

混沌干扰中基于同步挤压小波变换的谐波信号提取方法

汪祥莉 王斌 王文波 喻敏 王震 常毓禅

Harmonic signal extraction from chaotic interference based on synchrosqueezed wavelet transform

Wang Xiang-Li Wang Bin Wang Wen-Bo Yu Min Wang Zhen Chang Yu-Chan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 100201 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.100201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I10>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不确定因素下永磁同步电动机系统的混沌鲁棒控制

Chaotic robust control of permanent magnet synchronous motor system under uncertain factors

物理学报.2014, 63(22): 220203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220203>

基于有限资源提升网络可生存性的拓扑重构方法

A topological reconfiguration method for enhancing networks survivability with limited resources

物理学报.2014, 63(17): 170201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.170201>

利用节点效率评估复杂网络功能鲁棒性

Evaluating complex network functional robustness by node efficiency

物理学报.2012, 61(19): 190201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.190201>

混沌干扰中基于同步挤压小波变换的谐波信号提取方法*

汪祥莉^{1)2)†} 王斌³⁾ 王文波⁴⁾ 喻敏³⁾⁴⁾ 王震³⁾ 常毓禅⁵⁾

1)(武汉理工大学计算机科学与技术学院, 武汉 430063)

2)(国家海洋局第二研究所, 卫星海洋环境动力学国家重点实验室, 杭州 310012)

3)(武汉科技大学信息科学与工程学院, 武汉 430081)

4)(武汉科技大学信息与计算科学系, 武汉 430065)

5)(中国人民大学财政金融学院, 北京 100872)

(2014年8月31日收到; 2014年12月25日收到修改稿)

针对混沌干扰背景下多个谐波信号的提取问题, 提出了一种基于同步挤压小波变换(SST)的谐波信号抽取方法. 首先利用SST将混沌信号和谐波信号组成的混合信号分解为不同的内蕴模态类函数, 然后利用Hilbert变换对分离出的内蕴模态类函数进行频率识别, 从中分离出各谐波信号. 以Duffing混沌背景为例, 对混沌干扰下多谐波信号的提取进行了实验分析. 实验结果表明: 对于不同频率间隔的多个谐波分量, 本文方法的提取结果都具有较高的精度, 而且所提方法对高斯白噪声的干扰具有较好的鲁棒性, 综合提取效果优于经典的经验模态分解方法.

关键词: 同步挤压小波变换, 混沌干扰, 谐波提取**PACS:** 02.30.Nw, 31.70.Hq**DOI:** 10.7498/aps.64.100201

1 引言

自然界中的许多信号都具有混沌特性, 如心电信号、气候信号和海杂波信号等. 此外, 混沌信号目前也被广泛应用于某些专业领域, 如混沌保密通信或混沌电子对抗等^[1-3]. 在众多的应用中, 如何在混沌干扰背景下将混合信号中的谐波信号有效地提取出来具有非常重要的理论和实践意义^[4,5]. 在该领域的研究中, Leung和Huang^[6]利用最小相空间体积法对混合在混沌噪声的auto-regressive模型参数和正弦信号频率进行了估计; Haykin和Li^[7]利用人工神经网络的方法研究了具有混沌特性的海杂波信号中小目标信号的抽取; Stark和Arumu-

gaw^[8]利用混沌信号可短时预测的特性, 采用混沌预测的方法研究了混沌通信系统中谐波信号的提取; 汪芙平等^[9]根据混沌系统中混沌吸引子的固有几何特性, 借助微分流形切空间对混沌干扰和谐波信号分别进行投影, 实现了强混沌干扰中谐波信号的提取. 上述方法虽然可较好地提取谐波信号, 但所需条件较多, 计算复杂.

近年来, 随着小波和经验模态分解(empirical mode decomposition, EMD)^[10]等时频分析理论的逐渐发展, 依据混沌信号和谐波信号时频特性的不同, 利用小波或EMD从混沌干扰中分离谐波信号的方法得到了广泛的研究. 王国光和王树勋^[11]利用小波变换的相空间投影技术, 对混沌干扰下的谐波信号进行提取; 李鸿光和孟光^[12]利用EMD对混

* 国家自然科学基金(批准号: 11201354)、卫星海洋环境动力学国家重点实验室开放基金(批准号: SOED1405)和冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室开放基金(批准号: Z201303)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wwb0178@163.com

沌信号和谐波信号组成的混合信号进行分解, 经混沌信号和谐波分解为不同的内蕴模态函数, 从而实现谐波信号的抽取; 王尔馥等^[13,14]将小波变换和EMD相结合, 依据混沌信号、噪声和谐波信号的时频特性, 提出了一种时频域联合的混沌干扰中谐波信号的提取方法. 小波和EMD方法虽然可以简单有效地提取混沌背景中的谐波信号, 但小波变换和EMD分解都存在着模态混叠现象, 无法分离密集的模式响应^[15,16]. 当混沌信号中混有多个频率比较接近的谐波信号时, 小波变换和EMD方法不能对各谐波信号进行完整的分离, 导致不同频率的谐波信号混叠在一起. 而且, 小波变换和EMD分解对噪声比较敏感, 当混沌背景中混有较强的噪声时, 小波变换或EMD方法的分解结果会受到严重影响, 导致谐波信号不能被精确分离^[16].

同步挤压小波变换(synchrosqueezing wavelet transform, SST)算法^[17]是在连续小波变换的基础上发展起来的一种非线性时频重分配算法. 它通过将小波变换后的时频图在频率域方向进行压缩, 获得较高频率精度的时频曲线, 各时频曲线间不存在交叉项, 即使函数波形为非谐波形式, 同步挤压算法也能准确求得信号的瞬时频率^[18]. 因此, 同步挤压小波变换可以较好地改善频率混叠现象, 即使待分解信号中含有多个频率比较接近的谐波信号, SST仍可较好地将其逐一提取出来. 而且同步挤压小波变换对噪声具有较好的鲁棒性, 当信号中混有较强的白噪声时, 同步挤压小波变换仍可获得清晰的时频曲线和近似不变的分解结果^[19]. SST的特点使其可以在一定程度上克服小波变换和EMD分解的不足, 在对复杂的混合信号进行分离时, 可以获得更为精确的分离结果^[17-19].

