

含表面活性剂液滴在倾斜粗糙壁面上的铺展稳定性

李春曦 陈朋强 叶学民

Stability of surfactant-laden droplet spreading over an inclined heterogeneous substrate

Li Chun-Xi Chen Peng-Qiang Ye Xue-Min

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 014702 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.014702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.014702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I1>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

连续凹槽基底对含非溶性表面活性剂薄液膜流动特性的影响

[Effect of periodic grooving topography on dynamics of Insoluble surfactant-laden thin film flow](#)

物理学报.2014, 63(22): 224703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.224703>

粗糙纳通道内流体流动与传热的分子动力学模拟研究

[Molecular dynamics simulation on fluid flow and heat transfer in rough nanochannels](#)

物理学报.2014, 63(21): 214706 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.214706>

耗散粒子动力学 GPU 并行计算研究

[Accelerating dissipative particle dynamics with graphic processing unit](#)

物理学报.2014, 63(10): 104702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.104702>

含表面活性剂液膜去润湿演化的稳定性特征

[Stability characteristics of thin film dewetting with insoluble surfactant](#)

物理学报.2013, 62(23): 234702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.234702>

倾斜粗糙壁面上含不溶性表面活性剂溶液的动力学特性

[Dynamics of insoluble surfactant-laden thin films flow over inclined random topography](#)

物理学报.2013, 62(21): 214704 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.214704>

## 含活性剂液滴在倾斜粗糙壁面上的铺展稳定性\*

李春曦 陈朋强 叶学民†

(华北电力大学电站设备状态监测与控制教育部重点实验室, 保定 071003)

(2014年7月1日收到; 2014年8月12日收到修改稿)

针对含非溶性活性剂液滴在倾斜粗糙壁面上的铺展过程, 应用润滑理论推导出基态和扰动态下液膜厚度和活性剂浓度的演化方程组, 基于非模态理论研究了液滴铺展的稳定性特征, 探讨了相关参数的影响及其内在机理. 研究表明: 液膜厚度和活性剂浓度扰动量均呈现双驼峰型变化, 且峰值位于液滴底部凹陷处; 随扰动波数  $k$  增加, 最易失稳区域由液滴底部右侧凹陷处移至左侧凹陷, 壁面结构的影响逐渐减弱, 液滴铺展历程趋于稳定; 增加壁面倾角  $\theta$  将导致液滴铺展不稳定性加剧, 增大壁面高度  $D$  和壁面波数  $k_0$  均导致液滴铺展稳定性先增强后减弱; 随毛细数  $C$  减小, 液滴铺展稳定性下降, 重力的影响逐渐突显, 扰动量最大值呈现先增大后减小的变化趋势.

**关键词:** 活性剂液滴, 非平整基底, 铺展, 非模态稳定性**PACS:** 47.61.-k, 47.85.mf, 47.61.fg, 47.55.dk**DOI:** 10.7498/aps.64.014702

## 1 引言

含表面活性剂的溶液在固体表面或预置液膜表面上将呈现铺展或憎水现象, 由活性剂浓度驱动的 Marangoni 效应将使液膜铺展前沿形成极其复杂的指进现象<sup>[1]</sup>, 即液膜前沿衍生出类手指的接触线特征. 含活性剂液膜所呈现的这一复杂性特征使其流动稳定性研究在国内外引起了广泛关注. Matar 采用模态化<sup>[2]</sup>和非模态化理论<sup>[3,4]</sup>研究了含不溶性和可溶性活性剂液滴/液膜在平整基底上的铺展稳定性, 表明液滴底部与预置液膜接触线处最不稳定; Mavromoustaki 等<sup>[5]</sup>模拟了含可溶性活性剂溶液的爬坡行为, 基于模态理论的稳定性分析表明, 铺展前沿区域的薄液膜区域最容易失稳. 叶学民等<sup>[6]</sup>采用模态化方法研究了含可溶性活性剂的超薄液膜流动的线性稳定性, 分析了分离压影响. Hu 等<sup>[7]</sup>建立了含非溶性活性剂薄液膜流动稳定性特征的理论模型, 重点考察了滑移边界的影响.

近年来, 微机电系统技术的发展使得微米尺

度甚至纳米尺度的超薄液膜流动成为研究热点问题. 尺度的缩小使表面粗糙度<sup>[8,9]</sup>和基底表面微结构<sup>[10]</sup>等基底表面性质对流动的影响逐渐凸显. 实际过程中, 一方面通过控制基底表面粗糙度来达到提高产品质量的目的, 另一方面则利用基底不平整性来增强表面液膜的流动和传热特性, 这些特点在诸如薄膜涂布、热交换器、微流体等许多领域有着重要的应用<sup>[11,12]</sup>. 目前, 对于非平整基底上液膜流动/液滴铺展的研究已广泛开展. Kalliadasis 等<sup>[13]</sup>研究了液膜流经倾斜台阶、凹槽及突起时的表面形貌, 表明液膜在进入凹槽或离开突起前形成隆起现象; Nonomura 等<sup>[14]</sup>实验研究了粗糙壁面上液滴的铺展过程, 结果表明与平整壁面相比, 粗糙壁面上液滴接触角的减小使得铺展速度加快; 刘梅等<sup>[15]</sup>应用摄动法推导出不均匀加热波纹状基底上流动液膜表面波的演化方程, 对其线性稳定性进行了研究; Tseluiko 等<sup>[16]</sup>模拟了带电液膜流过台阶表面的稳态特征, 发现电场使得台阶处液膜表面毛细力增大, 造成额外变形.

上述研究多采用模态化理论分析平整基底上

\* 国家自然科学基金(批准号: 10972077, 11202079)和中央高校基本科研业务费(批准号: 13MS97)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yexuemin@163.com

含活性剂液滴的铺展稳定性. 然而, 液滴铺展过程中基态量的演化过程对时间和空间具有很强的依赖性, 且其扰动控制方程的线性算子均是高度非正则的, 因此采用传统的模态方法并不准确 [17,18]. 此外, 实际应用中, 倾斜随机粗糙壁面特征更具普遍意义. 而目前采用非模态化理论分析非平整基底上含活性剂液滴铺展过程的稳定性特征仅见于文献 [19], 但其并未考虑重力影响下稳定性的独有特征, 且对影响因素的内在机理研究尚不完善. 因此, 采用非模态理论全面探讨倾斜粗糙壁面上含非溶性活性剂液滴的铺展稳定性有待进一步深入研究.

作者所在课题组已建立了倾斜粗糙壁面上含非溶性活性剂液滴的演化方程, 研究了液滴厚度和活性剂浓度的演化历程及各参数的影响 [20]. 本文在此基础上, 采用非模态稳定性理论, 针对重力、Marangoni 力和与壁面性质相关的毛细力共同作用下液滴铺展过程, 进一步探究其稳定性特征及不同因素影响的内在机理.

## 2 数理模型和演化方程组

### 2.1 液滴铺展数理模型

图 1 为活性剂液滴在倾角为  $\theta$  的随机粗糙壁面上的铺展示意图. 随机粗糙壁面函数为  $s^*(x^*)$ , 初始时刻在壁面上预置一层厚度为  $H_0^* - s^*(x^*)$  的液膜 (即固体表面完全润湿), 此时液滴在重力与活性剂浓度的共同作用下, 在同一溶液的预置液膜表面进行铺展. 假设壁面为无滑移无渗透界面, 液膜自由表面外为无黏性气体; 铺展过程为黏性不可压缩牛顿流体的等温流动, 动力黏度  $\mu^*$  和密度  $\rho^*$  为常数; 液滴初始最大厚度  $H^*$  与流动方向尺度  $L^*$  相比非常小, 即  $\epsilon = H^*/L^* \ll 1$ . 因此, 该铺展过程满足润滑理论 (又称润滑近似) [21].

