

标准线性固体材料中球面应力波传播特征研究

卢强 王占江

Characteristics of spherical stress wave propagation in the standard linear solid material

Lu Qiang Wang Zhan-Jiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 108301 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.108301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.108301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I10>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于 FDFD 方法研究含石墨烯薄膜太阳能电池的电磁特性

Study on the electromagnetic properties of thin-film solar cell grown with graphene using FDFD method

物理学报.2015, 64(1): 018101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.018101>

氮氢共掺杂金刚石中氢的典型红外特征峰的特征

Characterization of typical infrared characteristic peaks of hydrogen in nitrogen and hydrogen co-doped diamond crystals

物理学报.2014, 63(4): 048101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.048101>

双钨极耦合电弧数值模拟

Numerical simulation of coupled arc in double electrode tungsten inert gas welding

物理学报.2013, 62(22): 228101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.228101>

极薄宽角度平面超材料吸波体仿真与实验验证

Simulation and experiment demonstration of an ultra-thin wide-angle planar metamaterial absorber

物理学报.2013, 62(20): 208103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.208103>

喷射成形 FGH4095 的热变形特征

Hot deformation behavior of spray formed FGH4095

物理学报.2012, 61(21): 218102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.218102>

标准线性固体材料中球面应力波传播特征研究*

卢强¹⁾²⁾ 王占江^{2)†}

1) (西安交通大学航天学院, 机械强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

2) (西北核技术研究所, 西安 710024)

(2014年11月9日收到; 2014年12月5日收到修改稿)

基于标准线性固体模型, 结合球面波波动方程, 给出了球面应力波的粒子速度 v 、粒子位移 u 、径向应力 σ_r 、切向应力 σ_θ 、径向应变 ε_r 、切向应变 ε_θ 、折合速度势、折合位移势在 Laplace 域的理论解. 采用基于 Crump 算法的 Laplace 数值逆变换方法分析了上述物理量的传播特征. Laplace 数值反演结果表明, 线黏弹性材料对强间断球面应力波的初始响应为纯弹性响应, 强间断在传播过程中包含了几何衰减和本构黏性衰减, 应力、应变、粒子速度的衰减特性和粒子位移、应力、应变、折合位移势等物理量的稳态值同黏弹性球面波的理论预测一致. 折合速度势和折合位移势的峰值随波传播距离的增加逐渐衰减, 这与理想弹性理论给出的折合速度势和折合位移势不随传播距离变化的结论不同. 折合位移势的稳态值与介质的静态剪切模量成反比, 与稳态空腔压力成正比, 与空腔半径的三次方成正比.

关键词: 爆炸力学, 球面应力波, 标准线性固体模型, Laplace 逆变换

PACS: 83.60.Bc, 83.10.Gr, 81.40.Jj

DOI: 10.7498/aps.64.108301

1 引言

固体介质中的球面应力波传播理论对于研究地下爆炸的震源特征、应力波的传播演化规律、固体介质的本构关系等具有重要作用. 基于弹塑性^[1-4]、弹黏塑性^[5-7], Maxwell 体^[8] 和 Kelvin-Voigt 体^[9] 黏弹性、线性和非线性 ZWT 等^[10-14] 本构方程, 多位作者采用理论推演、有限差分或特征线方法等对球面应力波的传播特征进行了分析, 进一步完善了球面波传播理论. 杜启振等^[15,16] 对线黏弹性各向异性介质中地震波的传播进行了分析, 给出了地震波速度频散和衰减特征, 并研究了各向异性黏弹性介质中地震波的伪谱法波场数值模拟方法, 发展了各向异性黏弹性波的计算方法. Feng 等^[17] 研究了包含圆柱微孔的黏弹性介质中非线性波动问题. Yao 等^[18] 利用正入射超声波提出了薄膜层黏弹性参数的确定方法.

本文从线黏弹性角度出发, 结合球面波波动方

程, 给出线黏弹性球面波 Laplace 域的理论解. 考虑介质线黏弹性后, 球面波 Laplace 域的理论解较为复杂, 很难实现 Laplace 域理论解直接反演为时域解析解, 因此本文采用 Crump 算法对 Laplace 域理论解进行了数值反演, 给出了相关物理量时域的数值解. 在此基础上, 本文以球面波加载下黄土中应力波传播为例^[12], 重点讨论了在强间断球面波加载下, 考虑介质黏弹性力学特性时粒子速度、粒子位移、应力、应变等物理量的传播演化规律, 同时对在介质封闭空腔爆炸导致的稳态压力作用下远区介质中的永久变形进行分析, 指出了地震中常用的折合速度势、折合位移势在黏弹性材料和理想弹性材料中传播特征的差别.

