

Sierpinski 地毯上 S^4 模型的临界特性

尹训昌 刘万芳 祝祖送 孔祥木

Critical properties of the S^4 model for Sierpinski carpet

Yin Xun-Chang Liu Wan-Fang Zhu Zu-Song Kong Xiang-Mu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 016402 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.016402

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.016402>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

调制无线电信号的分形特征研究

[Study on fractal features of modulated radio signal](#)

物理学报.2011, 60(5): 056401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.056401>

Sierpinski 地毯上 S^4 模型的临界特性*尹训昌^{1)2)†} 刘万芳¹⁾ 祝祖送¹⁾ 孔祥木^{2)‡}

1)(安庆师范学院物理与电气工程学院, 安庆 246011)

2)(曲阜师范大学物理系, 曲阜 273165)

(2014年4月20日收到; 2014年8月20日收到修改稿)

通过键移动重整化群的方法, 分析了 Sierpinski 地毯上 S^4 模型的临界行为, 得到了系统的临界点. 由得到的结果可知, 本系统不仅有一个高斯不动点, 而且还存在着一个 Wilson Fisher 不动点, 把它与 Sierpinski 地毯上的高斯模型相互对比, 发现本系统的临界点变化很大. 这说明这两个系统隶属于两个不同的普适类.

关键词: Sierpinski 地毯, S^4 模型, 重整化群

PACS: 64.60.al, 75.10.Hk

DOI: 10.7498/aps.64.016402

1 引言

分形一般分为有规则分形和无规则分形两种, 区分这两种分形的标准是看它们是否满足标度不变性. 众所周知, 平移对称晶格满足平移对称性的特点, 而分形则截然相反, 它不具有平移对称性. 分岔度和分形维数是描述分形的两个比较重要的参数. 一个特别有趣的现象是在某些分形中分形维数可以为非整数, 这为我们提供了一个研究相变更加广阔的领域. 基于分形具有上述特征, 因此研究分形的临界问题具有一定的理论意义. 20世纪80年代, Gefen 等最先研究了几种简单分形上离散模型 (Ising 模型和 Potts 模型) 的相变问题, 并得到了一些有趣的成果^[1-4], 这奠定了研究分形晶格上相变的基础. 自此以后, 分形的相变成了统计物理之中的一个研究热点, 越来越多的人投入到这一研究领域, 并陆续得到了一些有意义的成果^[5-17]. 2001年, Lin 等研究了 Sierpinski 地毯 (Sierpinski carpet, SC) 上 Gauss 模型的临界行为, 得到了系统的临界点^[11]. S^4 模型和 Gauss 模型的自旋值都可以取连续值, 与只能取有限的离散值的 Ising 模型和 Potts 模型相比较, 这已经是一个巨大的进步. S^4 模型还具有一个优点, 它的构造比

Gauss 模型更加复杂, 即多了一个四次方项的相互作用, 它可以更好的模拟自然界中的铁磁系统, 因此, 研究 S^4 模型的临界行为有助于我们更好的理解自然界中铁磁系统的相变. 在本文中, 我们所研究的 Sierpinski 地毯是一种有规则分形, 采用键移动重整化群的方法, 我们讨论了该分形上 S^4 模型的临界行为.

2 Sierpinski 地毯和 S^4 模型

Sierpinski 地毯是比较典型的有规则分形之一, 它的一个显著特征是分岔度为无穷大. 我们简单叙述它的构建过程, 首先, 选取一个大正方形并将它分割成 B^2 个大小相等的较小正方形, 再从 B^2 个较小的正方形中按照某种方式再挖去 l^2 个更小的正方形, 然后, 在剩下的 $(B^2 - l^2)$ 个更小正方形中进行与上面相同的步骤, 直到形成的正方形边长与晶格常数保持同一数量级. 最后, 得到的集合称为 Sierpinski 地毯. 它的分形维数表示为

$$d_f = \ln\{B^2 - l^2\} / \ln B. \quad (1)$$

从(1)式可知, 它的分形维数除了可以取整数外还可以取非整数, 这是它的另外一个特点.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10775088) 和安徽省自然科学基金 (批准号: 1408085QA15, 1308085QA19) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yxc0212@163.com