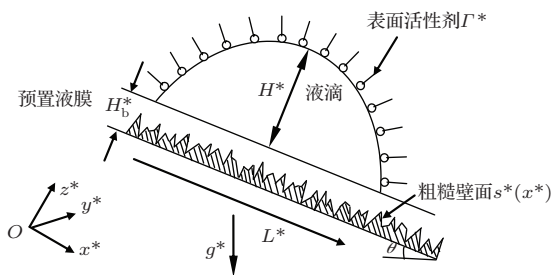


图 1 倾斜随机粗糙壁面上含活性剂液滴的铺展示意图

### 2.2 基态和扰动态演化方程组

含非溶性活性剂液滴铺展过程的控制方程包括连续性方程、运动方程和浓度扩散方程 [22]. 为考虑液滴沿倾斜壁面铺展的情形,  $x$  方向和  $z$  方向上的运动方程还包含重力分量的影响. 采用润滑理论, 对控制方程进行无量纲化和数量级简化 [20,21], 通过推导可得液膜厚度  $h$  和表面活性剂浓度  $\Gamma$  的演化方程组为 (详细推导过程见文献 [20])

$$h_t = -\nabla \cdot \left[ C \frac{h^3}{3} \nabla \nabla^2 (h + s) + \frac{h^3}{3} G \sin \theta - M \frac{h^2}{2} \nabla \Gamma \right], \quad (1)$$

$$\Gamma_t = \frac{\nabla^2 \Gamma}{Pe} - \nabla \cdot \left[ \frac{C}{2} h^2 \Gamma \nabla \nabla^2 (h + s) + \frac{h^2}{2} \Gamma G \sin \theta - M h \Gamma \nabla \Gamma \right], \quad (2)$$

式中, 气液界面处的  $Pe$  数表示活性剂分子的对流输运与扩散输运的比值; 邦德数  $G$  表示液体重力与铺展系数 (即最大表面张力与最小表面张力之差) 的比值; 毛细数  $C$  为表面张力与铺展系数之比, 表示活性剂浓度对表面张力的影响; Marangoni 数  $M$  为表面张力与黏性力之比, 表示由活性剂浓度梯度驱动的 Marangoni 效应的强弱程度; 下角标  $t$  表示对  $t$  的导数.

为深入分析活性剂液滴的铺展稳定性, 对液膜厚度  $h$  和表面活性剂浓度  $\Gamma$  施加横向微扰动

$$(h, \Gamma)(x, y, t) = (h_0, \Gamma_0)(x, t) + (h_1, \Gamma_1)(x, t) \exp(iky), \quad (3)$$

式中, 下角标“0”和“1”分别代表基态和扰动态,  $k$  为波数.

将 (3) 式分别代入 (1) 式和 (2) 式, 可得基态和扰动态下液膜厚度和表面活性剂浓度的演化方程组

$$h_{0t} = \left[ -\frac{C}{3} h_0^3 (h_{0xxxx} + s_{xxxx}) - \frac{h_0^3}{3} G \sin \theta + M \frac{1}{2} h_0^2 \Gamma_{0x} \right]_x, \quad (4)$$

$$\Gamma_{0t} = \frac{\Gamma_{0xx}}{Pe} - \left[ \frac{C}{2} h_0^2 \Gamma_0 (h_{0xxxx} + s_{xxxx}) - \frac{h_0^2}{2} \Gamma G \sin \theta - M h_0 \Gamma_0 \Gamma_{0x} \right]_x, \quad (5)$$

$$h_{1t} = \left( -\frac{C}{3} h_0^3 h_{1xxxx} + \frac{C}{3} k^2 h_0^3 h_{1x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -Ch_0^2 h_{0xxx} h_1 - h_0^2 h_1 G \sin \theta \Big) \\
 & + \frac{M}{2} (h_0^2 \Gamma_{1x} + 2h_0 h_1 \Gamma_{0x})_x + \frac{C}{3} k^2 h_0^3 h_{1xx} \\
 & - \frac{C}{3} k^4 h_0^3 h_1 - \frac{M}{2} k^2 h_0^2 \Gamma_1, \quad (6) \\
 \Gamma_{1t} = & \frac{\Gamma_{1xx} - k^2 \Gamma_1}{Pe} - \frac{C}{2} \left( h_0^2 h_{0xxx} \Gamma_1 \right. \\
 & + 2h_0 h_{0xxx} h_1 \Gamma_0 + h_0^2 h_{1xxx} \Gamma_0 - k^2 h_0^2 h_{1xx} \Gamma_0 \\
 & \left. - h_0 h_1 \Gamma_0 G \sin \theta - \frac{1}{2} h_0^2 \Gamma_1 G \sin \theta \right)_x \\
 & + M(h_0 \Gamma_0 \Gamma_{1x} + h_0 \Gamma_{0x} \Gamma_1 + h_1 \Gamma_0 \Gamma_{0x})_x \\
 & - \frac{C}{2} (k^4 h_0^2 h_1 \Gamma_0 - k^2 h_0^2 h_{1xx} \Gamma_0) \\
 & - Mk^2 h_0 \Gamma_0 \Gamma_1. \quad (7)
 \end{aligned}$$

文献 [18] 基于 (4) 式和 (5) 式分析了基态下液滴的铺展特性及各参数的影响, 下文针对 (4) 式—(7) 式, 讨论在考虑重力和倾角影响时, 随机粗糙壁面上液滴铺展所呈现的稳定性特征.

### 3 数值模拟及非模态理论

#### 3.1 数值计算初始和边界条件

采用 PDECOL 程序 [2,3] 求解方程 (4) 式—(7) 式. 选取  $-20 < x < 20$  的一维区域进行计算, 模拟中对网格数为 1000, 2000 和 3000 等进行无关性验证. 结果表明: 不同网格数下所得液膜厚度曲线几乎完全重合, 从数据上看, 液膜厚度仅在小数点后第三位有一些差别: 以网格数为 1000 时的数值为基准, 则网格数为 2000 时在同一时刻下液膜厚度的最大偏差为 0.06%, 网格数为 3000 时的最大偏差为 0.05%, 但此时计算所耗时显著增加. 为此, 在满足精度和减少计算时长的条件下, 将计算区域划分成 2000 的均匀网格. 文中所用无量纲参数的数量级范围 [20]:  $C = 10^{-4}$ — $10^{-1}$ ,  $M = 0$ — $10^2$ ,  $Pe = 10^{-2}$ — $10^4$ , 下文计算中如无特殊说明取值为:  $C = 0.1$ ,  $M = 1$ ,  $Pe = 100$ ,  $G = 1$ ,  $\theta = 30^\circ$ .

随机粗糙壁面函数为

$$\begin{aligned}
 s(x) = & \frac{D}{23} \left\{ \sum_{m=1}^N \left[ \alpha_m \cos \left( \frac{k_0 m}{N} x \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \beta_m \sin \left( \frac{k_0 m}{N} x \right) \right] + 12.6 \right\}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

式中,  $\alpha_m^2 = \beta_m^2 = 1$ ,  $N = 20$ , 壁面高度  $D = 0.1$ , 壁面波数  $k_0 = 8$ .

初始液滴厚度和活性剂浓度分布为

$$\begin{aligned}
 h(x, 0) = & (1 + H_b - D - x^2) \\
 & \times [H(1-x) - H(-1-x)] \\
 & + (H_b - D) [H(x-1) + H(-1-x)] \\
 & + D - s(x), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma(x, 0) = H(1-x) - H(-1-x), \quad (10)$$

式中,  $H(x) = 0.5[1 + \tanh(100x)]$  为 Heaviside 阶跃函数, 最大无量纲预置液膜厚度  $H_b = 0.2$ .

初始液膜厚度和活性剂浓度扰动分布为

$$h_1(x, 0) = \Gamma_1(x, 0) = \exp(-x^2). \quad (11)$$

程序中的边界条件为

$$\begin{aligned}
 h_{0x}(\infty, t) = h_{0xxx}(\infty, t) = 0, \\
 \Gamma_{0x}(\infty, t) = 0, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{1x}(0, t) = h_{1x}(\infty, t) = 0, \\
 h_{1xxx}(0, t) = h_{1xxx}(\infty, t) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{1x}(0, t) = \Gamma_{1x}(\infty, t) = 0. \quad (13)$$

#### 3.2 非模态稳定性理论

由于线性理论忽略实际系统固有的非线性, 有时会导致定性的理论错误, 所以非模态稳定性理论 [23] 是求解此类问题的重要方法. 该方法又称瞬态增长法, 主要考察扰动能量随时间的变化情况.

定义在  $t = \tau$  时刻, 扰动能量为

$$\Omega_q(\tau) \equiv \int_0^\infty (q - q_\infty)^2(x, \tau) dx, \quad (14)$$

式中,  $q$  代表  $t = \tau$  时刻基态和扰动态特征量,  $q_\infty$  代表初始时刻对应的特征量.