本文将SST引入到混沌干扰下的谐波信号提取中, 依据复杂信号可由不同的内蕴模态函数类组成的概念, 提出一种基于SST的多谐波信号分离方法. 首先利用SST将混沌信号和谐波信号组合而成的混合信号分解为不同的内蕴模态函数类; 然后利用Hilbert变换分离出的内蕴模态函数类进行频率识别, 从中分离出各谐波信号. 利用Duffing方程产生的混沌信号进行了实验分析, 实验结果表明, 当混沌干扰信号中含有频率间隔较小的多个谐波信号时, 所提方法仍可获得较好的谐波分离效果, 而且对噪声具有较强的抗干扰性, 谐波提取效果优

于经典的EMD方法.

2 同步挤压小波变换基本理论

Daubechies等^[17]提出的SST是一种以连续小波变换为基础的时频分析方法, 通过对连续小波变换的结果进行时频重组, 使得连续小波变换时频分析图中的各频率曲线变得更细、更清晰, 从而提高信号的频率分析精度. 假设多分量谐波信号 $f(t)$ 为

$$f(t) = \sum_{k=1}^K f_k(t) = \sum_{k=1}^K A_k(t) \cos[2\pi\phi_k(t)],$$

其中 $A_k(t) > 0$, $\phi'_k(t) > 0$. SST可以精确地分析 $f(t)$ 的各频率成分, 并成功抽取信号中的各谐波分量 $f_k(t)$. SST的基本理论如下.

定义1 (内蕴模态类函数, intrinsic mode type function, IMT) 如果连续函数 $f(t) = A(t) \cos(2\pi\phi(t))$ 满足以下条件:

$$\begin{aligned} A(t) &\in C^1(R) \cap L^\infty(R), \\ \phi &\in C^2(R), \quad \inf_{t \in R} \phi'(t) > 0, \\ \sup_{t \in R} \phi'(t) &< \infty, \\ \sup_{t \in R} \phi''(t) &< \infty, \\ |A'(t)|, \quad |\phi''(t)| &\leq \varepsilon |\phi'(t)|, \end{aligned}$$

则称函数 $f(t)$ 为具有精度 ε 的内蕴模态类函数(ε -IMT). 在同步挤压小波变换中, 信号将被分解为有限个内蕴模态类函数的和.

定义2 (具有良好分离度的内蕴模态函数类) 如果函数 f 可以被表示为

$$f(t) = \sum_{k=1}^K f_k(t) = \sum_{k=1}^K A_k(t) \cos[2\pi\phi_k(t)],$$

其中 $f_k(t)$ 是具有精度 ε 的内蕴模态类函数, K 为常数, 且满足

$$\begin{aligned} \phi'_k(t) &> \phi'_{k-1}(t), \\ |\phi'_k(t) - \phi'_{k-1}(t)| &\geq d[\phi'_{k-1}(t) + \phi'_k(t)], \end{aligned}$$

则称函数 f 为具有分离度 d 的 ε -内蕴模态函数类的叠加, 其中 d 被称为分离条件. 具有分离度 d 的 ε -内蕴模态函数类的集合被记为 $A_{\varepsilon,d}$.

在 SST 中, 首先计算 $f(t)$ 连续小波变换的系数 $W_f(a, b)$:

$$W_f(a, b) = \int f(t) a^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt,$$

并通过连续小波变换计算信号的瞬时频率:

$$\omega_f(a, b) = \frac{\partial_t W_f(a, t)}{2i\pi W_f(a, t)},$$

在此基础上, 可得到 SST 的主要结论.

结论 1 假设函数 $f \in A_{\varepsilon, d}$, 设 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{1/3}$, 选择函数 $h \in C_0^\infty$ 且 $\int h(t) dt = 1$, 选择一个小波函数 ψ , 设其傅里叶变换 $\hat{\psi}$ 的支撑区间为 $[\xi_\psi - \Delta, \xi_\psi + \Delta]$ 且 $\Delta < \frac{d\xi_\psi}{1+d}$. 对函数 f 的连续小波变换系数 $W_f(a, b)$ 进行阈值为 $\tilde{\varepsilon}$, 精度为 δ 的同步压缩的结果为

$$S_{f, \tilde{\varepsilon}}^\delta(b, \omega) = \int_{A_{\tilde{\varepsilon}, f}(b)} W_f(a, b) \frac{1}{\delta} h\left[\frac{\omega - \omega_f(a, b)}{\delta}\right] a^{-3/2} da,$$

式中, $A_{\tilde{\varepsilon}, f}(b) = \{a \in R^+; |W_f(a, b)| > \tilde{\varepsilon}\}$. 当 ε 充分小时, 可通过实现分量 $f_k(t)$ 的完全重构, 即对于每一个 $k \in \{1, \dots, K\}$, 存在着一个常数 C , 使得对于 $\forall b \in R$, 都有

$$\left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[R_\psi^{-1} \int_{|\omega - \phi'_k(b)| < \tilde{\varepsilon}} S_{f, \tilde{\varepsilon}}^\delta(b, \omega) d\omega \right] - A_k(b) \cos[2\pi\phi_k(b)] \right| \leq C\tilde{\varepsilon}.$$

利用 SST 抽取信号中的谐波分量主要分为两步: 首先计算信号的 SST 系数 $S_{f, \tilde{\varepsilon}}^\delta(b, \omega)$, 然后对频率中心 $\phi'_k(b)$ 附近的 SST 系数进行积分抽取出分量 $f_k(b)$.

3 基于 SST 的混沌干扰下谐波信号的提取

文献 [18, 19] 中对 SST 算法进行了推广和完善, 将其成功应用到噪声环境下非线性、非平稳信号的时频分析中. 可以证明, 在混沌干扰背景下, 通过 SST 分析可以将混合信号中的谐波分量逐一提取出来.