‡ 通信作者. E-mail: kongxm@mail.qfnu.edu.cn

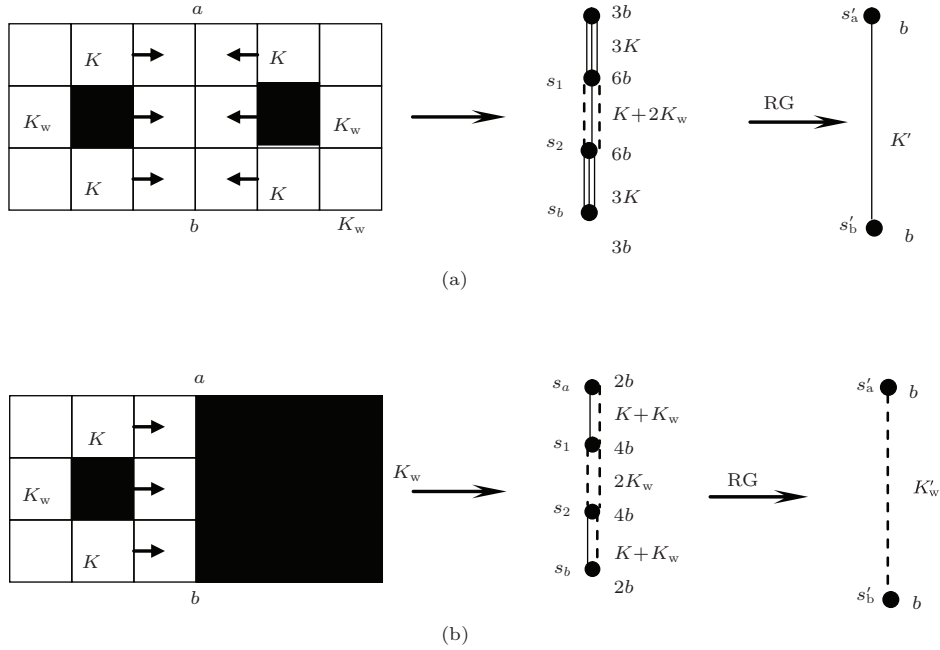


图1 Sierpinski 地毯上的键移动和重整化变换过程, 相互作用参数 K 和 K_w 分别用实线和虚线表示

Sierpinski 地毯上 S^4 模型的有效哈密顿量表示为

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} s_i s_j - \sum_i \frac{b}{2} s_i^2 - \sum_i u_i s_i^4, \quad (2)$$

(2) 式中, K_{ij} 代表自旋 s_i 和自旋 s_j 两者之间的约化相互作用参量, b 用来表示自旋格点 s_i 上的 Gauss 分布常数, u_i 理解为四次方项的相互作用参数. 为了求解 Sierpinski 地毯上的 Ising 模型, Gefen 等假设了两种相互作用参数 K_w 和 K , 假设参数 K 表示为未被挖去小正方形的相互作用, 已经挖去的小正方形的相互作用参数用 K_w 表示. 在本文中, 为了研究 Sierpinski 地毯上的 S^4 模型, 除了采用 Gefen 的假设外, 我们还假设存在两种四次方项的相互作用 u 和 u_w , 他们分别对应着没有挖去和已经挖去小正方形的四次方项相互作用参数.

3 键移动重整化群的变换过程

为了展示重整化群过程, 我们以 $B = 3, l = 1$ 的 Sierpinski 地毯为例 (图 1). 根据 Sierpinski 地毯的构成过程, 我们可以得到两个重整化群变换, 如图 1(a) 和 (b) 所示. 在键移动的过程中, 我们假设最近邻的相互作用、高斯分布常数和四次方项的相互作用都随着键一起移动, 并且假设高斯分布常数 b 和四次方项的相互作用 u_i 与格点 i 上键的数目密切相关, 例如, 若格点 i 上存在 N 个 K 键和 N_w 个

K_w 键, 则 $b = (N + N_w)b$, $u_i = Nu + N_w u_w$. 根据假设, 图 1(a) 中 Sierpinski 地毯键移动后的有效的哈密顿量为

$$H = H_0 + V, \quad (3)$$

式中

$$H_0 = 3K(s_a s_1 + s_2 s_b) + (K + 2K_w) s_1 s_2 - \frac{3b}{2}(s_a^2 + s_b^2) - \frac{6b}{2}(s_1^2 + s_2^2) - 3u(s_a^4 + s_b^4), \quad (4)$$

$$V = -(4u + 2u_w)(s_1^4 + s_2^4). \quad (5)$$

为了便于计算, 我们把图 1(a) 中系统的有效哈密顿量分为两部分 H_0 和 V , 在下面的计算中我们把 V 作为微扰项进行讨论. 根据正则系统配分函数的定义, 配分函数可以改写为

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} ds_a ds_b \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0+V}, \quad (6)$$

按照重整化群的步骤, 我们仍然定义

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0+V}. \quad (7)$$

上式中 (PT) 用来表示部分迹.