活性剂液滴铺展时, 涉及液膜厚度  $h$  和表面活性剂浓度  $\Gamma$  的扰动, 其扰动能量放大比为

$$\begin{aligned}
 G_i(t) = & \frac{\Omega_{i1}(t) / \Omega_{i0}(t)}{\Omega_{i1}(t=0) / \Omega_{i0}(t=0)}, \\
 & (i = h, \Gamma), \quad (15)
 \end{aligned}$$

式中,  $\Omega_{i1}(t)$ ,  $\Omega_{i1}(t=0)$  和  $\Omega_{i0}(t)$ ,  $\Omega_{i0}(t=0)$  分别为  $t$  时刻和初始时刻的扰动和基态能量.

为更直观地分析系统的瞬态稳定性, 定义  $t$  时刻的扰动能量增长率  $\lambda_i$  如下:

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{G_i} \frac{dG_i}{dt}, \quad (i = h, \Gamma), \quad (16)$$

式中

$$\lambda_{i0} = \frac{1}{2\Omega_{i0}} \frac{d\Omega_{i0}}{dt}, \quad \lambda_{i1} = \frac{1}{2\Omega_{i1}} \frac{d\Omega_{i1}}{dt}. \quad (17)$$

$\lambda_i < 0$ 时系统呈现为瞬态稳定, 反之,  $\lambda_i > 0$ , 系统呈现为瞬态不稳定.

## 4 液滴铺展特性

### 4.1 演化历程

图2为 $k = 6$ 时倾斜粗糙壁面上液滴的演化历程(箭头所指为时间增加方向, 下同). 在重力和活性剂浓度引起的Marangoni效应共同驱动下, 液滴中心不断右移且高度减小, 液滴底部出现凹陷结构, 右侧凹陷特征更加显著且随 $t$ 沿流动方向移动, 而左侧凹陷则基本保持不变, 这是因重力与Marangoni力在此处达到平衡所致. 受壁面粗糙特征影响, 活性剂覆盖的铺展前沿区域液膜变形突出, 并随 $t$ 变形区域不断扩大; 而在不受活性剂浓度

影响的预置液膜表面, 则呈现与壁面结构相似的变形特征, 这是因为液膜流经壁面波谷使此处液体局部压力减小、流速增大, 液体减少形成凹陷; 而壁面波峰使此处液体局部压力增加、流速减小, 液体堆积造成隆起<sup>[19]</sup>. 图2(c)表明活性剂浓度最大值位于液滴右侧底部的凹陷处, 而左侧凹陷处略有峰值出现<sup>[20]</sup>, 且随 $t$ 持续, 活性剂浓度峰值及梯度不断减小, 扩散范围逐渐增加.

由图2(e)和(f)可知, 扰动态下液膜厚度 $h_1$ 峰值位于液滴底部凹陷处, 活性剂浓度扰动量 $\Gamma_1$ 峰值位于基态浓度梯度拐点(即液滴底部凹陷)处, 且负扰动现象明显, 二者均呈双驼峰型结构且左侧扰动峰值均高于右侧, 表明液滴底部左侧凹陷最容易受到扰动影响而失稳. 随 $t$ 持续,  $h_1$ 和 $\Gamma_1$ 逐渐衰减至零, 右侧扰动变化更显著. 而在其他区域 $h_1$ 和 $\Gamma_1$ 极小, 可忽略不计(图2(b), (d)).

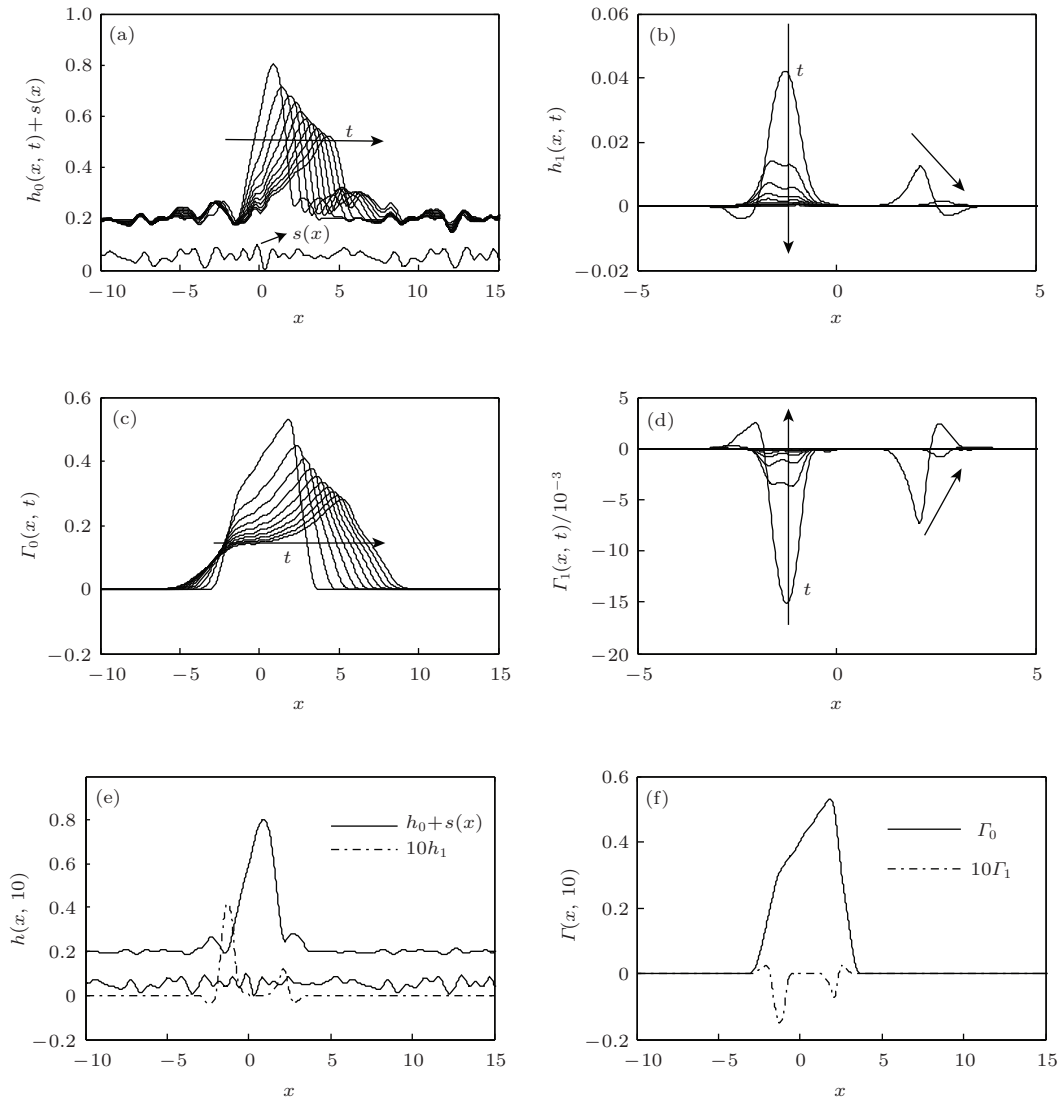


图2 液膜厚度和活性剂浓度基态和扰动态的演化过程( $k = 6, t = 10-100, \Delta t = 10$ )



### 4.2 铺展稳定性分析

图3表明, 当不考虑扰动波数的影响, 即  $k = 0$  时, 铺展初期 ( $t < 30$ ) 扰动能量放大比  $G_h$  和  $G_r$  均大于  $k > 0$  时的情形, 这与文献[24]的研究结果相一致. 随时间  $t$  持续,  $G_h$  和  $G_r$  增长率均很小, 但  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  始终大于 0, 表明无扰动波数影响时的液滴呈不稳定铺展. 随  $k$  增加,  $G_h$  和  $G_r$  由增长转为减小趋势, 且减小速率不断增大; 同时,  $k < 3$  时  $\lambda_h$  始终大于 0, 表明小波数范围内液滴铺展呈现不稳定现象. 此外, 图3(c)和(d)表明,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  总体呈现波动特征, 这是由于小波数范围内, 以液膜厚度扰动为例, 扰动量最大值位于液滴底部右侧凹陷处, 随时间  $t$  持续,  $h_{1\max}$  随凹陷前移, 同时受壁面粗糙结构影响, 导致与平整壁面相比,  $h_1$  和  $h_{1\max}$  不再单

调增加, 扰动能量增长速率发生波动, 如图3(e)和(f)所示, 活性剂浓度扰动与此类似.