2 标准线性固体材料中球面波的 Laplace 解

标准线性固体模型如图 1 所示^[11-14], 可表示为

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172244) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangzhanjiang@nint.ac.cn

$$\sigma = E_a \varepsilon + E_M \int_0^t \dot{\varepsilon} e^{-\frac{t-\tau}{\theta_M}} d\tau. \quad (1)$$

令体积模量 $K = \frac{E_a + E_M}{3(1 - 2\mu)}$, 瞬时剪切模量 $G = \frac{E_a + E_M}{2(1 + \mu)}$, 弹性元件剪切模量 $G_a = \frac{E_a}{2(1 + \mu)}$, Maxwell体剪切模量 $G_M = G - G_a$, 标准线性固体模型弹性模量 $E = E_a + E_M$, 松弛时间 $\theta_M = \frac{\eta_M}{E_M}$, η_M 为 Maxwell 体的黏性系数, μ 为泊松比, 假定 μ 为常值. 则球对称问题下标准线性固体容变律及畸变律的率形式可以写为^[11]

$$\dot{\sigma}_r + 2\dot{\sigma}_\theta = 3K(\dot{\varepsilon}_r + 2\dot{\varepsilon}_\theta), \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta = 2G(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta) - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta - 2G_a(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}{\theta_M}. \quad (3)$$

上述公式中, 点上标表示对应物理量的时间变化率; r, θ 下标为对应物理的径向和切向分量; σ, ε 分别表示应力和应变.

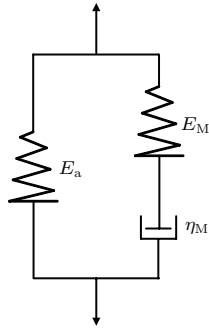


图 1 标准线性固体模型

Fig. 1. The standard linear solid model.

若 $\theta_M = \infty$, (1) 式可写为 $\sigma = (E_a + E_M)\varepsilon$, 则 (1) 式退化为理想弹性本构关系. 同理可知 (2) 和 (3) 式分别表征的是理想弹性材料的容变律和畸变律.

卢强等^[11] 基于线黏弹性 ZWT 本构关系 (对于 1—100 μs 时间尺度的冲击加载, 简化后的 ZWT 模型与标准固体模型一致) 给出球面波波动方程:

$$\begin{aligned} & \left(K + \frac{4}{3}G \right) \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u \right)}{\partial t} \right] \theta_M \\ & + \left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u \right) \\ & - \rho_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \theta_M - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, u 表示径向位移变量, r 为半径, t 为时间. 定义 $u = \partial \left(\frac{\psi}{r} \right) / \partial r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \psi$ (ψ 与弹性波理论中折合位移势 (reduced displacement potential, RDP) 定义相同, 则能够得到以折合位移势 ψ 表示的波动方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho_0 \theta_M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \\ & + \left[\left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

对满足 Laplace 变换的函数 $f(t)$, 其 Laplace 变换可以写为

$$\bar{f}(s) = L[f] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (6)$$

式中的横杠上标表示相应函数的 Laplace 变换, s 为 Laplace 变量, L 为 Laplace 变换算符. 对 (5) 式进行 Laplace 变换, 能够得到

$$\frac{d^2 \bar{\psi}(s, r)}{dr^2} = \frac{(\theta_M s + 1) s^2}{(\theta_M s + \lambda) C_H^2} \bar{\psi}(s, r), \quad (7)$$

上式中 $C_H = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho_0}}$, $\lambda = \frac{K + \frac{4}{3}G_a}{K + \frac{4}{3}G}$. 令

$$\beta(s) = \sqrt{\frac{(\theta_M s + 1) s}{(\theta_M s + \lambda) C_H}}, \text{ 则 (7) 式可写为}$$

$$\frac{d^2 \bar{\psi}(s, r)}{dr^2} = \beta^2(s) \bar{\psi}(s, r). \quad (8)$$

可以看出, 上式为关于变量 r 的二阶微分方程, 能够直接给出:

$$\bar{\psi}(s, r) = \bar{A}(s) e^{-\beta(s)r} + \bar{B}(s) e^{\beta(s)r}, \quad (9)$$

其中 $\bar{A}(s)$ 与 $\bar{B}(s)$ 分别表示正向和负向传播的折合位移势 $\psi(t, r)$ 在 $r = 0$ 位置的 Laplace 变换. 若不考虑负向传播球面应力波的影响, 则 (9) 式退化为

$$\bar{\psi}(s, r) = \bar{A}(s) e^{-\beta(s)r}. \quad (10)$$

通过 (2) 和 (3) 式可给出径向应力 σ_r 在标准线性固体模型中的表达式:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r = & K(\dot{\varepsilon}_r + 2\dot{\varepsilon}_\theta) + \frac{4}{3}G(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta) \\ & - \frac{[\sigma_r - K(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta)] - \frac{4}{3}G_a(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}{\theta_M}. \end{aligned} \quad (11)$$