定义 3 (M 带同步挤压小波变换) 假设函数 $f \in A_{\varepsilon, d}$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{1/3}$, 函数 $h \in C_0^\infty$ 且 $\int h(t) dt = 1$, 则称

$$S_{f, \tilde{\varepsilon}}^{\delta, M}(b, \omega)$$

$$= \int_{\Omega_{f, \tilde{\varepsilon}}^M} W_f(a, b) \frac{1}{\delta} h\left[\frac{\omega - \omega_f(a, b)}{\delta}\right] a^{-3/2} da$$

为函数 f 在带宽为 M , 精度为 δ , 阈值为 $\tilde{\varepsilon}$ 时的同步挤压小波变换, 其中, $\Omega_{f, \tilde{\varepsilon}}^M = \{(a, b) : a \in [M^{-1}, M], |W_f(a, b)| > \tilde{\varepsilon}\}$. 对于没有带宽限制, 即 $a > 0$ 时的同步挤压小波变换 $S_{f, \tilde{\varepsilon}}^\delta(b, \omega)$, 可统一记为 $S_{f, \tilde{\varepsilon}}^\delta(b, \omega) = S_{f, \tilde{\varepsilon}}^{\delta, \infty}(b, \omega)$.

结论 2 设函数 $f(t) \in A_{\varepsilon, d}$, 参数 ε, h, ψ 和 Δ 与结论 1 中定义相同, 定义 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{1/3}$,

$$M_k = \max\left(\frac{1}{\xi_\psi - \Delta} \|\phi'_k\|_{L^\infty}, \frac{1}{\xi_\psi - \Delta} \|\frac{1}{\phi'_k}\|_{L^\infty}\right),$$

如果函数 $g(t) = f(t) + e(t)$, $e(t)$ 为混沌干扰信号, 则当 $e(t)$ 的幅值满足

$$\|e\|_{L^\infty} \leq \varepsilon / \max(\|\psi\|_{L^1}, \|\psi'\|_{L^1})$$

时, 对 $\forall b \in R$, 存在常数 C_3 , 使得下式成立:

$$\left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{R_\psi} \int_{\{\omega: |\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{g, M_k^{1/2} \varepsilon + \tilde{\varepsilon}}^{\delta, M_k}(b, \omega) d\omega \right] - A_k(b) \cos[2\pi\phi_k(b)] \right| \leq C_3 \tilde{\varepsilon}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

证明 定义

$$D(b, g, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M) = \{a : |W_f(a, b)| > \varepsilon_1, |\omega_f(a, b) - \phi'_k(b)| \leq \varepsilon_2, a \in [M^{-1}, M]\},$$

则函数 g 在 $D(b, g, M_k^{1/2} \varepsilon + \tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}, M_k)$ 中的同步挤压小波变换为

$$S_{g, M_k^{1/2} \varepsilon + \tilde{\varepsilon}}^{\delta, M_k}(b, \omega) = \int_{\Omega_{g, M_k^{1/2} \varepsilon + \tilde{\varepsilon}}^{M_k}} W_g(a, b) \frac{1}{\delta} h\left[\frac{\omega - \omega_g(a, b)}{\delta}\right] a^{-3/2} da.$$

对同步挤压小波变换系数进行累加, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{g, M_k^{1/2} \varepsilon + \tilde{\varepsilon}}^{\delta, M_k}(b, \omega) d\omega \\ &= \int_{(a, b) \in \Omega_{g, M_k^{1/2} \varepsilon + \tilde{\varepsilon}}^{M_k}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}} a^{-3/2} W_g(a, b) \\ & \times \frac{1}{\delta} h\left[\frac{\omega - \omega_g(a, b)}{\delta}\right] d\omega da. \end{aligned} \quad (1)$$

由文献 [12] 可知, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$h\left(\frac{\omega - \omega_g(a, b)}{\delta}\right) \rightarrow 1,$$

因此 (1) 式可化简为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{g, M_k^{1/2} \varepsilon + \tilde{\varepsilon}}^{\delta, M_k}(b, \omega) d\omega$$

$$= \int_{D(b,g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)} a^{-3/2}W_g(a,b)da. \quad (2)$$

由结论1可知^[17], 对于内蕴模态类函数 $f(t)$, 当 $a \in D(b,g,\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},\infty)$ 时, 必有 $(a,b) \in Z_k = \{(a,b) : |a\phi'_k(b) - \xi_\psi| \leq \tilde{\varepsilon}\}$, 也即此时 $a \in [M_k^{-1}, M_k]$, 因此

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |-\phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{f,\varepsilon}^\delta(b,\omega) d\omega \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |-\phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{f,\varepsilon}^{\delta,M_k}(b,\omega) d\omega \\ &= \int_{D(b,f,\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)} a^{-3/2}W_f(a,b) da \\ &= R_\psi A_k(b) \cos[2\pi\phi_k(b)]. \end{aligned} \quad (3)$$

由(3)和(2)式可知

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon}}^{\delta,M_k}(b,\omega) d\omega \right. \\ & \quad \left. - R_\psi A_k(b) \cos[2\pi\phi'_k(b)] \right| \\ &= \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon}}^{\delta,M_k}(b,\omega) d\omega \right. \\ & \quad \left. - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{f,\tilde{\varepsilon}}^{\delta,M_k}(b,\omega) d\omega \right| \\ &= \left| \int_{D(b,g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)} a^{-3/2}W_g(a,b) da \right. \\ & \quad \left. - \int_{D(b,f,\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)} a^{-3/2}W_f(a,b) da \right| \\ &\leq \int_{D(b,g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)} a^{-3/2} \\ & \quad \times |W_g(a,b) - W_f(a,b)| da \\ & \quad + \int_{D(b,f,\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k) \setminus D(b,g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)} da \\ & \quad \times a^{-3/2}|W_f(a,b)| da. \end{aligned} \quad (4)$$

由连续小波变换的定义可知,

$$\begin{aligned} & |W_g(a,b) - W_f(a,b)| \\ & \leq \|g - f\|_{L^\infty} a^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi\left(t' - \frac{b}{a}\right) \right| dt', \end{aligned}$$

其中 $t' = t/a$.