为全面分析扰动波数  $k$  的影响, 图4给出较大  $k$  值时  $G_h$  和  $G_r$  的变化. 由图可知,  $k = 4$  时扰动参数随  $t$  的变化与较小  $k$  值的情形类似, 但  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  均小于 0 且波动现象减弱, 表明  $k = 4$  时, 壁面结构的影响被削弱, 液滴铺展开始趋于稳定.  $k = 6$  时,  $G_h$  和  $G_r$  随时间持续减小,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  不断增加, 但始终小于 0, 波动特征消失. 这是因为在大波数范围内, 扰动量最大值, 即扰动主体部分出现在液滴底部左侧凹陷处, 由于左侧凹陷位置基本不变, 粗糙壁面影响作用减弱甚至消失, 导致扰动量呈单调衰减变化(图2(b)和(d)). 随  $k$  继续增大,  $G_h$  和  $G_r$  减小率依次增加,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  不断降低, 表明大波数有利于液滴的稳定铺展.

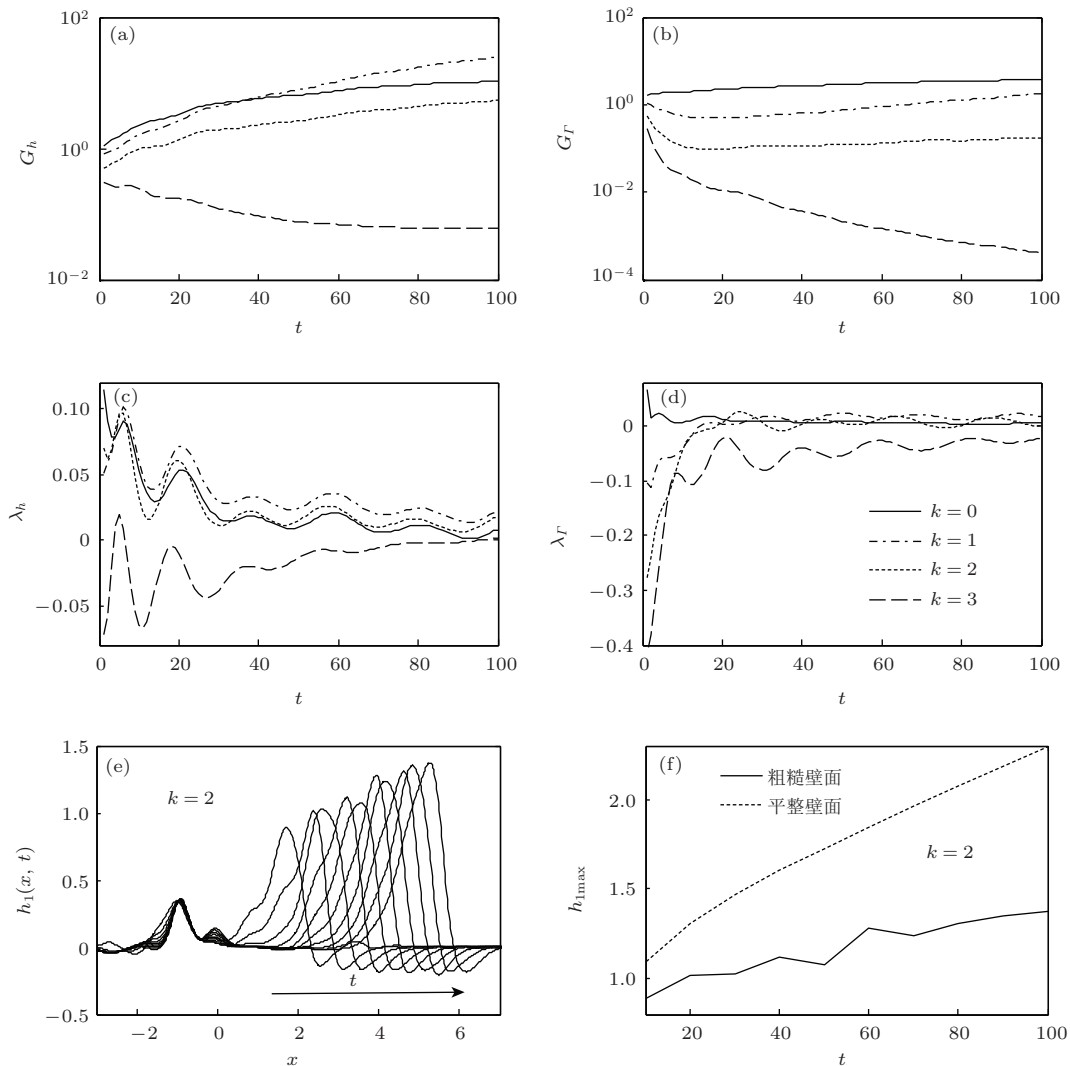


图3 较小  $k$  值时的扰动能量放大比和瞬态扰动增长率

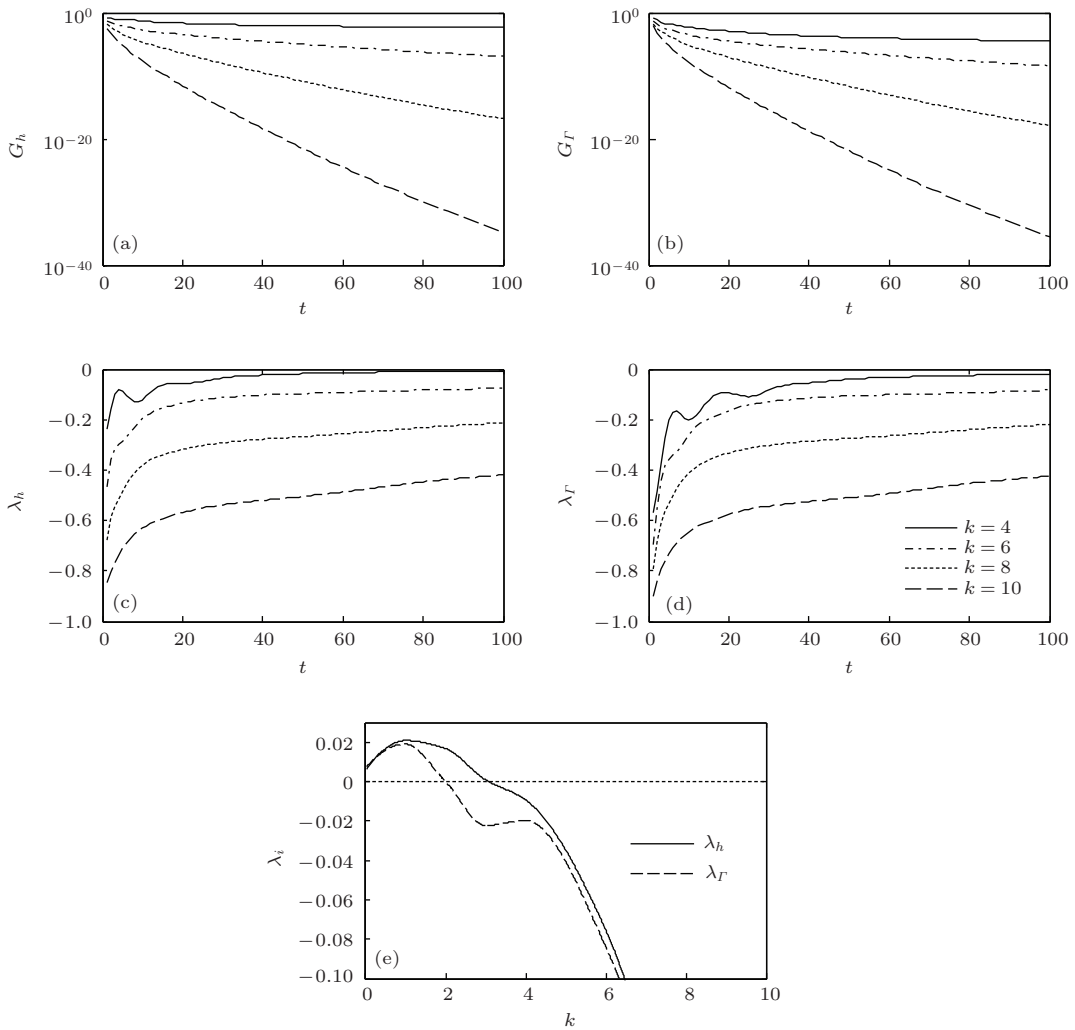


图4 较大  $k$  值时的扰动能量放大比和瞬态扰动增长率

此外, 由图4(e)可知, 随扰动波数  $k$  增加,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  均呈现先增后减的变化趋势,  $h_1$  的亚稳态点位于  $k = 3$  处, 而  $r_1$  的亚稳态点则位于  $k = 2$  处, 表明当  $k \leq 3$  时, 液滴铺展呈现不稳定状态, 这与 Edmonstone 等<sup>[4]</sup> 在研究平整基底上含活性剂液滴铺展稳定性的结果相一致. 结合图2和图3可知, 随  $k$  进一步增大, 扰动量最大值由液滴底部右侧凹陷处移至左侧凹陷处, 此时壁面结构特征对稳定性影响减弱,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  迅速减小且小于0, 液滴铺展过程趋于稳定.