利用以下参量的 Laplace 变换表达式:

$$\begin{cases} \bar{u}(s, r) = L[u] = -\left[\frac{1}{r}\beta(s) + \frac{1}{r^2}\right]\bar{\psi}(s, r), \\ \bar{\varepsilon}_r(s, r) = L[\varepsilon_r] = L\left[\frac{\partial u}{\partial r}\right] = \left[\frac{1}{r}\beta^2(s) + \frac{2}{r^2}\beta(s) + \frac{2}{r^3}\right]\bar{\psi}(s, r), \\ \bar{\varepsilon}_\theta(s, r) = L[\varepsilon_\theta] = L\left[\frac{u}{r}\right] = -\left[\frac{1}{r^2}\beta(s) + \frac{1}{r^3}\right]\bar{\psi}(s, r), \\ \bar{\dot{\varepsilon}}_r(s, r) = L[\dot{\varepsilon}_r] = L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r}\right] = \left[\frac{1}{r}\beta^2(s) + \frac{2}{r^2}\beta(s) + \frac{2}{r^3}\right]s\bar{\psi}(s, r), \\ \bar{\dot{\varepsilon}}_\theta(s, r) = L[\dot{\varepsilon}_\theta] = L\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = -\left[\frac{1}{r^2}\beta(s) + \frac{1}{r^3}\right]s\bar{\psi}(s, r). \end{cases} \quad (12)$$

把(12)式代入(11)式, 则可得到径向应力 σ_r 与折合位移势 ψ 的关系:

$$\bar{\psi}(s, r) = \frac{rL[\sigma_r](\theta_M s + 1)}{\left[\left(K + \frac{4}{3}G\right)\theta_M s + \left(K + \frac{4}{3}G_a\right)\right]\beta^2(s) + \frac{1}{r}[4G\theta_M s + 4G_a]\beta(s) + \frac{1}{r^2}[4G\theta_M s + 4G_a]}. \quad (13)$$

$\bar{\psi}(s, r)$ 在球腔边界 r_0 处上满足(13)式和(10)式, 则可得到 $\bar{\psi}(s, r)$ 的表达式:

$$\bar{\psi}(s, r) = \frac{r_0 L[\sigma_{r_0}](\theta_M s + 1)}{\left[\left(K + \frac{4}{3}G\right)\theta_M s + \left(K + \frac{4}{3}G_a\right)\right]\beta^2(s) + \frac{1}{r_0}[4G\theta_M s + 4G_a]\beta(s) + \frac{1}{r_0^2}[4G\theta_M s + 4G_a]} \times e^{-\beta(s)(r-r_0)}, \quad (14)$$

上式中 $L[\sigma_{r_0}]$ 表示球腔边界 r_0 处径向应力 σ_r 的 Laplace 变换.

若定义速度变量 $v = \partial\left(\frac{\gamma}{r}\right)/\partial r = \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\gamma$, γ 和弹性波理论中折合速度势 (reduced velocity potential, RVP) 定义相同, 则可知:

$$\bar{\gamma}(s, r) = s\bar{\psi}(s, r). \quad (15)$$

上面通过 Laplace 变换, 给出了折合位移势 ψ 与球腔边界 r_0 处的径向加载应力 σ_r 之间的关系. 下面结合 $\sigma_{r_0} = -(\sigma_0 e^{-t/t_0} + \sigma_{0s})$ ($\sigma_0 + \sigma_{0s}$ 为初始压力峰值, σ_{0s} 为稳态空腔压力, t_0 为压力的延迟时间, 假定压应力为负) 类型的球腔边界径向加载应力形式讨论应力、应变、折合速度势、折合位移势等物理量的性质.

3 线黏弹性球面波 Laplace 解的讨论

通过上述分析, 给出了如(14)式所示的折合位移势在 Laplace 域的表达式. 利用 Laplace 变换的终值定理^[19]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{f}(s) \quad (16)$$

可知(14)式给出的黏弹性介质中折合位移势稳态值 ψ_∞ 可以表示为

$$\psi_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0^3}{4G_e} s\bar{\sigma}_{r_0}(s) = -\frac{\sigma_{0s}r_0^3}{4G_e}, \quad (17)$$

上式中, 当 $\theta_M = \infty$ 时, 为理想弹性问题; $G_e = G$, 当 $\theta_M \neq \infty$ 时, 为线黏弹性问题, $G_e = G_a$.

