法^[8], 这也是本文所提算法中系数 r , t 以及 φ 的来源之处. 令 $\lambda = M/N$, 以 $\lambda = 1/3$ 为分界点, 本文所提算法分为如下两个搜索过程:

1) 当 $0 < \lambda \leq 1/3$ 时, 令 $t = 2/N$, $r = 1 - t = 1 - 2/N$, $\varphi = \pi$, 此时需要 $O(\sqrt{N})$ 迭代才可以以较大的成功概率搜索到特殊边, 并且此时算法成功概率与 Grover 算法相等;

2) 当 $1/3 < \lambda \leq 1$ 时, 令 $t = (1+i)/N$, $r = i(1-1/N) - 1/N$, $\varphi = \pi/2$, 此时仅需要一次迭代就可以以至少 25/27 的成功概率搜索到特殊边.

可以证明上述两种 r , t 以及 φ 的选择都满足(8)和(9)式, 这使得算子满足酉性.

3.3 时间复杂度分析

首先讨论 $0 < \lambda \leq 1/3$ 的情况, 当 $0 < \lambda \leq 1/3$ 时, 将 r , t 以及 φ 代入(7)式得到如下等式:

$$\begin{aligned} U|\psi_1\rangle &= -|\psi_2\rangle, \\ U|\psi_2\rangle &= (tM-1)|\psi_1\rangle \\ &\quad + t\sqrt{M(N-M)}|\psi_4\rangle, \\ U|\psi_3\rangle &= t\sqrt{M(N-M)}|\psi_1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [t(N-M)-1]|\psi_4\rangle, \\
 U|\psi_4\rangle & = |\psi_3\rangle.
 \end{aligned} \quad (10)$$

由于星图是特殊的二部图, 则

$$\begin{aligned}
 U^2|\psi_1\rangle & = -[(tM-1)|\psi_1\rangle \\
 & + t\sqrt{M(N-M)}|\psi_4\rangle], \\
 U^2|\psi_4\rangle & = t\sqrt{M(N-M)}|\psi_1\rangle \\
 & + (1-tM)|\psi_4\rangle.
 \end{aligned} \quad (11)$$

定理3 设由向量 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_4\rangle$ 张成的子空间记为 H_1 , 且令算子

$$S = \begin{pmatrix} 1-tM & t\sqrt{M(N-M)} \\ -t\sqrt{M(N-M)} & 1-tM \end{pmatrix},$$

则 S 算子是酉算子, 并且子空间 H_1 在酉算子 S 的作用下是不变子空间.

证明 首先证明算子 S 是酉算子.

$$\begin{aligned}
 SS^+ & = \begin{pmatrix} 1-tM & t\sqrt{M(N-M)} \\ -t\sqrt{M(N-M)} & 1-tM \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} 1-tM & -t\sqrt{M(N-M)} \\ t\sqrt{M(N-M)} & 1-tM \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{X}_{22} \end{pmatrix} = I, \\
 \mathcal{X}_{11} & = (1-tM)^2 + t^2M(N-M), \\
 \mathcal{X}_{22} & = (1-tM)^2 + t^2M(N-M).
 \end{aligned} \quad (12)$$

由(11)式可知, 子空间 H_1 在酉算子 S 的作用下是不变子空间. 因此下面只需要在子空间 H_1 内进行研究, 将之前的 $2n$ 维的 Hilbert 空间塌缩到2维 Hilbert 空间, 方便分析.

假设初始态为 $|\varphi_{init}\rangle$, 则经过 n 次迭代之后的状态为 $|\phi_n\rangle = S^n|\varphi_{init}\rangle$, 问题就是求经过多少次迭代之后, 可以以较大的概率找到特殊边. 求得酉算子 S 特征值为 $\lambda_+ = e^{i\theta}$, $\lambda_- = e^{-i\theta}$, 其中

$$\begin{aligned}
 \cos \theta & = (1-tM), \\
 \sin \theta & = \sqrt{2tM-t^2M^2} = t\sqrt{M(N-M)}.
 \end{aligned}$$