### 4.3 特征参数对铺展稳定性的影响

图4表明,  $k = 6$  时液滴铺展过程处于稳定区, 为揭示该状态下各特征参数对铺展稳定性的影响, 下文针对  $k = 6$  时的铺展稳定性进行分析. 图5为壁面倾角  $\theta$  的影响, 该图表明  $\theta$  取值不同时, 其稳定性呈现截然不同的特征. 当  $\theta = 0$  时, 即不考虑重

力影响, 扰动量参数变化与  $\theta = 30^\circ$  趋势相同. 随  $\theta$  增加,  $G_h$  和  $G_r$  减小率逐渐降低,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  增加但始终小于0, 即在整个演化历程中液滴铺展稳定性逐渐降低. 值得注意的是, 当  $\theta \geq 60^\circ$  时扰动参数变化呈现波动特征, 尤其  $\theta = 90^\circ$  时更加显著. 这是由于提高  $\theta$  使得液滴铺展驱动力增强, 液滴主体部分及底部左侧凹陷向右侧移动, 扰动量  $h_1$  的峰值位置随之前移(图5(e)), 同时受壁面粗糙结构影响, 导致  $h_1$  和  $h_{1\max}$  衰减速率发生波动. 从而使得  $\lambda_h$  值在对应时间区间内呈现不同的变化趋势,  $\lambda_r$  变化机理与此类似.

壁面粗糙度打破了液膜沿流动方向平移时的对称性<sup>[24]</sup>, (8)式表明, 壁面高度  $D$  和波数  $k_0$  是反映粗糙壁面粗糙度的两个重要参数, 因此, 改变壁面高度  $D$  和波数  $k_0$  将势必影响液滴铺展的稳定性. 图6为  $k = 6$  时壁面高度  $D$  的影响. 随  $D$  增大,  $G_h$  和  $G_r$  的减小趋势愈加显著, 且  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  始终小

于0, 因此液滴铺展的稳定性增强, 该结论与Sadiq等<sup>[25]</sup>所得稳定性研究结果一致. 这是因为最大预置液膜厚度 $H_b$ 随 $D$ 增加而增大, 与壁面粗糙对液滴铺展的影响相比,  $H_b$ 促进液滴铺展稳定性的作用<sup>[24]</sup>更加显著, 因而稳定性有所提高. 值得注意的是, 当 $D = 0.3$ 时,  $G_h$ 和 $G_r$ 的减小速率显著降低,  $\lambda_h$ 和 $\lambda_r$ 也出现明显的上升, 且 $t > 80$ 时 $G_h$ 和 $G_r$ 转变为增加趋势, 对应的 $\lambda_h$ 和 $\lambda_r$ 也均大于0. 这是由于高度的进一步增大使壁面结构成为影响

液滴铺展的主导因素, 粗糙壁面的阻碍作用增强. 由图6(e)可知, 随时间演化,  $h_1$ 左侧驼峰逐渐缩小而右侧驼峰增大,  $t > 80$ 时 $h_{1\max}$ 和扰动能量不再衰减反而开始增大, 从而导致扰动参数曲线均出现显著的上升趋势. 此外由图6(g)也可看出, 当 $D$ 取较小值时, 增大 $D$ 可促进液滴铺展稳定, 但促进作用有限; 当 $D$ 取较大值时, 随 $D$ 增加, 液滴铺展稳定性减弱. 且当 $D > 0.25$ 时, 液滴铺展呈现不稳定状态.

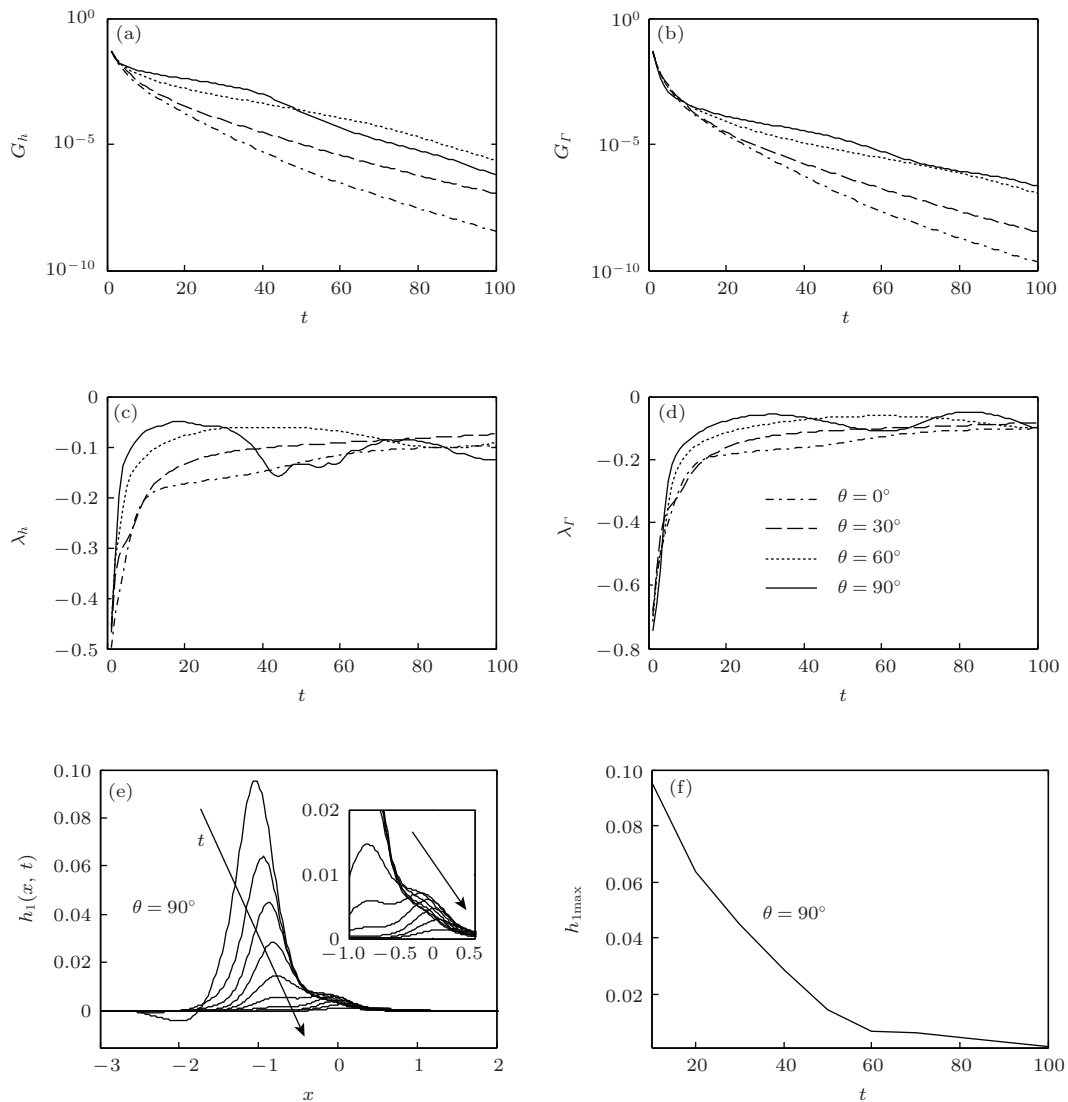


图5  $k = 6$ 时倾角 $\theta$ 的影响

图7为 $k = 6$ 时壁面波数 $k_0$ 的影响. 由图可知, 当 $k_0$ 由1增至11时,  $G_h$ 和 $G_r$ 的减小速率一直增大,  $\lambda_h$ 和 $\lambda_r$ 依次减小且始终小于0, 铺展稳定性增强. 这是因当 $k_0$ 很小时, 粗糙壁面相当于平整基底上设置有限个突起, 基底作用开始突显, 毛细力

作用增加, 故液滴铺展相对于平整基底趋于不稳定<sup>[26]</sup>. 随 $k_0$ 增大, 基底不平整度减弱, 毛细力作用减弱, 液滴铺展稳定性增强. 但当波数 $k_0 = 16$ 时,  $G_h$ 和 $G_r$ 减小趋势对应的时间范围缩短, 且在铺展中后期其值总体保持定值, 此时 $\lambda_h$ 大于0,  $\lambda_r$ 趋于



0, 液滴铺展又趋于不稳定. 这是因随  $k_0$  进一步增大, 壁面粗糙密集度抑制液滴铺展的作用开始突显<sup>[26]</sup>, 导致同一时刻凹陷深度和扰动量均呈现先减后增的变化(图 7(e) 和 (f)). 此外图 7(g) 也可证明, 随  $k_0$  增大,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  总体呈现先减小后增大的趋势, 故液滴铺展稳定性先增强后减弱, 且当  $k_0$  增至 15.5 时, 液滴呈不稳定铺展趋势.