同样, 通过终值定理能够得出:

$$\begin{cases} u_\infty(r) = -\frac{\psi_\infty(r)}{r^2} = \frac{\sigma_{0s}r_0^3}{4G_e r^2}, \\ \varepsilon_{r\infty}(r) = \frac{2\psi_\infty(r)}{r^3} = -\frac{\sigma_{0s}r_0^3}{2G_e r^3}, \\ \varepsilon_{\theta\infty}(r) = -\frac{\psi_\infty(r)}{r^3} = \frac{\sigma_{0s}r_0^3}{4G_e r^3}, \\ \sigma_{r\infty}(r) = 4G_e \frac{\psi_\infty(r)}{r^3} = -\frac{\sigma_{0s}r_0^3}{r^3}, \\ \sigma_{\theta\infty}(r) = -2G_e \frac{\psi_\infty(r)}{r^3} = \frac{\sigma_{0s}r_0^3}{2r^3}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\infty}(r) = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\infty}(r) = 0, \\ \gamma_\infty(r) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

储存在介质里总的稳态弹性应变能 $K_{s\infty}$ 可表示为

$$K_{s\infty} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{2}(\sigma_{r\infty}\varepsilon_{r\infty} + 2\sigma_{\theta\infty}\varepsilon_{\theta\infty})4\pi r^2 dr. \quad (19)$$

把(18)式的结果代入上式, 则有

$$K_{s\infty} = 8\pi G_e \frac{\psi_\infty^2}{r_0^3} = \frac{\pi\sigma_{0s}^2 r_0^3}{2G_e}. \quad (20)$$

从(18)式和(20)式可以看出, 折合位移势稳态值 ψ_∞ 、稳态位移 $u_\infty(r)$ 、稳态径向应变值 $\varepsilon_{r\infty}(r)$ 、稳态切向应变值 $\varepsilon_{\theta\infty}(r)$ 、稳态弹性应变能 $K_{s\infty}$ 等与材料的剪切模量 G_e 成反比, 稳态径向应力值 $\sigma_{r\infty}(r)$ 、稳态切向应力值 $\sigma_{\theta\infty}(r)$ 与材料特性没有关系, 只与边界条件及位置相关. 这里需要指出的是理想线弹性理论给出的结果同线黏弹性理论给出的上述结果表达形式一致, 但在涉及与材料性质相关的物理量时, 需把 G_e 分开讨论, 理想线弹性条件下 $G_e = G$, 线黏弹性条件下 $G_e = G_a$. 另外稳态体积应变 $\varepsilon_{V\infty} = \varepsilon_{r\infty} + 2\varepsilon_{\theta\infty}$ 为零, 这说明储存在介质里的稳态弹性应变能主要为介质的畸变能, (20)式给出的稳态弹性应变能 $K_{s\infty}$ 的表达形式也说明了这一点.

利用 Laplace 变换的初值定理^[19]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s). \quad (21)$$

则能够得到球腔边界处的位移、速度、应变、应力、应变率等初始参数如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(r_0) = 0, \\ v_0(r_0) = \frac{\sigma_0 + \sigma_{0s}}{\rho_0 C_H}, \\ \varepsilon_{r0}(r_0) = -\frac{\sigma_0 + \sigma_{0s}}{\rho_0 C_H^2}, \\ \varepsilon_{\theta0}(r_0) = 0, \\ \sigma_{r0}(r_0) = -(\sigma_0 + \sigma_{0s}), \\ \sigma_{\theta0}(r_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3K}{\rho_0 C_H^2} \right) (\sigma_0 + \sigma_{0s}), \\ \dot{\varepsilon}_{r0}(r_0) = \infty, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta0}(r_0) = \frac{\sigma_0 + \sigma_{0s}}{\rho_0 C_H r_0}. \end{array} \right. \quad (22)$$

明显地, 在空腔边界上初始位移和初始切向应变为零. 这里重点看初始速度 $v_0(r_0)$ 、初始径向应变 $\varepsilon_{r0}(r_0)$ 以及初始径向应力 $\sigma_{r0}(r_0)$ 之间的关系, 简单地可以给出:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(r_0) = \frac{\sigma_0 + \sigma_{0s}}{\rho_0 C_H} = -C_H \frac{-(\sigma_0 + \sigma_{0s})}{\rho_0 C_H^2} \\ = -C_H \varepsilon_{r0}(r_0), \\ \sigma_{r0}(r_0) = -(\sigma_0 + \sigma_{0s}) = -\rho_0 C_H \frac{\sigma_0 + \sigma_{0s}}{\rho_0 C_H} \\ = -\rho_0 C_H v_0(r_0). \end{array} \right. \quad (23)$$