特征值 $\lambda_+ = e^{i\theta}$ 对应的特征向量为

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

特征值 $\lambda_- = e^{-i\theta}$ 对应的特征向量为

$$|\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

则初始态可表示为

$$\begin{aligned}
 |\phi_{init}\rangle & = \frac{1}{\sqrt{N}}(\sqrt{M}|\psi_1\rangle + \sqrt{N-M}|\psi_4\rangle) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2N}}[(\sqrt{M}-i\sqrt{N-M})|\phi_+\rangle \\
 & + (\sqrt{M}+i\sqrt{N-M})|\phi_-\rangle].
 \end{aligned} \quad (13)$$

由谱分解得

$$\begin{aligned}
 |\phi_n\rangle & = (\lambda_+^n|\phi_+\rangle\langle\phi_+| + \lambda_-^n|\phi_-\rangle\langle\phi_-|)|\phi_{init}\rangle \\
 & = \lambda_+^n\langle\phi_+|\phi_{init}\rangle|\phi_+\rangle \\
 & + \lambda_-^n\langle\phi_-|\phi_{init}\rangle|\phi_-\rangle,
 \end{aligned} \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \langle\phi_+|\phi_{init}\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2N}}(\sqrt{M}-i\sqrt{N-M}), \\
 \langle\phi_-|\phi_{init}\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2N}}(\sqrt{M}+i\sqrt{N-M}),
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 |\phi_n\rangle & = S^n|\phi_{init}\rangle \\
 & = e^{in\theta} \frac{1}{\sqrt{2N}}(\sqrt{M}-i\sqrt{N-M}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\
 & + e^{-in\theta} \frac{1}{\sqrt{2N}}(\sqrt{M}+i\sqrt{N-M}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_2 \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{Y}_1 & = e^{in\theta}(\sqrt{M}-i\sqrt{N-M}) \\
 & + e^{-in\theta}(\sqrt{M}+i\sqrt{N-M}), \\
 \mathcal{Y}_2 & = e^{in\theta}(i\sqrt{M}+\sqrt{N-M}) \\
 & + e^{-in\theta}(-i\sqrt{M}+\sqrt{N-M}).
 \end{aligned} \quad (15)$$

令 $\sin \alpha = \sqrt{\frac{M}{N}}$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{N-M}{N}}$, 则

$$|\phi_n\rangle = \begin{pmatrix} \sin(n\theta + \alpha) \\ \cos(n\theta + \alpha) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

由于

$$\begin{aligned}
 \cos \theta & = (1-tM), \\
 \sin \theta & = t\sqrt{M(N-M)},
 \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{M}{N}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{N-M}{N}},$$

利用三角函数公式可以证明 $\alpha = \frac{\theta}{2}$, 则 (16) 式等价于

$$|\phi_n\rangle = \begin{pmatrix} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \\ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \end{pmatrix}, \quad (17)$$

并且初始态可以表示为

$$|\phi_{\text{init}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(\sqrt{M}|\psi_1\rangle + \sqrt{N-M}|\psi_4\rangle)$$

$$= \sin\frac{\theta}{2}|\psi_1\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\psi_4\rangle. \quad (18)$$

对比 (17) 与 (18) 式可知, 算子 S 是二维子空间 H_1 中的一个旋转, 迭代一次 S 相当于在子空间 H_1 中向 $|\psi_1\rangle$ 旋转 θ 角度. 算法需要旋转 $\arccos\sqrt{M/N}$ 角度进入 $|\psi_1\rangle$ 状态, 则需要迭代的次数为

$$R = CI\left(\frac{\arccos\sqrt{M/N}}{\theta}\right),$$

$CI(x)$ 表示最接近实数 x 的整数, 一般情况下向下取整.

当 $M \ll N$ 时, $\theta \approx \sin\theta = t\sqrt{M(N-M)} \approx 2\sqrt{M/N}$, $R \leq \frac{\pi}{2\theta}$, 则有 $R \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}}$, 因此找到特殊边的时间复杂度为 $O(\sqrt{N})$, 成功概率为 $P_{\text{succ}} = \sin^2(n+1/2)\theta$, 当 $(n+1/2)\theta = \pi/2$ 时, 经过测量之后以 1 的概率落在特殊边上. 成功概率如图 5 实线所示.