研究表明, 毛细力对液滴的铺展过程具有重要影响. 图 8 表明, 随毛细力作用减弱 ( $C = 0.1 \rightarrow 0.005$ ),  $G_h, G_r$  减小速率逐渐降低, 直至转变为增长态势,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  则持续增大, 液滴铺展稳定性下

降. 这是由于毛细力方向与液膜弯曲方向相反, 具有抑制液膜变形的作用, 因此毛细力越弱, 液滴表面抵制扰动的能力越低, 铺展过程中表现出的稳定性越差<sup>[15]</sup>. 此外, 当  $C \leq 0.01$  时,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  在铺展前期 ( $t < 20$ ) 形成明显的驼峰特征, 这是由于随  $C$  进一步减小, 扰动量最大值位于液滴底部右侧凹陷处, 铺展前期毛细力不足以抵制扰动, 导致扰动量呈现先增后减的变化(图 8(e) 和 (f)). 图 8(g) 也可表明, 随  $C$  减小,  $\lambda_h$  和  $\lambda_r$  呈单调递增趋势, 液滴铺展稳定性减弱, 尤其在  $C > 0.05$  和  $C < 0.01$  范围内变化较明显.

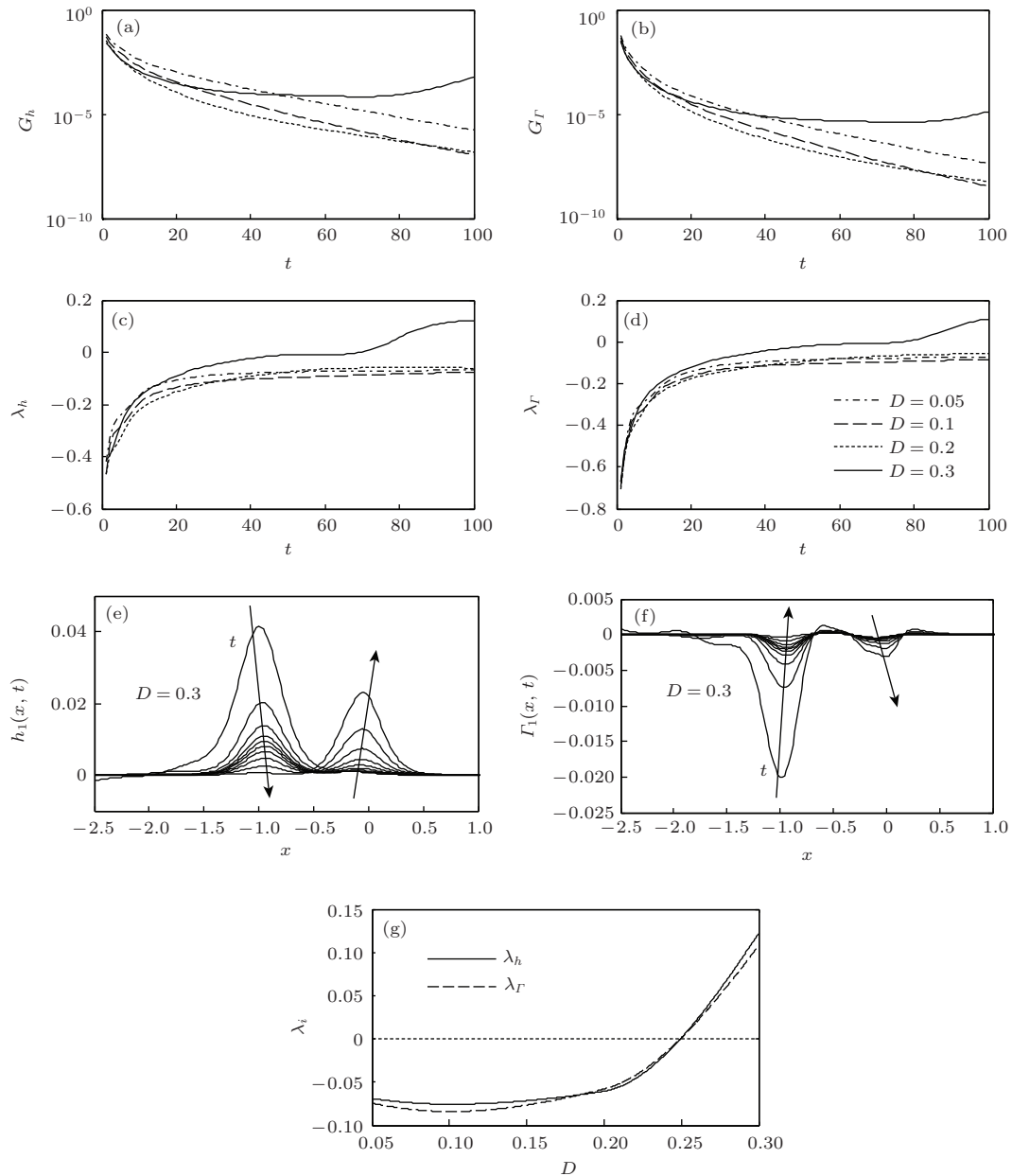


图 6  $k = 6$  时壁面高度  $D$  的影响

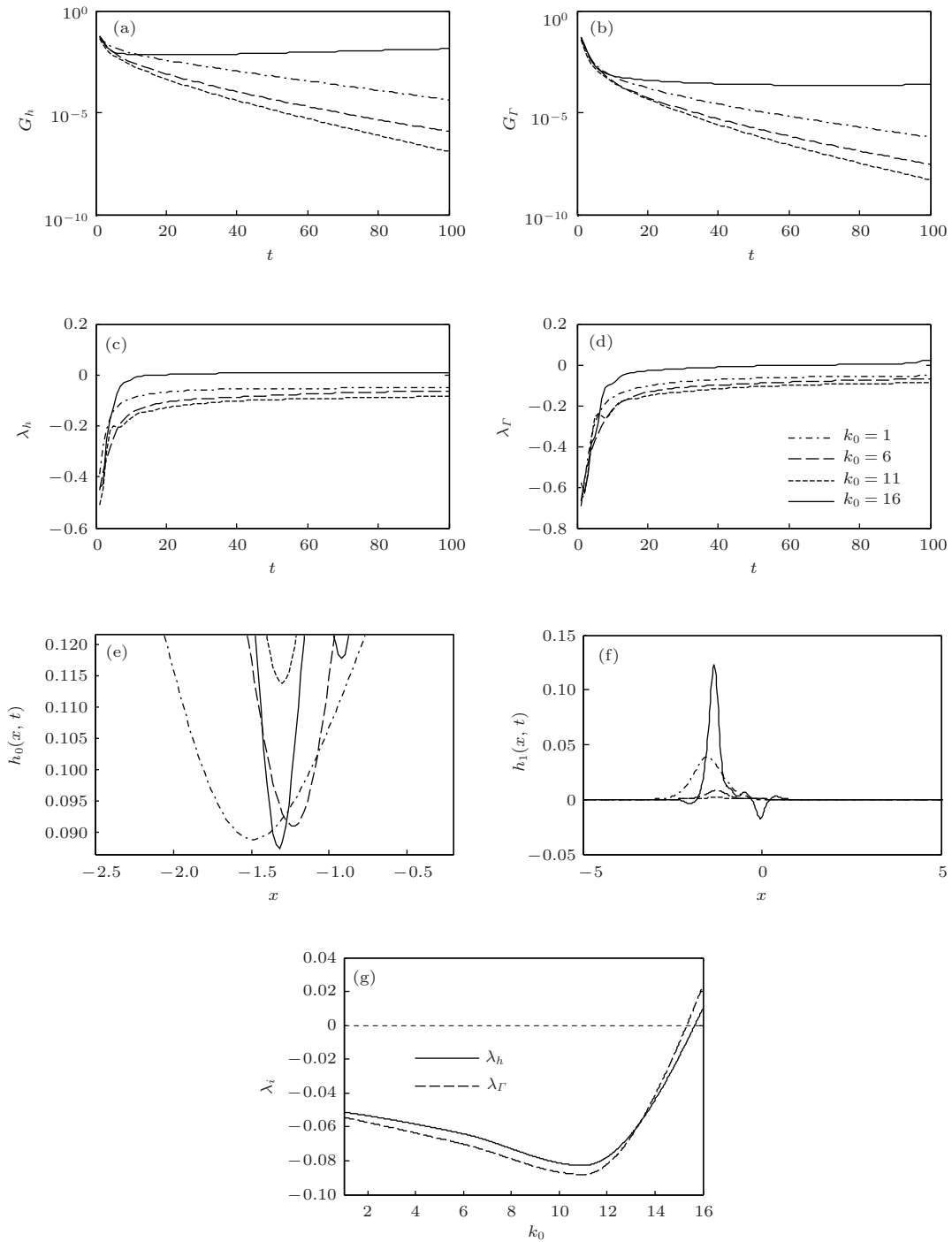


图7  $k = 6$ 时壁面波数  $k_0$  的影响

为进一步研究液滴铺展稳定性的内在机理, 现比较相关作用力的权重. 扰动能量增长率  $\lambda_q (q = h_1, \Gamma_1)$  影响因素可分解为毛细力项  $\lambda_{q(C)}$ 、Marangoni 力项  $\lambda_{q(M)}$  和重力项  $\lambda_{q(G)}$ . 现只分析  $\lambda_{h_1}$  ( $\lambda_{\Gamma_1}$  亦有相同结论) 的影响因素, 可分解为三部分:

$$\lambda_{h_1(C)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( -\frac{C}{3} h_0^3 h_{1xxx} + \frac{C}{3} k^2 h_0^3 h_{1xx} \right. \right.$$

$$\left. - C h_0^2 h_{0xxx} h_1 \right)_x + \frac{C}{3} k^2 h_0^3 h_{1xx} - \frac{C}{3} k^4 h_0^3 h_1 \Big] h_1 dx / \Omega_{h_1}, \quad (18)$$

$$\lambda_{h_1(M)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{M}{2} (h_0^2 \Gamma_{1x} + 2h_0 h_1 \Gamma_{0x})_x - \frac{M}{2} k^2 h_0^2 \Gamma_1 \right] h_1 dx / \Omega_{h_1}, \quad (19)$$

$$\lambda_{h_1(G)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-h_0^2 h_1 G \sin \theta)_x h_1 dx / \Omega_{h_1}. \quad (20)$$

图9中的正负值分别表示促使液滴铺展呈现不稳定和稳定趋势. 对比图9中各项的变化趋势可知: 1) Marangoni力是促使液滴呈现不稳定铺展的重要因素, 与基底有关的毛细力则起到抑制扰动增长的作用, 这与文献[24]所得的结论相符合; 2) 毛细数较大时, 表面张力起主导作用, 重力对 $\lambda_{h_1}$

的影响几乎为零, 随毛细数减小, 重力作用逐渐突显, 直至超过Marangoni力的影响, 成为导致液滴铺展不稳定的首要因素; 3) 随时间 $t$ 持续, 高毛细数下Marangoni力和毛细力对 $|\lambda_{h_1}|$ 的影响均呈单调递减作用, 而在铺展前期( $t < 20$ ), 低毛细数下的Marangoni力和毛细力的影响呈现先减后增的变化, 而重力的影响则呈单峰型变化, 趋势与前二者的影响相反.