可以看出, 上式表征的实际上是强间断相容性关系, 且初始强间断的传播速度为 C_H , 这对应高频

球面波在介质中的传播速度. 另外, 从初始径向应力 $\sigma_{r0}(r_0)$ 和切向应力 $\sigma_{\theta0}(r_0)$ 的表达式可以看出, $\sigma_{r0}(r_0)$ 和 $\sigma_{\theta0}(r_0)$ 是同号的, 即当径向应力为压应力时, 切向应力必为压应力(当 $\mu \in [0, 0.5]$, $K/G \geq 2/3$ 即得上述结论), 这与稳态时径向应力 $\sigma_{r\infty}(r_0)$ 和切向应力 $\sigma_{\theta\infty}(r_0)$ 是异号的特征不同.

上面通过 Laplace 变化的终值和初值定理讨论了折合位移势、位移、速度、应力、应变等物理量的稳态值和空腔边界初始值问题. 下面以黏性黄土为例, 通过对上述 Laplace 解进行数值反演分析黄土中应力波传播过程中各物理量的时程变化.

4 黄土中强间断线黏弹性球面波传播特征分析

基于 Crump 提出的 Fourier 级数法对球面波的 Laplace 解进行反演^[20]. 本文以卢强等^[12]给出的黄土黏弹性参数作为示例(如表 1 所示), 讨论线黏弹性球面波传播过程中不同物理量的演变特征. 取空腔半径为 25 mm, 球腔边界压力为 $\sigma_{r0} = -(e^{-t/t_0} + 1)$ MPa, $t_0 = \theta_M$, 计算区域为 25—100 mm.

图 2 和图 3 给出了黄土中粒子速度和粒子位移曲线. 从理论上能够给出粒子速度强间断满足

$$v = \frac{v_{\max} r_0 e^{-\alpha(r-r_0)}}{r},$$

球腔边界上的粒子速度强间断幅值可以通过

$$v_{\max} = v_0(r_0) = \frac{\sigma_0 + \sigma_{0s}}{\rho_0 C_H}$$

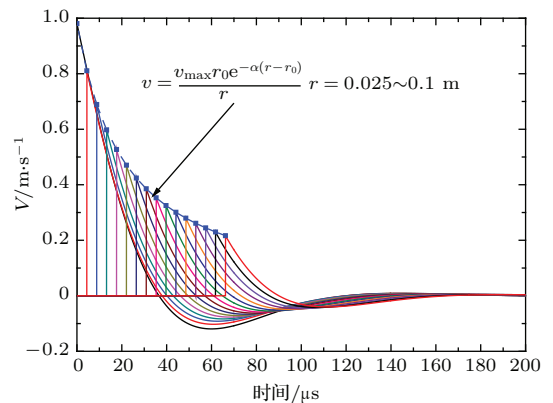


图 2 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波粒子速度
Fig. 2. (color online) The particle velocity of linear viscoelastic waves in loess.

表1 黄土标准线性固体模型及相关参数

Table 1. The parameters of the standard linear solid model for loess.

密度 ρ_0 /kg·m ⁻³	弹性模量 E /GPa	瞬态剪切模量 G /GPa	静态剪切模量 G_a /GPa	松弛时间 θ_M /μs	泊松比 μ	衰减因子 α /m ⁻¹
1800	1.93	0.77	0.64	21.0	0.25	1.58

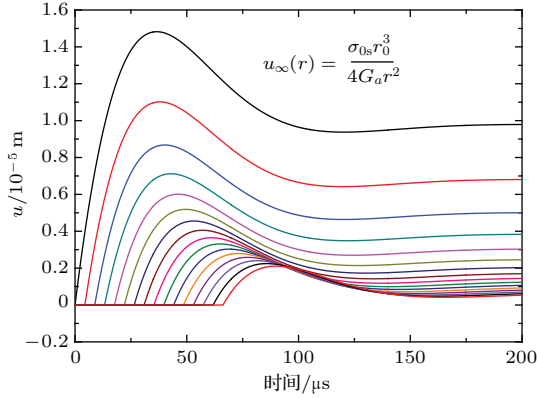


图3 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波粒子位移
Fig. 3. (color online) The particle displacement of linear viscoelastic waves in loess.