由于 $\|e\|_{L^\infty} \leq \varepsilon/\max(\|\psi\|_{L^1}, \|\psi'\|_{L^1})$, 所以可得

$$|W_g(a,b) - W_f(a,b)| \leq a^{1/2}\varepsilon. \quad (5)$$

当 $(a,b) \in D(b,f,\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)/D(b,g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon},M_k)$ 时, $a \in [M_k^{-1}, M_k]$, 由(5)式和区域 D 的定义可知,

$$|W_g(a,b) - W_f(a,b)| \leq M_k^{1/2}\varepsilon,$$

$$|W_g(a,b)| \leq M_k^{1/2}\varepsilon + \tilde{\varepsilon},$$

所以此时

$$\begin{aligned} |W_f(a,b)| &\leq |W_f(a,b) - W_g(a,b)| + |W_g(a,b)| \\ &\leq 2M_k^{1/2}\varepsilon + \tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6)$$

将(5)和(6)式代入(4)式, 可得

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\omega: |\omega - \phi'_k(b)| \leq \tilde{\varepsilon}\}} S_{g,M_k^{1/2}\varepsilon+\tilde{\varepsilon}}^{\delta,M_k}(b,\omega) d\omega \right. \\ & \quad \left. - R_\psi A_k(b) \cos[2\pi\phi'_k(b)] \right| \\ &\leq \int_{M_k^{-1}}^{M_k} a^{-1}\varepsilon da + \int_{M_k^{-1}}^{M_k} a^{-3/2}(2M_k^{1/2}\varepsilon + \tilde{\varepsilon}) da \\ &\leq (2\log M_k)\varepsilon + 2(M_k^{1/2} - M_k^{-1/2})(2M_k^{1/2}\varepsilon + \tilde{\varepsilon}). \end{aligned}$$

考虑到 $0 < \varepsilon < 1$, 所以 $\varepsilon^{1/2} > \varepsilon$, 因此

$$\begin{aligned} & (2\log M_k)\varepsilon + 2(M_k^{1/2} - M_k^{-1/2}) \\ & \quad \times (2M_k^{1/2}\varepsilon + \tilde{\varepsilon}) \\ &\leq (2\log M_k)\tilde{\varepsilon} + 2(M_k^+ M_k^{1/2} - M_k^{-1/2} - 2)\tilde{\varepsilon} \\ &\leq C\tilde{\varepsilon}, \end{aligned}$$

其中 $C = 2(\log M_k + M_k + M_k^{1/2} - M_k^{-1/2} - 2)$, 因此结论2成立.

由结论2可以看出, 对于混沌背景中的谐波信号, 通过SST可以进行较好的抽取, 当阈值参数 $\tilde{\varepsilon}$ 取值较小时, 基本可以实现谐波信号分量的近似完全重构. 利用SST提取混沌干扰下的谐波信号主要分5步进行, 具体步骤如下.

1) 对信号进行连续小波变换: 选择合适的母小波函数 $\psi(t)$, 计算混沌干扰信号 $g(t)$ 的连续小波变换系数 $W_g(a,b)$, 并计算其瞬时频率 $\omega_g(a,b)$.

2) 划分频率区间: 假设混沌干扰信号 $g(t)$ 的长度 $n = 2^{L+1}$, 采样时间间隔为 Δt , 取 $n_v = 32$, 令

$$n_a = Ln_v, \quad \Delta\omega = \frac{1}{n_a - 1} \log_2\left(\frac{n}{2}\right), \quad \omega_0 = \frac{1}{n\Delta t}.$$

规定 $\omega_l = 2^{l\Delta\omega}\omega_0$, $l = 0, 1, \dots, n_a - 1$, 将混沌干扰信号所处的频率范围划分为不同的频率区间,

$$W_l = \left(\frac{\omega_{l-1} + \omega_l}{2}, \frac{\omega_l + \omega_{l+1}}{2} \right).$$

3) 对小波系数进行同步挤压变换: 取阈值

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\log n} \cdot \text{median}[|W_g(\hat{a}, b)|]}{0.6745}$$

(其中 $\hat{a} = \Delta t/2^{n_v}$), 则混沌干扰信号在中心频率 ω_l 处的同步挤压变换为

$$T_g(\omega_l, b)$$

$$= \int_{\{a: \omega_g(a,b) \in W_l, |W_g(a,b)| > \gamma\}} W_g(a,b) a^{-3/2} da.$$

4) 各分量信号的提取: 计算混沌干扰信号中所含的主频率 $\omega_{q^*(k)}$ [20], 设区间

$$\chi_k(t) = \left[\frac{q^*(k) - n_v}{2}, \frac{q^*(k) + n_v}{2} \right],$$

则可求出混沌干扰信号中各谐波分量信号 $f_k(t)$:

$$f_k(t) = \frac{2}{R_\psi} \text{Re} \left[\sum_{l \in \chi_k(t)} T_f(\omega_l, t) \right].$$

5) 谐波信号的判断: 当分量信号提取完成后, 对 $f_k(t)$ 进行 Hilbert 变换

$$Y_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

令

$$Z_k(t) = X_k(t) + jY_k(t) = a(t) e^{j\theta_k(t)},$$

其中

$$\theta_k(t) = \arctan \left[\frac{Y(t)}{X(t)} \right],$$

则可求出 $f_k(t)$ 的瞬时频率:

$$\omega_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_k(t)}{dt},$$

并通过最小二乘法对 $\omega_k(t)$ 进行拟合. 由于混沌干扰信号是非线性非平稳信号, 因此其瞬时频率并不稳定, 随时间改变而波动; 而谐波信号属于线性平稳信号, 因此其瞬时频率值趋于稳定. 对所提取的分量 $f_k(t)$, 如果其拟合后的瞬时频率 $\omega_k(t)$ 近似等于常数 ω_k , 则该分量即为所提取的谐波信号.