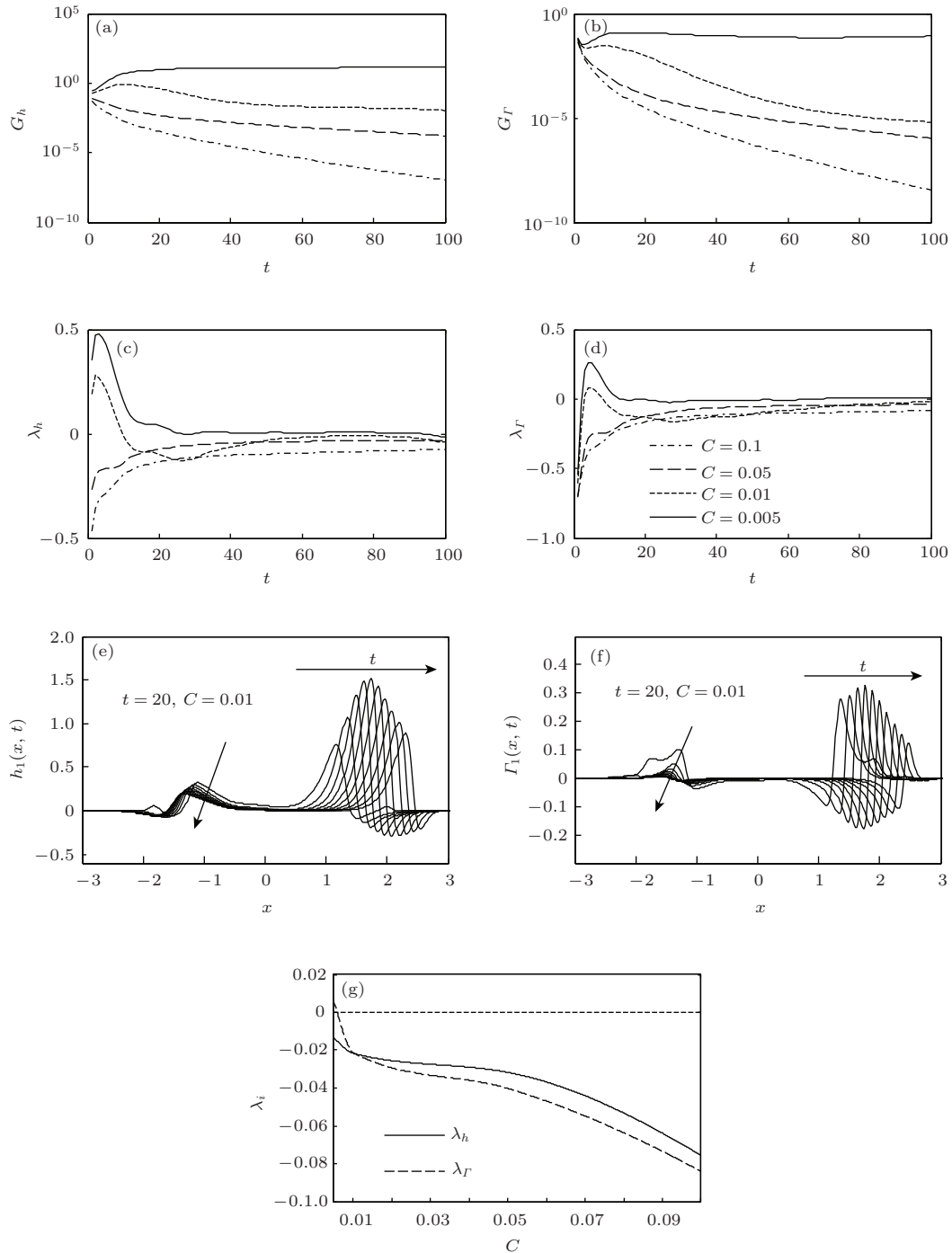


图8  $k = 6$ 时毛细数  $C$  的影响

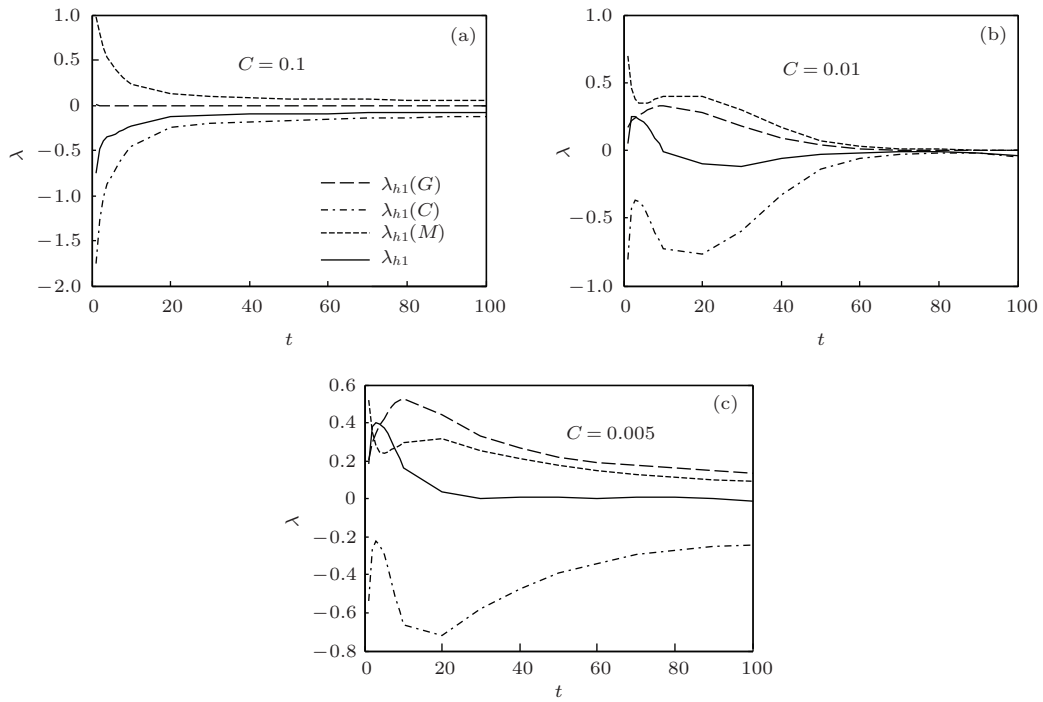


图9  $k = 6$  时毛细数  $C$  对  $\lambda_{h_1}$  各项权重的影响

## 5 结 论

1) 液滴在倾斜粗糙壁面上铺展时, 液滴中心不断右移且高度减小, 液滴底部出现凹陷结构, 右侧凹陷特征更加显著且随  $t$  沿流动方向移动, 左侧凹陷则基本保持不变;  $k = 6$  时扰动量  $h_1$  和  $\Gamma_1$  均呈现双驼峰型变化, 且随时间持续, 扰动量  $h_1$  和  $\Gamma_1$  逐渐衰减为零, 其中  $\Gamma_1$  呈现明显的负扰动现象. 扰动量  $h_1$  的和  $\Gamma_1$  的峰值出现在液滴底部凹陷处, 且左侧凹陷更易受到扰动影响而失稳.

2) 随扰动波数  $k$  增加, 扰动量峰值由液滴底部右侧凹陷处移至左侧凹陷处, 壁面结构特征对液滴铺展稳定性的影响减弱, 液滴铺展历程趋于稳定. 其中当  $k \leq 3$  时, 液滴铺展呈现不稳定状态, 随  $k$  增加, 稳定性则先减弱后增强的变化.

3) 增大倾角  $\theta$  值导致液滴铺展稳定性减弱, 且  $\theta$  较大时  $\lambda_h$  和  $\lambda_\Gamma$  呈现波动现象; 提高  $D$  和  $k_0$ , 液滴铺展稳定性先增强后减弱; 随  $C$  减小, 液滴铺展稳定性下降, 毛细力项、Marangoni 力项和重力项的影响比重发生明显变化, 重力对液滴铺展不稳定性作用逐渐突显; 当  $C \leq 0.01$  时, 扰动量最大值出现在液滴底部右侧凹陷处, 且呈现先增大后减小的变化趋势.

## 参考文献

- [1] Hamraoui A, Cachile M, Poulard C, Cazabat A M 2004 *Colloids Surf. A* **250** 215
- [2] Matar O K 2002 *Phys. Fluids* **14** 4216
- [3] Warner M R E, Craster R V, Matar O K 2004 *Phys. Fluids* **16** 2933
- [4] Edmonstone B D, Matar O K, Craster R V 2005 *Physica D* **209** 62
- [5] Mavromoustaki A, Matar O K, Craster R V 2012 *J. Colloid Interface Sci.* **371** 121
- [6] Ye X M, Jiang K, Shen L, Li C X 2013 *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **45** 681 (in Chinese) [叶学民, 姜凯, 沈雷, 李春曦 2013 力学学报 **45** 681]
- [7] Hu G H 2005 *Phys. Fluids A* **17** 088105
- [8] Wang W, Li Z X, Guo Z Y 2003 *J. Eng. Thermophys.* **24** 85 (in Chinese) [王伟, 李志信, 过增元 2003 工程热物理学报 **24** 85]
- [9] Gerbig Y B, Phani A R, Haefke H 2005 *Appl. Surf. Sci.* **242** 251
- [10] Craster R V, Matar O K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1131
- [11] Pang H Y, Zhang X F, Zhang H Y, Du F P 2006 *Chin. J. Pestic. Sci.* **8** 157 (in Chinese) [庞红宇, 张现峰, 张红艳, 杜凤沛 2006 农药学报 **8** 157]
- [12] Lee K S, Ivanova N, Starov V M, Hilal N, Dutschk V 2008 *Adv. Colloid Interfac.* **244** 54
- [13] Kalliadasis S, Bielarz C, Homsy G M 2000 *Phys. Fluids* **12** 1889
- [14] Nonomura Y, Morita Y, Hikima T, Seino E, Chida S, Mayama H 2010 *Langmuir* **26** 16150
- [15] Liu M, Wang S L, Wu Z R 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 154702 (in Chinese) [刘梅, 王松岭, 吴正人 2014 物理学报 **63** 154702]

- [16] Tseluiko D, Blyth M G, Papageorgiou D T 2011 *J. Eng. Math.* **69** 169
- [17] Fischer B J, Troian S M 2003 *Phys. Rev. B* **67** 016309
- [18] Nouar C, Kabouya N, Duesk J 2007 *Journal of Fluid Mechanics* **577** 211.
- [19] Li C X, Pei J J, Ye X M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 174702 (in Chinese) [李春曦, 裴建军, 叶学民 2013 物理学报 **62** 174702]