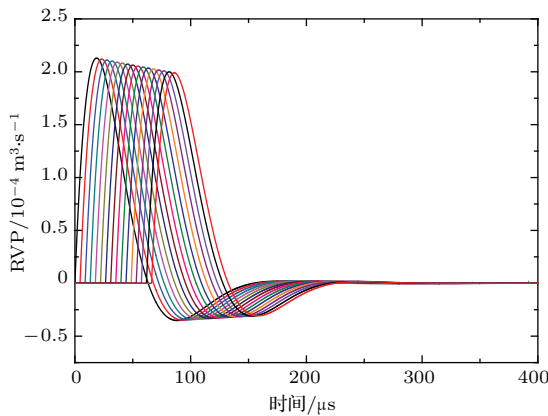


图4 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波折合速度势
Fig. 4. (color online) The RVP of linear viscoelastic waves in loess.

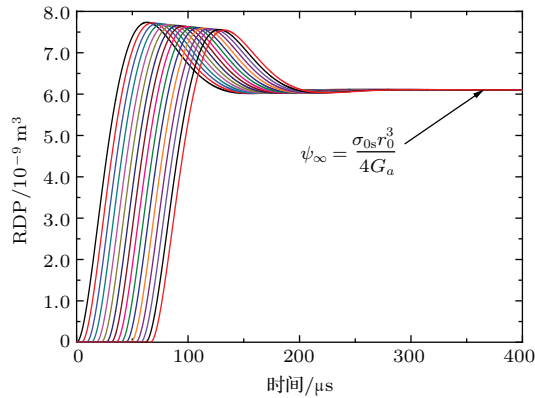


图5 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波折合位移势
Fig. 5. (color online) The RDP of linear viscoelastic waves in loess.

求出, 按上述公式计算的结果与 Laplace 数值反演结果一致, 这说明本文采用的 Laplace 数值反演算法是正确的. 下面采用同样的算法能够给出如图 4 和图 5 所示的折合速度势、折合位移势. 从图 4 可以看出, 折合速度势的峰值有随着爆心距增加而减小的趋势 (理想弹性介质中的折合速度势峰值和形状均不变化), 这是介质黏性的作用. 另一方面, 当时间趋于无穷大时, 线黏弹性材料中折合速度势趋于零, 这一点与理想弹性介质中的折合速度势一致. 从图 5 可以看出, 折合位移势的峰值同样有随着爆心距增加而减小的趋势 (理想弹性介质中的折合位移势峰值和形状均不变化). 当时间趋于无穷大时, 线黏弹性材料中折合位移势趋于常值 $\psi_\infty = \frac{\sigma_{0s} r_0^3}{4G_a}$.

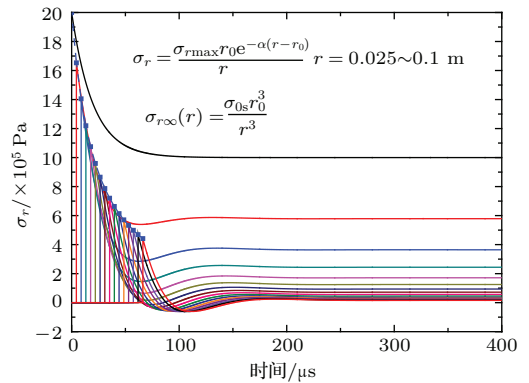


图6 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波径向应力
Fig. 6. (color online) The radial stress of linear viscoelastic waves in loess.

前面进行了粒子速度、位移以及折合速度势、折合位移势的讨论, 下面讨论线黏弹性材料中应力应变的演变. 需指出, 这里假定压应力为正, 压应变为正. 图 6 给出了黄土中线黏弹性球面波径向应力曲线 σ_r , 空腔边界上的径向应力是指数衰减形式的加载压力, 其稳定值为 1 MPa, 峰值为 2 MPa, 明显地, 计算结果与实际的边界条件一致. 随着黏弹性应力波的传播, 径向应力强间断幅值按 $\sigma_r = \sigma_{r \max} r_0 e^{-\alpha(r-r_0)} / r$ 衰减 ($\sigma_{r \max} = \sigma_0 + \sigma_{0s}$). 可以看出, 应力强间断幅值和速度强间断幅值的衰

减规律是一致的,造成这种衰减的原因是球面波的几何衰减($1/r$ 代表几何衰减)和线黏弹性材料的本构衰减($e^{-\alpha(r-r_0)}$ 代表本构衰减)的联合作用.另外,从图6还可以看出,随着爆心距的增加,径向应力出现负向的拉应力,当时间趋于无穷大时,稳态径向应力趋于恒值,且满足 $\sigma_{r\infty}(r) = \sigma_{0s}r_0^3/r^3$,明显地,稳态径向应力是压应力.图7给出了黄土中线黏弹性球面波径向应力曲线 σ_θ ,切向应力间断幅值按 $\sigma_\theta = \sigma_{\theta\max}r_0 e^{-\alpha(r-r_0)}/r$ 衰减

$$\sigma_{\theta\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{3K}{\rho_0 C_H^2} - 1 \right) (\sigma_0 + \sigma_{0s}).$$

可以看出,切向应力 σ_θ 和径向应力 σ_r 在间断处同为压应力,但切向应力 σ_θ 很快地演变为拉应力.当时间趋于无穷大时,稳态切向应力趋于恒值,且满足 $\sigma_{\theta\infty}(r) = -\sigma_{0s}r_0^3/(2r^3)$.关于径向应变 ε_r 及切向应变 ε_θ 的变化特征不多做分析,只给出其变化曲线,如图8和图9所示.