4 仿真实验与讨论

Duffing 方程是人们所熟悉的具有重要应用背景的非线性振子, 它具有丰富的动力学行为, 这些动力学行为至今仍是研究的重要内容. 考虑 Duffing 方程

$$x'' + cx' - f_0^2 x + dx^3 = P \cos(ft), \quad (7)$$

其中 f_0 为系统固有圆频率, c 为系统阻尼, d 为非线性参数, P 与 f 分别为外激励幅值和外激励频率. 本文利用经典的四阶 Runge-Kutta 方法对方程 (7) 进行数值求解, 取 $e(0) = 1.0$. 为了得到比较稳定的结果, 略去开始的数百个周期的数据, 获取基本不受初始条件影响的混沌信号 $e(t)$. 令混沌信号 $e(t)$ 与谐波信号 $f(t)$ 组成一个复杂的信号 $g(t) = f(t) + e(t)$, 通过对 $g(t)$ 进行 SST 变换, 可

以从中分离出与 $f(t)$ 同频率和同相位的谐波信号. 本文实验中, 取 Duffing 振子的参数 $c = 0.05$, $f_0^2 = 0.2$, $d = 1$, $f = 2$, $P = 10$, 采样间隔为 $\Delta t = \pi/300$, 过滤掉前 100 个周期的信号, 保留接收信号长度 $N = 11500$.

4.1 仿真实验 1: 不同频率分布的谐波信号的提取

设混沌干扰下的信号为 $g(t) = f(t) + e(t)$, 其中 $e(t)$ 表示给出的 Duffing 混沌信号, $f(t)$ 表示谐波信号, $f(t)$ 由两部分构成

$$f(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t),$$

其中 $A_1 = A_2 = 1.0$, 固定 $\omega_1 = 0.3$, 为了考察 SST 对不同频率分布时多谐波分量的提取能力, 将 ω_2 的值取为 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8.

混沌信号干扰信号 $x(t)$ 如图 1 (a) 所示, $\omega_1 = 0.3$, $\omega_2 = 0.5$ 时谐波信号 $f(t)$ 与混沌信号 $e(t)$ 组合后的混合信号 $g(t)$ 如图 1 (b) 所示.

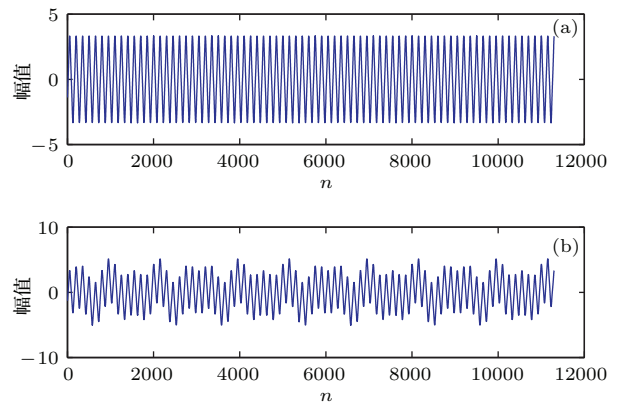


图 1 混沌干扰信号与组合信号 (a) Duffing 混沌干扰信号; (b) 混沌信号与谐波信号的混合信号

Fig. 1. Chaotic signal and the mixed signal: (a) Duffing chaos interference signal; (b) the mixed signal of chaotic signal and harmonic signal.

对混合信号 $g(t)$ 分别采用 EMD 方法和 SST 方法进行谐波提取. 图 2 给出了两种方法分别提取出的谐波结果. 由图 2 (a) 和 (c) 可以看出, EMD 方法提取的谐波的频率与原始谐波基本一致, 但幅值误差较大, 较多地方不能与原谐波信号较好地吻合. 而 SST 方法提取的谐波信号 [图 2 (b) 和 (d)] 除了边界外, 其余部分的频率、幅值都基本能与原谐波信号完全符合. 两种方法提取出的谐波与原谐波间的相关系数如表 1 所列, 可以看出, SST 提取出的谐波信号的相关系数较高. 图 2 和表 1 的结果表明:

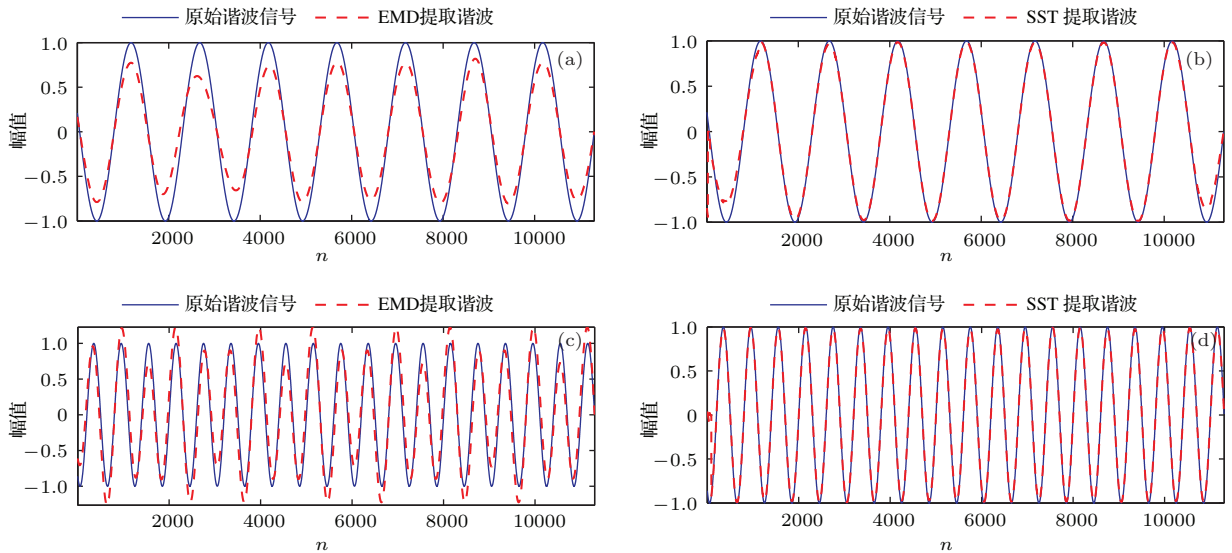


图2 频率分布为(0.3, 0.5)时谐波信号的提取 (a) $\sin(0.3t)$ 的EMD提取结果; (b) $\sin(0.3t)$ 的SST提取结果; (c) $\sin(0.5t)$ 的EMD提取结果; (d) $\sin(0.5t)$ 的SST提取结果