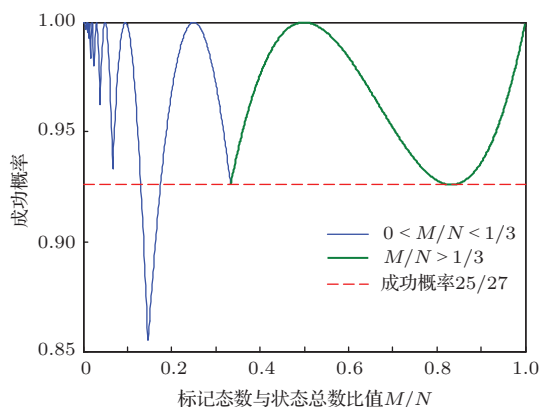


图 5 成功概率曲线, 实线表示 $0 < \lambda \leq 1/3$ 情况, 虚线表示 $1/3 < \lambda \leq 1$ 的情况

至此第一种情况 $0 < \lambda \leq 1/3$ 讨论结束, 下面开始讨论 $1/3 < \lambda \leq 1$ 的情况. 与上述方法一致, 将

$1/3 < \lambda \leq 1$ 情况下 r , t 以及 φ 代入 (7) 式得到如下等式:

$$U|\psi_1\rangle = i|\psi_2\rangle,$$

$$U|\psi_2\rangle = (tM - i)|\psi_1\rangle + t\sqrt{M(N-M)}|\psi_4\rangle,$$

$$U|\psi_3\rangle = t\sqrt{M(N-M)}|\psi_1\rangle + [t(N-M) - i]|\psi_4\rangle,$$

$$U|\psi_4\rangle = |\psi_3\rangle. \quad (19)$$

将星图看作二部图则得

$$U^2|\psi_1\rangle = (1 + itM)|\psi_1\rangle + it\sqrt{M(N-M)}|\psi_4\rangle,$$

$$U^2|\psi_4\rangle = t\sqrt{M(N-M)}|\psi_1\rangle + (1 - tM)|\psi_4\rangle. \quad (20)$$

令算子

$$V = \begin{pmatrix} 1 + itM & t\sqrt{M(N-M)} \\ it\sqrt{M(N-M)} & t(N-M) - i \end{pmatrix},$$

该算子对 (13) 式作用一次之后的状态为

$$|\psi_{\text{one}}\rangle = V|\psi_{\text{init}}\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + itM & t\sqrt{M(N-M)} \\ it\sqrt{M(N-M)} & t(N-M) - i \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}(1 + itM) + t\sqrt{(1-\lambda)M(N-M)} \\ it\sqrt{rM(N-M)} + (1 - tM)\sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

此时经过测量得到的成功概率为

$$P_1$$

$$= [\sqrt{\lambda}(1 + itM) + t\sqrt{(1-\lambda)M(N-M)}]$$

$$\times [\sqrt{\lambda}(1 - it^*M) + t^*\sqrt{(1-\lambda)M(N-M)}]$$

$$= 4\lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda. \quad (22)$$

定理 4 当 $1/3 < \lambda \leq 1$, 取 $t = (1+i)/N$, $r = i(1-1/N) - 1/N$, $\varphi = \pi/2$, 只需一次搜索, 所提算法获得正确结果的概率至少为 $P_1 \geq 25/27 \approx 92.9\%$.

证明 一次搜索之后的成功概率如图 5 虚线所示. 令 $f(\lambda) = 4\lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda$, 其中 $\lambda \in [1/3, 1]$, 则函数 $f(\lambda)$ 在区间 $[1/3, 1]$ 的最小值即为所提算法在 $1/3 < \lambda \leq 1$ 时的最小成功概率. 对函数 $f(\lambda)$