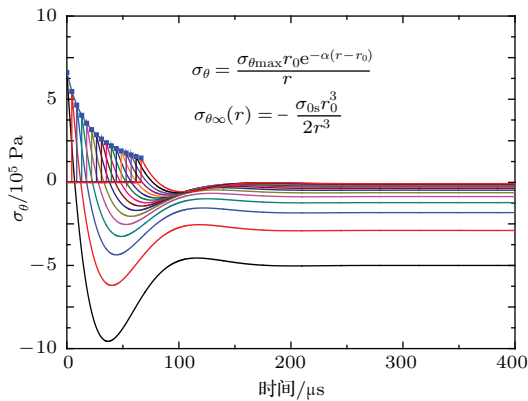


图7 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波切向应力
Fig. 7. (color online) The tangential stress of linear viscoelastic waves in loess.

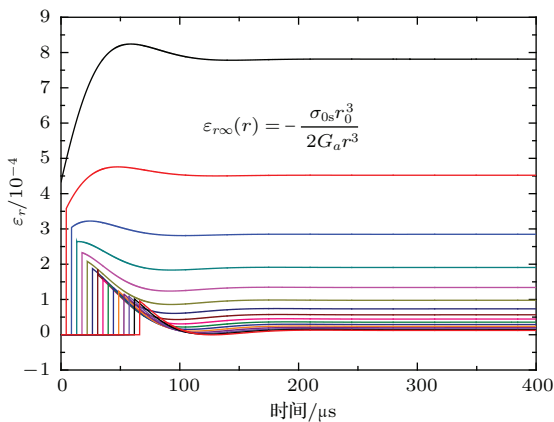


图8 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波径向应变
Fig. 8. (color online) The radial strain of linear viscoelastic waves in loess.

从上述计算结果看,各物理量的变化特征与理论分析结果一致,证明了基于Laplace数值逆变换方法研究黏弹性球面应力波传播演化的可行性.

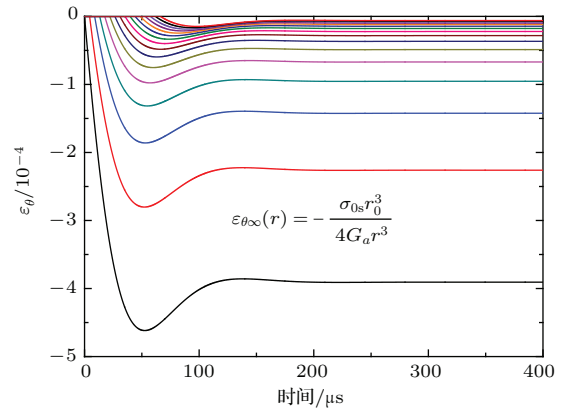


图9 (网刊彩色) 黄土中线黏弹性波切向应变
Fig. 9. (color online) The tangential stress of linear viscoelastic waves in loess.

5 结 论

本文从理论分析和Laplace解数值反演的角度分析了线黏弹性球面波的传播特征.从计算结果和理论分析的对比看,反演结果与理论分析结果一致.由上述分析,可得出如下结论:

- 1) 基于Crump算法的Laplace数值逆变换方法对于黏弹性球面应力波传播演化的数值求解是可靠的,可以方便地给出不同位置折合速度势、折合位移势、速度、位移、应力、应变等物理量的变化曲线,也可以方便地给出不同时间上述物理量的空间分布;
- 2) 考虑介质的黏弹性后,折合位移势稳态值 ψ_∞ 、稳态位移 $u_\infty(r)$ 、稳态径向应变值 $\varepsilon_{r\infty}(r)$ 、稳态切向应变值 $\varepsilon_{\theta\infty}(r)$ 等与标准线性固体材料弹性元件的静态剪切模量 G_a 成反比、空腔稳态压力 σ_{0s} 成正比、空腔半径 r_0 的三次方 r_0^3 成正比;
- 3) 稳态径向应力值 $\sigma_{r\infty}(r)$ 、稳态切向应力值 $\sigma_{\theta\infty}(r)$ 与空腔稳态压力 σ_{0s} 、空腔半径 r_0 的三次方 r_0^3 成正比,与介质特性无关;
- 4) 折合速度势和折合位移势的峰值在波传播过程中逐渐衰减,这与理想弹性理论给出的折合速度势和折合位移势不随传播距离变化的结论不同.