结合 (3) 式—(5) 式, (7) 式重新改写为

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0+V}}{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0} \langle e^V \rangle_0, \quad (8)$$

其中

$$\langle \dots \rangle_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 (\dots) e^{H_0}}{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0}}. \quad (9)$$

(9) 式类似求平均值的表达式, 为了便于叙述, 我们称它为累积平均.

考虑到微扰项 V 是个很小量, 我们做级数展开为

$$\langle e^V \rangle_0 = e^{\langle V \rangle_0 + (1/2)(\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2) + \dots}. \quad (10)$$

把 (10) 式代入 (8) 式可得

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0} \times e^{\langle V \rangle_0 + (1/2)(\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2) + \dots}. \quad (11)$$

消去内部的自旋变量 s_1 和 s_2 后, 系统的有效的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H' &= \ln(PT) \\ &= H'_0 + \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2} (\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2), \end{aligned} \quad (12)$$

由 (11) 式可得

$$\begin{aligned} H'_0 &= \ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0} \right) \\ &= C_{11} s_a s_b + C_{12} (s_a^2 + s_b^2) \\ &\quad + C_{13} (s_a^4 + s_b^4), \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{9K^2(K + 2K_w)}{36b^2 - (K + 2K_w)^2}, \\ C_{12} &= -\frac{3b}{2} + \frac{27bK^2}{36b^2 - (K + 2K_w)^2}, \\ C_{13} &= -3u. \end{aligned}$$

根据 (5) 和 (9) 式, 可知

$$\begin{aligned} \langle V \rangle_0 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 V e^{H_0}}{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 e^{H_0}} \\ &= C_{21} s_a s_b + C_{22} (s_a^2 + s_b^2) \\ &\quad + C_{23} (s_a^4 + s_b^4), \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$C_{21} = -\frac{15552b^2 K^2 (K + 2K_w) (2u + u_w)}{[36b^2 - (K + 2K_w)^2]^3},$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= -\{684bK^2[36b^2 + (K + 2K_w)^2] \\ &\quad + (K + 2K_w)^2(2u + u_w)\} \\ &\quad \times \{[36b^2 - (K + 2K_w)^2]^3\}^{-1}, \\ C_{23} &= -\{162K^4[1296b^4 + (K + 2K_w)^4] \\ &\quad \times (2u + u_w)\} \\ &\quad \times \{[36b^2 - (K + 2K_w)^2]^4\}^{-1}. \end{aligned}$$

结合 (5), (9) 和 (14) 式, 我们求得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2) \\ &= C_{31} s_a s_b + C_{32} (s_a^2 + s_b^2) + C_{33} (s_a^4 + s_b^4), \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} C_{31} &= \{3456K^2(K + 2K_w)[12312b^4 + (K + 2K_w)^4 \\ &\quad + 198b^2(K + 2K_w)^2](2u + u_w)^2\} / \Phi^5, \\ C_{32} &= \{5184bK^2[10368b^4 + 612b^2(K + 2K_w)^2 \\ &\quad + 7(K + 2K_w)^4](2u + u_w)^2\} / \Phi^5, \\ C_{33} &= \{139968b^2 K^4[9072b^4 + 144b^2(K + 2K_w)^2 \\ &\quad + 17(K + 2K_w)^4](2u + u_w)^2\} / \Phi^6, \\ \Phi &= 36b^2 - (K + 2K_w)^2. \end{aligned}$$

由 (12)—(15) 式, 求得重整化群变换后系统的有效的哈密顿量

$$\begin{aligned} H' &= (C_{11} + C_{21} + C_{31}) s_a s_b \\ &\quad + (C_{12} + C_{22} + C_{32}) (s_a^2 + s_b^2) \\ &\quad + (C_{13} + C_{23} + C_{33}) (s_a^4 + s_b^4). \end{aligned} \quad (16)$$