一次求导得 $f'(\lambda) = 12\lambda^2 - 16\lambda + 5$, 二次求导得 $f''(\lambda) = 24\lambda - 16 = 8(3\lambda - 2)$, 则 $f''(\lambda)$ 在区间 $[1/3, 2/3]$ 小于零, 在区间 $[2/3, 1]$ 大于零, 也就是函数 $f'(\lambda)$ 在区间 $[1/3, 2/3]$ 为单调增函数, 在区间 $[2/3, 1]$ 为单调减函数. 令 $f'(\lambda) = 0$ 求得 λ_2 , $\lambda_2 = 5/6$, 而 $f'(\frac{1}{3}) = 1$, $f'(\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$, $f'(1) = 1$, 因此函数 $f(\lambda)$ 在区间 $[1/3, 1/2]$ 和 $[5/6, 1]$ 为单调增函数, 在区间 $[1/2, 5/6]$ 为单调减函数, 从而函数 $f(\lambda)$ 的最小值仅可能在点 $1/3$ 和 $5/6$ 取得. 因为 $f(\frac{1}{3}) = \frac{25}{27}$, $f(\frac{5}{6}) = \frac{25}{27}$, 因此函数的最小值为 $25/27$, 即本文所提算法获得正确结果的概率至少为 $25/27 \approx 92.9\%$.

当 $0 < \lambda \leq 1/3$ 时, 需要迭代 $O(\sqrt{N})$ 次才可以以较高的概率找到特殊边, 与 Grover 算法对比可以发现, 在 $0 < \lambda \leq 1/3$ 时两者成功概率相等; 当 $1/3 < \lambda \leq 1$ 时, 仅需要一次迭代就可以以最小成功概率为 $25/27$ 找到特殊边.

3.4 与 Grover 算法的比较

本算法与 Grover 算法在时间复杂度上相同, 都是 $O(\sqrt{N})$, 但本算法相对于 Grover 算法而言, 有以下优势:

1) 从图 4 可以看出, 当 λ 较大时, Grover 算法的成功概率迅速下降. Grover 算法的成功概率仅在少数点处的概率为 1, 且 Grover 算法的最小成功概率为 50%. 从 3.3 节中的讨论可知, 本文提出的算法在 $0 < \lambda \leq 1/3$ 时, 系数 r , t 以及 φ 的选择使得该算法与 Grover 算法一致, 因此该算法的搜索成功概率在 $0 < \lambda \leq 1/3$ 时与 Grover 算法相等; 但是当 $1/3 < \lambda \leq 1$ 时, 该算法的搜索成功概率大于 Grover 算法, 并且最小成功概率为 $25/27$, 如图 6 所示.

2) 当 $\lambda > 1/2$ 时, 每次旋转的角度 $\theta = \arcsin(2\sqrt{M(N-M)}/N)$ 会减小 (如图 7 所示), 从而需要迭代的次数会随 M 的增加而增加. 而在本算法中当 $\lambda > 1/2$ 时, 仅需要迭代一次就能以最低 $25/27$ 的成功概率搜索到目标态.

3) 当 $\lambda = 0.5$ 时, Grover 算法无论经过多少次迭代, 最终测量目标态的成功概率均为 $1/2$, 与不经过迭代直接测量获得目标态的概率相同, 此时 Grover 算法失效. 在本算法中, 当 $\lambda = 0.5$ 时仅需要一次迭代就能以 1 的成功概率搜索到目标态, 不

存在算法失效问题.