- [20] Li C X, Pei J J, Ye X M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 214704 (in Chinese) [李春曦, 裴建军, 叶学民 2013 物理学报 **62** 214704]
- [21] Zhao Y P 2012 *Physical Mechanics of Surface and Interface* (Beijing: Science Press)pp185–186m (in Chinese)
- [22] Edmonstone B D, Matar O K, Craster R V 2004 *J. Eng. Math.* **50** 141
- [23] Zhou H, Zhao G F 2003 *Hydrodynamic Stability* (Beijing: National Defense Press)pp2–4m (in Chinese) [周恒, 赵耕夫 2003 流动稳定性 (北京: 国防工业出版社) 第2—4页]
- [24] Warner M R E, Craster R V, Matar O K 2004 *J. Fluid Mech.* **510** 169
- [25] Sadiq M R, Tatiana G R, Stephan P 2012 *Phys. Fluids* **24** 014104
- [26] Li C X, Pei J J, Ye X M 2013 *CIESC J.* **64** 3308 (in Chinese) [李春曦, 裴建军, 叶学民 2013 化工学报 **64** 3308]

## Stability of surfactant-laden droplet spreading over an inclined heterogeneous substrate\*

Li Chun-Xi   Chen Peng-Qiang   Ye Xue-Min<sup>†</sup>

(Key Laboratory of Condition Monitoring and Control for Power Plant Equipment, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

( Received 1 July 2014; revised manuscript received 12 August 2014 )

### Abstract

For the spreading of a droplet covered with insoluble surfactant over an inclined random heterogeneous substrate, the base state and disturbance evolution equations for the film thickness and surfactant concentration are derived using the lubrication theory. Stability of the droplet spreading on the heterogeneous substrates, and effects of dimensionless parameters as well as the internal mechanism are investigated based on the non-modal stability theory. Results show that the disturbances of film thickness and surfactant concentration exhibit a double-hump shape and the crests lie in thinning regions at the bottom of the droplet. With increasing disturbance wave number, the stability of the droplet spreading is enhanced, but the maximal disturbance transfers from the right-side to the left-side of the droplet bottom. Increasing inclined angle leads to severe instability distinctly. Improving topographical height or increasing wave number of the substrate leads the spreading stability to firstly enhance and then to weaken. The droplet evolution displays an unstable spreading under smaller capillary number, with the maximum disturbance to be increasing before decreasing.

**Keywords:** surfactant-laden droplet, topographical surface, spreading, non-modal stability

**PACS:** 47.61.-k, 47.85.mf, 47.61.fg, 47.55.dk

**DOI:** 10.7498/aps.64.014702

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972077, 11202079), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant No. 13MS97).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yexuemin@163.com](mailto:yexuemin@163.com)