参考文献

[1] Garg S K 1968 *J. Appl. Math. Phys.* **19** 243

- [2] Garg S K 1968 *J. Appl. Math. Phys.* **19** 778
- [3] Li X L 2000 *Explosion and Shock Waves* **20** 186 (in Chinese) [李孝兰 2000 爆炸与冲击 **20** 186]
- [4] Li X L 2000 *Explosion and Shock Waves* **20** 283 (in Chinese) [李孝兰 2000 爆炸与冲击 **20** 283]
- [5] Perzyna P 1963 *J. Appl. Math. Phys.* **14** 241
- [6] Zabinski M P, Phillips A 1974 *Acta Mech.* **20** 153
- [7] Phillips A, Zabinski M P 1972 *Ingenieur. Archiv.* **41** 367
- [8] Koshelev E A 1988 *Soviet Mining* **24** 541
- [9] Banerjee S, Roychoudhuri S K 1995 *Comput. Math. Appl.* **30** 91
- [10] Wang L L, Lai H W, Wang Z J, Yang L M 2013 *Int. J. Impact Eng.* **55** 1
- [11] Lu Q, Wang Z J, Wang L L, Lai H W, Yang L M 2013 *Explosion and Shock Waves* **33** 463 (in Chinese) [卢强, 王占江, 王礼立, 赖华伟, 杨黎明 2013 爆炸与冲击 **33** 463]
- [12] Lu Q, Wang Z J, Li J, Guo Z Y, Men C J 2012 *Rock Soil Mech.* **33** 3292 (in Chinese) [卢强, 王占江, 李进, 郭志昫, 门朝举 2012 岩土力学 **33** 3292]
- [13] Lai H W, Wang Z J, Yang L M, Wang L L 2013 *Explosion and Shock Waves* **33** 1 (in Chinese) [赖华伟, 王占江, 杨黎明, 王礼立 2013 爆炸与冲击 **33** 1]
- [14] Lai H W, Wang Z J, Yang L M, Wang L L 2013 *Chin. J. High Pressure Phys.* **27** 245 (in Chinese) [赖华伟, 王占江, 杨黎明, 王礼立 2013 高压物理学报 **27** 245]
- [15] Du Q Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4428 (in Chinese) [杜启振 2004 物理学报 **53** 4428]
- [16] Du Q Z, Yang H Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2801 (in Chinese) [杜启振, 杨慧珠 2004 物理学报 **53** 2801]
- [17] Feng Y L, Liu X Z, Liu J H, Ma L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3909
- [18] Yao G J, Lü W G, Song R L, Cui Z W, Zhang X L, Wang K X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 074301
- [19] Lepage W R 1961 *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers* (America: Dover Publications Inc) pp372–378
- [20] Crump K S 1976 *J. Associat. Comput. Machin.* **23** 89

Characteristics of spherical stress wave propagation in the standard linear solid material*

Lu Qiang¹⁾²⁾ Wang Zhan-Jiang^{2)†}

1) (State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

2) (Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

(Received 9 November 2014; revised manuscript received 5 December 2014)

Abstract

Based on the standard linear solid model, the solutions in Laplace domain, such as particle velocity v , particle displacement u , radial stress σ_r , tangential stress σ_θ , radial strain ε_r , tangential strain ε_θ , reduced velocity potential γ (RVP), and reduced displacement potential ψ (RDP), are derived from the spherical wave equations. The propagating characteristics of these physical quantities, as mentioned above, are calculated by using Crump algorithm for inverse Laplace transformation. The numerical inversion results reveal that the initial response to strong discontinuity spherical stress wave in viscoelastic material is purely elastic response. The strong discontinuities, such as σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ and v , contain geometrical attenuation and viscoelastic damping in the process of wave propagation. The variables, such as σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ , u and ψ , converge to steady values as time approaches to infinity. The peak values of RVP γ and RDP ψ , which are constant in a purely elastic material, are steadily reduced with the spreading distance increasing in viscoelastic material. The steady values of ψ are in inverse relation to the static shear modulus G_a , and directly proportional to the steady cavity pressure and the cube of the cavity radius r .

Keywords: mechanics of explosion, spherical stress waves, standard linear solid model, Laplace inversion transform

PACS: 83.60.Bc, 83.10.Gr, 81.40.Jj

DOI: 10.7498/aps.64.108301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172244).

† Corresponding author. E-mail: wangzhanjiang@nint.ac.cn