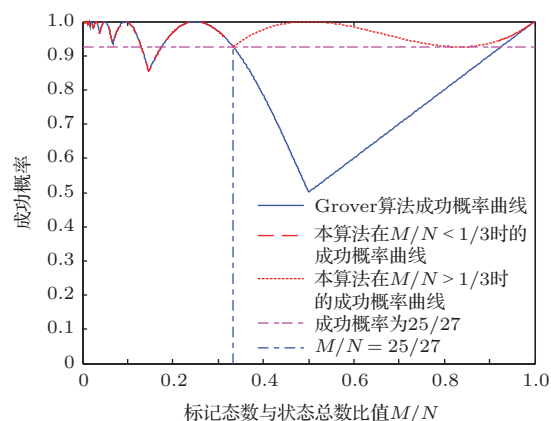


图 6 成功概率对比曲线

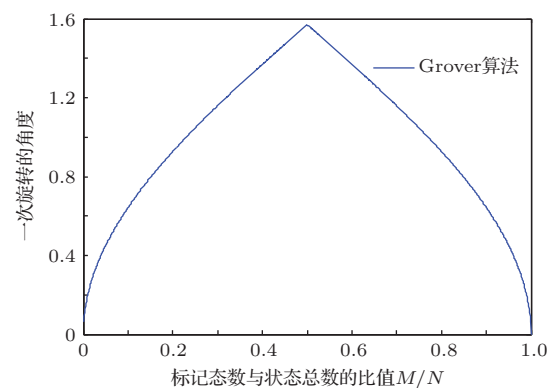


图 7 Grover 算法每次迭代旋转的角度与 λ 的关系

4 结 论

本文在证明了星图上两种离散量子行走 (硬币量子行走和散射量子行走) 的酉等价关系的基础上, 提出了一个在星图上的散射量子行走搜索算法, 该算法的时间复杂度为 $O(\sqrt{N})$, 与 Grover 算法的时间复杂度一致, 但是当要搜索的目标数目多于总数的 $1/3$ 时, 本算法的成功概率大于 Grover 算法.

参考文献

- [1] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1687
- [2] Hillery M, Bergou J, Feldman E 2003 *Phys. Rev. A* **68** 032314
- [3] Feldman E, Hillery M 2004 *Physics Letters A* **324** 277
- [4] Feldman E, Hillery M 2007 *Physics A: Mathematical and Theoretical* **40** 11343
- [5] Feldman E, Hillery M, H W Lee 2010 *Phys. Rev. A* **82** 040301

- [6] Feldman E, Hillery M 2005 *Contemporary Mathematics* **381** 71
- [7] Reitzner D, Hillery M, Feldman E 2009 *Phys. Rev. A* **79** 012323
- [8] Li P C, Li S Y 2007 *CAAL Transactions on Intelligent Systems* **1** 35 (in Chinese) [李盼池, 李士勇 2007 智能系统学报 **1** 35]
- [9] Krovi H, Brun T A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062332
- [10] Jian R Y, An H. B 2007 *Operator Theory Guide of analytic function space* (First Edition) (Beijing: Science Press) p7 (in chinese) [蹇人宜, 安恒斌著 2007 解析函数空间上的算子理论导引 (第一版) (北京: 科学出版社) 第 7 页]
- [11] Daniel Reitzner, Daniel Nagaj, Vladimir Buzek 2011 *Acta Physica Slovaca* **61** 603
- [12] Ambainis A 2004 *SIAM Journal on Computing* **37** 210
- [13] Childs A M, Eisenberg J M 2003 arXiv:0311038[quant-ph]
- [14] Shenvi N, Kempe J, Whaley K B 2003 *Phys. Rev. A* **67** 052307
- [15] Chen Y P, Zhang K Y, Xu Z 2006 *Matrix Theory* (Third edition) (Xi'an: Northwestern University Press) p60 (in chinese) [陈云鹏, 张凯院, 徐仲 2006 矩阵论 (第三版) (西安: 西北工业大学出版社) 第 60 页]
- [16] Grover L K 1997 *Physical Review Letters* **79** 325

Scattering quantum walk search algorithm on star graph^{*}

Liu Yan-Mei¹⁾ Chen Han-Wu^{1)2)†} Liu Zhi-Hao¹⁾ Xue Xi-Ling¹⁾ Zhu Wan-Ning¹⁾

1) (School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

2) (Key Laboratory of Computer Network and Information Integration(Southeast University), Ministry of Education, Nanjing 210096, China)

(Received 27 May 2014; revised manuscript received 22 August 2014)

Abstract

Quantum walk is a typical quantum computing model which is receiving significant attention in recent years from theory researchers. In this paper, we prove that the two major formulations for discrete quantum walks, coined and scattering, are unitarily equivalent on star graph. We then propose a new quantum search algorithm on star graph based on the scattering quantum walk. It is shown that the temporal complexity of the algorithm is the same as that in Grover algorithm, but success probability is greater than that in Grover algorithm when the objects are more than one third of total items.

Keywords: coined quantum walk, scattering quantum walk, grover algorithm

PACS: 03.65.Aa, 03.67.Ac

DOI: 10.7498/aps.64.010301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61170321), the China Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20110092110024), and the Key Laboratory of Computer Network and Information Integration of Ministry of Education of China (Grant No.K93-9-2010-18).

† Corresponding author. E-mail: hw_chen@seu.edu.cn