Fig. 2. The harmonic extraction results of the frequency distribution (0.3, 0.5): (a) the extracting results of $\sin(0.3t)$ by EMD; (b) the extracting results of $\sin(0.3t)$ by SST; (c) the extracting results of $\sin(0.5t)$ by EMD; (d) the extracting results of $\sin(0.3t)$ by SST.

表1 不同频率间隔时提取谐波与原谐波的相关系数

Table 1. The correlation coefficients of the extracted harmonic and original harmonic.

谐波频率 (ω_1, ω_2)	EMD 谐波提取相关系数 (Corr)		SST 谐波提取相关系数 (Corr)	
	谐波信号 1	谐波信号 2	谐波信号 1	谐波信号 2
(0.3, 0.4)	0.7286	0.3211	0.8115	0.7835
(0.3, 0.5)	0.9316	0.9380	0.9611	0.9448
(0.3, 0.6)	0.9715	0.9537	0.9765	0.9638
(0.3, 0.7)	0.9862	0.9652	0.9891	0.9835
(0.3, 0.8)	0.9952	0.9850	0.9950	0.9879

与EMD分解相比, SST方法能更好地提取混沌干扰下的谐波信号. 其主要原因是当两个谐波分量间的频率比较接近时, EMD分解不可避免地产生模态混叠, 导致不能完整地提取每个谐波信号的完整信息; 而SST在连续小波变换的基础上, 从频率方向对分解结果进行挤压, 使得每个谐波信号在频率方向的分解信息不再混叠, 从而可以更清晰地提取各个谐波分量.

当 $\omega_1 = 0.3, \omega_2 = 0.4, 0.6, 0.7, 0.8$ 时, 两种方法提取的谐波与原谐波信号的相关系数如表1所列. 表1的数据表明: 当两谐波间的频率间隔越来越大时, EMD方法所提取的谐波信号的效果也越来越好, 可以看出, EMD方法的提取效果受谐波间的频率间隔影响较大; SST方法提取的谐波与原谐波信号间的相关系数也随着谐波间频率间隔

的增大有所增加, 但总体来看变化幅度不大, 说明SST方法提取混沌背景中的谐波时, 受谐波间频率间隔影响不大, 有较好的鲁棒性. 当两输入谐波间的频率间隔较小时, SST方法提取的总体效果优于EMD方法; 当两输入谐波间的频率间隔较大时, SST方法与EMD方法的提取效果相当.

4.2 仿真实验2: 含噪混沌背景中谐波信号的提取

设混沌干扰下的含噪信号为 $g(t) = f(t) + e(t) + n(t)$, 其中 $e(t)$ 表示给出的Duffing混沌信号, $f(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$ 为谐波信号, 其中 $A_1 = A_2 = 1.0, \omega_1 = 0.3, \omega_2 = 0.5, n(t)$ 表示高斯白噪声. 为了考察噪声对混沌干扰下谐波信号提取的影响, 定义噪声水平 (noise level, NL) 为:

$NL = \frac{\sigma_n}{\sigma_x} \times 100\%$, 其中 σ_n 表示噪声 $n(t)$ 的标准差, σ_x 表示混沌信号 $e(t)$ 的标准差. 实验中混沌干扰信号和谐波信号保持不变, 通过调整高斯白噪声强度, 观察两种方法的谐波信号提取效果. 图 3 (a), (b) 给出了混沌信号 $e(t)$ 和噪声水平 $NL = 40\%$ 时混合信号 $g(t)$ 的波形图.

分别利用 EMD 方法和 SST 方法从 $g(t)$ 中进行谐波抽取, 图 4 给出了两种方法抽取的谐波结果. 可以看出, 在噪声环境下, SST 方法 [图 4 (b) 和 (d)] 依然可以较好地抽取出谐波信号, 抽取出的谐波与原谐波信号相比, 除了边界外, 其余部分都能较好地符合. 而 EMD [图 4 (a) 和 (c)] 方法抽取的结果受噪声影响较大, 抽取的谐波与原谐波信号的符合度较低.

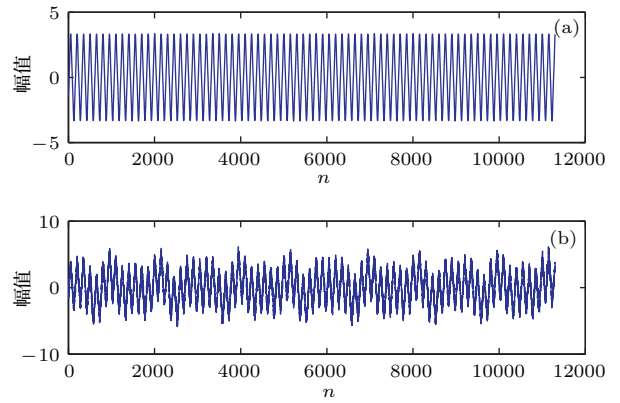


图 3 混沌干扰信号和含噪混合信号 (a) Duffing 混沌干扰信号; (b) $NL = 40\%$ 时的含噪混合信号

Fig. 3. The chaotic interference signal and the mixed signal contained noise: (a) Duffing chaotic interference signal; (b) the mixed signal with $NL = 40\%$ noise.