根据重整化群变换的性质, 即变换前后系统的哈密顿量的形式保持不变, 为了保证变换后的哈密顿量形式相同, 需要进行自旋重新标度, 令 $s'_i = \xi s_i (i = a, b)$. 变换后的相互作用参量和自旋的四次方项相互作用分别用 K' 和 u' 表示, 则自旋重新标度后得到变换后的哈密顿量

$$\begin{aligned} H' &= K' s'_a s'_b - \frac{b}{2} (s'^2_a + s'^2_b) \\ &\quad - u' (s'^4_a + s'^4_b), \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\xi = \sqrt{-\frac{2}{b} (C_{12} + C_{22} + C_{32})}, \quad (18)$$

$$K' = (C_{11} + C_{21} + C_{31}) / \xi^2, \quad (19)$$

$$u' = -(C_{13} + C_{23} + C_{33}) / \xi^4. \quad (20)$$

(19) 式和 (20) 式称为图 1(a) 上 S^4 模型的递推关系.

在图 1(b) 中键移动后, 系统的有效的哈密顿量写为

$$H_{w0} = (K + K_w)(s_a s_1 + s_2 s_b) + 2K_w s_1 s_2 - \frac{2b}{2}(s_a^2 + s_b^2) - \frac{4b}{2}(s_1^2 + s_2^2) - (u + u_w)(s_a^4 + s_b^4), \quad (21)$$

$$V_w = -(u + 3u_w)(s_1^4 + s_2^4). \quad (22)$$

采用上面相同的方法, 可得此时的递推关系

$$K'_w = -bK_w(K + K_w)^2[\Omega^4 - 384b^2\Omega^2(u + 3u_w) + 24(7424b^4 + 560K_w^4 + 160K_w^2\Omega + 9\Omega^2)] \times (\Omega^5\Theta)^{-1}, \quad (23)$$

$$u'_w = b^2\{u + u_w + (K + K_w)^4(256b^4 + 16K_w^4) \times (u + 3u_w)/\Omega^4 - [3072b^2(K + K_w)^4 \times (112b^4 + 16b^2K_w^2 + 17K_w^4)(u + 3u_w)^2] \times \Omega^{-4}\}/(4\Theta^2). \quad (24)$$

其中

$$\Omega = 16b^2 - 4K_w^2, \quad \Theta = 2b(-8b^2 + K^2 + 2KK_w + 3K_w^2)/\Omega - 24b(K + K_w)^2(16b^2 + 4K_w^2)(u + 3u_w)/\Omega^3 + [1536b(K + K_w)^2(128b^4 + 68b^2K_w^2 + 7K_w^4) \times (u + 3u_w)^2]/\Omega^5.$$

(19), (20), (23) 和 (24) 式称为 Sierpinski 地毯上 S^4 模型的重整化群变换关系.

根据递推关系得到系统的不动点为 ($K^* = b, K_w^* = b, u^* = 0, u_w^* = 0$) 和 ($K^* = 0.812b, K_w^* = 0.871b, u^* = 0.055b, u_w^* = 0.130b$). 其中, 前者对应着 Gauss 不动点, 后者和 Wilson-Fisher (W-F) 不动点相互对应.

根据重整化群变换的理论, 求得线性变换矩阵

$$R_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial K'}{\partial K} & \frac{\partial K'}{\partial K_w} & \frac{\partial K'}{\partial u} & \frac{\partial K'}{\partial u_w} \\ \frac{\partial K'_w}{\partial K} & \frac{\partial K'_w}{\partial K_w} & \frac{\partial K'_w}{\partial u} & \frac{\partial K'_w}{\partial u_w} \\ \frac{\partial u'}{\partial K} & \frac{\partial u'}{\partial K_w} & \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial u_w} \\ \frac{\partial u'_w}{\partial K} & \frac{\partial u'_w}{\partial K_w} & \frac{\partial u'_w}{\partial u} & \frac{\partial u'_w}{\partial u_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^* = 0.812b, \\ K_w^* = 0.871b, \\ u^* = 0.055b, \\ u_w^* = 0.130b \end{pmatrix}. \quad (25)$$