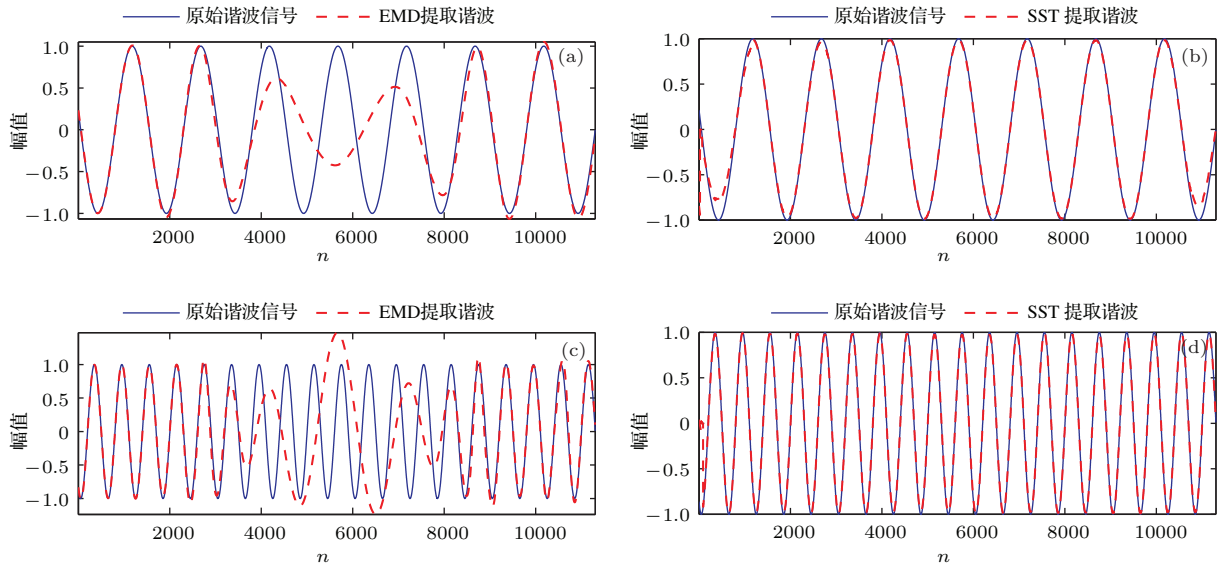


图 4 $NL = 40\%$ 时谐波信号的提取 (a) $\sin(0.3t)$ 的 EMD 提取结果; (b) $\sin(0.3t)$ 的 SST 提取结果; (c) $\sin(0.5t)$ 的 EMD 提取结果; (d) $\sin(0.5t)$ 的 SST 提取结果

Fig. 4. The harmonic extraction results of the $NL = 40\%$: (a) the extracting results of $\sin(0.3t)$ by EMD; (b) the extracting results of $\sin(0.3t)$ by SST; (c) the extracting results of $\sin(0.5t)$ by EMD; (d) the extracting results of $\sin(0.5t)$ by SST.

表 2 不同噪声水平时提取谐波与原谐波的相关系数

Table 2. The correlation coefficients of the extracted harmonic and original harmonic with different noise intensity.

噪声水平/ $NL\%$	EMD 谐波提取相关系数 (Corr)		SST 谐波提取相关系数 (Corr)	
	谐波信号 1	谐波信号 2	谐波信号 1	谐波信号 2
40	0.8541	0.7350	0.9323	0.9383
60	0.8350	0.6867	0.9321	0.9381
80	0.6367	0.6418	0.9318	0.9375
100	0.6048	0.5597	0.9316	0.9376
120	0.5173	0.4925	0.9112	0.9250

不断改变噪声水平 NL , 观察两种方法的谐波提取效果, 并计算抽取的谐波与原谐波间的相关系数, 结果如表 2 所列. 由表 2 可以看出, EMD 方法提取的谐波与原谐波的相关系数随着噪声水平的增加而显著减小, 表明随着信号中噪声强度的增大, EMD 方法在提取谐波信号时越来越难. 当噪声水平达到 80% 时, EMD 所提取的谐波与原谐波信号的相关系数分别为 0.6367 和 0.6418, 表明此时提取的谐波已经严重失真. 观察 SST 所提取的谐波与原谐波的相关系数可以发现, 随着噪声水平的增加, SST 提取的谐波的相关系数也呈下降趋势, 但噪声水平在 120% 以内时相关系数相差不大, 仍可获得较好的提取效果. 综合图 4 和表 2 中的实验结果可知, SST 方法具有较好的抗噪声能力, 在一定的噪声强度内, 仍可获得较高的谐波提取精度.

5 结 论

本文基于同步挤压小波理论, 对混沌干扰下的多谐波信号提取问题进行了研究, 提出了一种基于 SST 的混沌干扰和噪声影响背景下的多个谐波信号的提取方法. 本文所提出的方法实现简单, 且对谐波信号间的频率间隔及噪声强度都具有较好的鲁棒性. 在实验中, 利用所提方法分别对 Duffing 混沌干扰下具有不同频率分布以及含有不同噪声强度的复杂信号进行了谐波抽取, 并与经典的 EMD 方法进行了对比. 实验结果表明, 本文方法明显优于 EMD 方法: 对于不同频率间隔的多个谐波信号, 本文方法都可有效地逐一提取出; 而且当噪声强度在一定范围内时, 所提方法对混沌干扰下的多个谐波分量也可进行有效的提取. 本文方法在混沌背景下的谐波提取中具有较好的实用价值.