由 (25) 式得到本征值为 $\lambda_1 = 10.099, \lambda_2 = 4.599, \lambda_3 = 1.638, \lambda_4 = 0.002$. 由此进一步可得关联长度的临界指数为

$$\nu = \frac{\ln B}{\ln \lambda_1} = 0.475.$$

4 结 论

采用键移动重整化群的方法, 我们分析了 Sierpinski 地毯上的 S^4 系统的两种变换过程, 得到了此系统的递推关系, 并进一步得到了 Sierpinski 地毯上 S^4 系统的相变点和关联长度的临界指数. 我们得到了下面的结论: 本系统除了有 Gauss 不动点之外, 还存在着 Wilson Fisher 不动点, 并且后一个不动点对系统的临界行为影响较大. 这与 Sierpinski 地毯上的高斯模型明显不同 [11], 进一步探讨发现, 由于该分形的分形维数 $d_f < 2$ 造成了这样的结果. 而当分形维数 $d_f > 4$ 时, 由于反复进行重整化群变换, 四次方项趋向于零, S^4 模型和 Gauss 模型属于同一普适类. 对结果分析可知, Sierpinski 地毯上 S^4 模型和 Ising 模型具有不同的临界行为, 属于不同的普适类. 但是, 在适当的参数区间时 ($b = -4u$), S^4 模型就类似于 Ising 模型, 它们又属于同一普适类.

在上面的四个递推关系中, 如果我们令 $u^* = 0, u_w^* = 0$, 就得到了此晶格上 Gauss 模型的重整化群变换关系, 进而得到临界点为 $K^* = b, K_w^* = b$. 这与前人的到的结论一致. 这进一步验证了我们计算结果的正确性.

参考文献

- [1] Gefen Y, Mandelbrot B, Aharony A 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 855
- [2] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1983 *J. Phys. A* **16** 1267
- [3] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1984 *J. Phys. A* **17** 435
- [4] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1984 *J. Phys. A* **17** 1277
- [5] Hu B 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 2316
- [6] Wang Z D, Gong C D, Arno H 1986 *Phys. Rev. A* **34** 1531
- [7] Wu Y K, Hu B 1987 *Phys. Rev. A* **35** 1404
- [8] Fahnle M, Braun P 1988 *Phys. Rev. B* **38** 7094
- [9] Yang Z R 1988 *Phys. Rev. B* **38** 728
- [10] Kong X M, Li S 2000 *Commun. Theor. Phys.* **33** 63
- [11] Lin Z Q, Kong X M 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 882

- [12] Zhu J Y, Zhu H 2003 *Chin. Phys.* **12** 264 55 4901]
[13] Sun C F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3768 (in Chinese) [孙春峰 2005 物理学报 **54** 3768]
[14] Li Y, Kong X M 2005 *Physica A* **356** 589
[15] Yin X C, Yin H, Kong X M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4901 (in Chinese) [尹训昌, 尹慧, 孔祥木 2006 物理学报
[16] Chen X, Zhang J S 2014 *Chin. Phys. B* **23** 096401
[17] Ma Y B, Zhang H W, Li Y X 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 118102 (in Chinese) [马岩冰, 张怀武, 李元勋 2014 物理学报 **63** 118102]

Critical properties of the S^4 model for Sierpinski carpet*

Yin Xun-Chang^{1)2)†} Liu Wan-Fang¹⁾ Zhu Zu-Song¹⁾ Kong Xiang-Mu^{2)‡}

1) (School of Physics and Electric Engineering, Anqing Teachers College, Anqing 246011, China)

2) (Department of Physics, Qufu Normal University, Qufu 273165, China)

(Received 20 April 2014; revised manuscript received 20 August 2014)

Abstract

According to the bond-moving renormalization group technique, the critical behaviour of S^4 model for Sierpinski carpet is investigated, then the critical points are obtained. From the results we find that there are a Wilson-Fisher fixed point and a Gaussian fixed point. In contrast to the Gauss model for Sierpinski carpet, the critical points have altered obviously. Results indicate that the two systems belong to two different universal classes.

Keywords: Sierpinski carpet, S^4 model, renormalization group

PACS: 64.60.al, 75.10.Hk

DOI: 10.7498/aps.64.016402

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10775088), and the National Natural Science Foundation of Anhui Province (Grant Nos. 1408085QA15, 1308085QA19).

† Corresponding author. E-mail: yx0212@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: kongxm@mail.qfnu.edu.cn