参考文献

- [1] Wang W B, Zhang X D, Wang X L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 069701 (in Chinese) [王文波, 张晓东, 汪祥莉 2013 物理学报 **62** 069701]
- [2] Lu K, Wang F Z, Zhang G L, Fu W H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120202
- [3] Li T Z, Wang Y, Luo M K 2013 *Chin. Phys. B* **22** 080501
- [4] Lu S X, Wang Z S, Hu Z H, Feng J C 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010506
- [5] Xing H Y, Cheng Y Y, Xu W 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 100506 (in Chinese) [行鸿彦, 程艳燕, 徐伟 2012 物理学报 **61** 100506]
- [6] Leung H, Huang X P 1996 *IEEE Trans. Sign. Process.* **44** 2456
- [7] Haykin S, Li X B 1995 *Proc. IEEE* **83** 94
- [8] Stark J, Arumugav B 1992 *Int. J. Bifurc. Chaos* **2** 413
- [9] Wang F P, Guo J B, Wang Z J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1019 (in Chinese) [汪芙平, 郭静波, 王赞基 2001 物理学报 **50** 1019]
- [10] Huang N E, Shen Z, Long S R 1998 *Proc. Roy. Soc. London A* **454** 903
- [11] Wang G G, Wang S X 2006 *J. Jilin Univ. (Sci. Ed.)* **44** 439 (in Chinese) [王国光, 王树勋 2006 吉林大学学报(理学版) **44** 439]
- [12] Li H G, Meng G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2069 (in Chinese) [李鸿光, 孟光 2004 物理学报 **53** 2069]
- [13] Wang E F, Wang D Q, Ding Q 2011 *J. Commun.* **32** 60 (in Chinese) [王尔馥, 王冬青, 丁群 2011 通信学报 **32** 60]
- [14] Wang E F, Wang D Q 2012 *J. Engineer. Heilongjiang Univ.* **3** 105 (in Chinese) [王尔馥, 王冬青 2012 黑龙江大学学报工程学报 **3** 105]
- [15] Chen G D, Wang Z C 2012 *Mech. Syst. Sign. Process.* **28** 259
- [16] Liu J L, Ren W X, Wang Z C, Hu Y D 2013 *J. Vib. Shock* **32** 37 (in Chinese) [刘景良, 任伟新, 王佐材, 胡异丁 2013 振动与冲击 **32** 37]
- [17] Daubechies I, Lu J F, Wu H T 2011 *Appl. Computat. Harmon. Anal.* **2** 243
- [18] Wu H T 2013 *Appl. Computat. Harmon. Anal.* **35** 181
- [19] Gaurav T, Eugene B, Neven S F, Wu H T 2012 *Sign. Process.* **93** 1079
- [20] Sylvain M, Thomas O, Stephen M 2012 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 5787

Harmonic signal extraction from chaotic interference based on synchrosqueezed wavelet transform*

Wang Xiang-Li^{1)2)†} Wang Bin³⁾ Wang Wen-Bo⁴⁾ Yu Min³⁾⁴⁾
Wang Zhen³⁾ Chang Yu-Chan⁵⁾

1) (School of Computer Science and Technology, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China)

2) (State Key Laboratory of Satellite Ocean Environment Dynamics, Second Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Hangzhou 310012, China)

3) (School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

4) (School of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

5) (School of Finance, Renmin University of China, Beijing 100872, China)

(Received 31 August 2014; revised manuscript received 25 December 2014)

Abstract

Extracting the harmonic signal from the chaotic interference background is very important for theory and practical application. The wavelet transform and empirical mode decomposition (EMD) have been widely applied to harmonic extraction from chaotic interference, but because the wavelet and EMD both present the mode mixing and are sensitive to noise, the harmonic signal often cannot be precisely separated out. The synchrosqueezing wavelet transform (SST) is based on the continuous wavelet transform, through compressing the time-frequency map of wavelet transform in the frequency domain, the highly accurate time-frequency curve is obtained. The time-frequency curve of SST which does not exist between cross terms, can better improve the mode mixing. The SST has also good robustness against noise. When the signal is a mixed strong noise, the SST can still obtain the clear time-frequency curve and approximate invariant decomposition results. In this paper, the SST is applied to the multiple harmonic signal extraction from chaotic interference background, and a new harmonic extracting method is proposed based on the SST. First, the signal obtained by mixing chaotic and harmonic signals is decomposed into intrinsic mode type function (IMTF) by the SST. Then using the Hilbert transform the frequency of each IMTF is analyzed, and the harmonic signals are separated from the mixed signal. Selecting the Duffing signal as the chaotic interference signal, the extracting ability of the proposed method for multiple harmonic signals is analyzed. The different harmonic extraction experiments are conducted by using the proposed SST method for different frequency intervals and different noise intensity multiple harmonic signals. And the experimental results are compared with those from the classical EMD method. When the chaotic interference signal is not contained by noise, the harmonic signal extraction effect is seriously affected by the frequency interval between harmonic signals. If the harmonic frequency interval between harmonic signals is relatively narrow, each harmonic signal cannot be accurately extracted by the EMD method. However, the harmonic extraction precision of SST method is not seriously influenced by the change of harmonic frequency interval, and when the frequency interval between harmonic signals is small the SST method can still accurately extract each harmonic signal from chaotic interference. When the noise contains a chaotic interference signal, the harmonic extraction effect of EMD method significantly decreases with

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11201354), Foundation of State Key Laboratory of Satellite Ocean Environment Dynamics, China (Grant No. SOED1405), the Foundation of Hubei Province Key Laboratory of Metallurgical Industry Process System Science, China (Grant No. Z201303).

† Corresponding author. E-mail: wwb0178@163.com

noise intensity increasing. When the noise level reaches 80%, the extracted harmonic signal from the EMD method is seriously distorted, the correlation coefficient of the extracted harmonic signal with original harmonic signal is only about 0.6. With the increase of noise intensity, the harmonic extraction effect of SST method has also a declining trend. But as the noise intensity is within 120%, the harmonic extraction effect of SST method does not greatly change and the extracted harmonic signal precision is still higher, which shows that the harmonic extraction method based on the SST has good robustness against noise. The comprehensive experimental results show that the proposed SST method has high extracting precision for multiple harmonic signals of different frequency intervals, and the SST method has better robustness against Gauss white noise. The extracted results of harmonic signal are better than those from the classical empirical mode decomposition method.

Keywords: synchrosqueezed wavelet transform, chaotic interference, extraction of harmonics

PACS: 02.30.Nw, 31.70.Hq

DOI: [10.7498/aps.64.100201](https://doi.org/10.7498/aps.64.100201)