

圆柱形分层五模材料声学隐身衣的理论与数值分析

张向东 陈虹 王磊 赵志高 赵爱国

Theoretical and numerical analysis of layered cylindrical pentamode acoustic cloak

Zhang Xiang-Dong Chen Hong Wang Lei Zhao Zhi-Gao Zhao Ai-Guo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 134303 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.134303

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134303>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I13>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于弹性模量检测骨疲劳的超声导波方法研究

[Study of bone fatigue evaluation with ultrasonic guide waves based on elastic modulus](#)

物理学报.2012, 61(13): 134304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.134304>

界面条件下线型超声相控阵声场特性研究

[Acoustic field characteristics of ultrasonic linear phased array for an interface condition](#)

物理学报.2011, 60(9): 094301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.094301>

圆柱形分层五模材料声学隐身衣的理论数值分析

张向东[†] 陈虹 王磊 赵志高 赵爱国

(武汉第二船舶设计研究所, 武汉 430205)

(2014年10月9日收到; 2015年1月16日收到修改稿)

声学隐身衣物性参数分布的连续性对制备造成了很大困难, 需要采用分层的方法进行近似. 研究分层对隐身衣性能的影响具有重要意义. 本文首先推导了圆柱形分层声学隐身衣散射声压场的理论解, 然后通过数值算例验证了理论推导的正确性, 最后针对层数、层厚分布对隐身衣性能的影响进行了计算研究. 结果表明, 选取恰当的层数和层厚分布可在不增加制备难度的同时改善隐身衣性能.

关键词: 声学隐身衣, 五模材料, 分层

PACS: 43.40.Sk, 43.20.Fn, 43.20.Tb, 43.20.Bi

DOI: 10.7498/aps.64.134303

1 引言

减弱水下航行器等物体在声波中的散射效应具有重要意义. 声学隐身衣基于变换声学原理, 通过巧妙设计隐身衣的物性参数, 可操控声波传播路径使得任意频率的声波“绕过”隐身对象而大大减小散射效应. 上述概念最早出现于电磁学领域. 本世纪初, Leonhardt^[1]和Pendry等^[2]研究了基于奇异变换使物体在电磁波中隐身的方法. 此后, 电磁隐身衣的研究呈迅速发展的趋势. Kwon等首次研究了非径向对称电磁隐身衣^[3]. Schurig首次完成了微波频段下圆柱形电磁隐身衣的试验演示^[4]. Ma等将Leonhardt和Pendry等的理论推广到了各向异性介质中的电磁隐身衣, 并进行了数值验证^[5]. 吴群等首次推导了三维任意轴比椭球电磁隐身衣的物性参数, 并仿真验证了其隐身效果^[6]. Guo等给出了半空间中半圆柱形运动物体的隐身衣设计方案, 并仿真验证了其隐身效果^[7]. 其他研究成果可参见^[8-11].

随着电磁隐身衣研究的日益深入, 人们开始尝试将相关概念应用于声学隐身衣的设计. Cummer

等通过对比2维声波方程和单极麦克斯韦方程, 证明电磁波中的变换方法同样适用于2维声波方程, 完成了声学隐身衣的首次探索^[12]. Chen等^[13]以及Cummer等^[14]采用不同的方法得到了具有各向异性参数的3维声学隐身衣, 不过他们的设计并非基于坐标变换的方法. 不久, Cummer等证明了, 声波的弹性动力学方程其实是坐标变换形式不变的^[15], 为变换声学的发展奠定了坚实的基础.

最初, 人们研究的声学隐身衣都是基于惯性材料, 也就是密度各向异性刚度各向同性的材料^[16-18]. Norris指出, 惯性隐身衣存在根本的缺陷: 由于变换函数存在奇点, 隐身衣内层密度将变得无限大^[19]. 显然这对于隐身衣的实际应用是非常不利的. 为解决这个问题, Norris提出了五模材料隐身衣的概念. 这种隐身衣基于刚度各向异性的五模材料, 实现了与惯性隐身衣同样的声学隐身效果, 而降低甚至去掉了密度的各向异性要求. 五模隐身衣自问世之日起就受到学界的广泛关注. 如Hu等研究了变换声学中实空间到虚空间的变换关系, 通过分析限制条件与控制参数之间的关系, 解释了存在具有各自不同特点的五模声学隐身衣的原因^[20]. Layman等给出了一种具有应用前景的强

[†] 通信作者. E-mail: zhxdon@163.com

各向异性五模材料微结构设计方案^[21]. Bückmann 等用激光直写技术, 基于聚合物材料制作出了五模材料样本^[22].

原则上, 声学隐身衣应具有连续的物性参数. 然而, 受制备工艺等客观条件的限制, 实际制备时必须采用分层的手段. 作为一种简化手段, 由于分层人为引入了交界面, 对隐身衣性能必然会造成影响. 研究分层对隐身衣性能的影响具有重要的理论及实际意义. 高东宝等基于等效介质理论, 提出了具有共焦层状结构的椭圆柱形惯性声学隐身衣设计方法^[23]. Cai 等研究了变换函数对分层惯性隐身衣隐身性能的影响^[24]. Scandrett 等研究了分层五模材料球形隐身衣^[25,26]. 他们的主要结果是, 通过优化分层隐身衣的密度和刚度, 可改善隐身衣在频率点、甚至频率带上的隐身性能. 本文研究对象为圆柱形五模材料分层隐身衣. 本文与 Scandrett 等的研究存在本质的不同: 首先, 本文的研究对象为圆柱, 而后者为圆球. 考虑到隐身衣的潜在重要应用对象为水下航行器, 圆柱的研究更有意义. 其次, 本文研究的是层数、层厚分布等分层因素对隐身衣性能的影响, 后者则着眼于通过优化物性参数改善隐身衣性能.

本文首先推导圆柱形分层隐身衣散射场的解析解, 然后通过典型算例验证理论及程序的有效性, 最后结合程序计算结果研究层数、层厚分布对隐身性能的影响.

2 分层隐身衣散射场的解析解

由于圆柱形具有很强的对称性, 当入射声波为简谐波时, 可通过分离变量法得到散射场的级数形式解析解.

2.1 五模材料声学隐身衣理论

根据 Norris 建立的五模材料声学隐身衣理论^[19], 弹性材料的应力张量 σ 和应变张量 ϵ 通过虎克定律

$$\sigma = C : \epsilon \quad (1)$$

相联系. 对于五模材料来说, 模量张量 C 具有

$$C = KS \otimes S \quad (2)$$

的形式. 其中 K 为标量; S 为 2 阶特征张量, 它满足静平衡条件 $\text{div} S = 0$. 如果将 C 写成矩阵的形

式, 它的 6 个特征值中有 5 个都为 0, 也就是说材料有 5 个容易发生的形变模态. 这就是将具有 (2) 式的材料称为五模材料的原因. 定义五模材料中的“声压”

$$p = -K(S : \epsilon). \quad (3)$$

根据 (1)–(3) 式,

$$\sigma = K(S : \epsilon) S = -pS.$$

将其代入材料运动方程, 得到

$$\rho \dot{v} = \text{div} \sigma = -\text{div}(pS), \quad (4)$$

其中 ρ , v 分别为材料密度张量以及粒子运动速度. 对 (向量值) 函数 F , $\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t}$, $\ddot{F} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ 分别表示 F 关于时间变量 t 的一阶、二阶导数. 将 (4) 式代入 (3) 式, 得到

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= -KS : \nabla \dot{v} = -KS : \nabla (-\rho^{-1} \text{div}(pS)) \\ &= KS : \nabla (\rho^{-1} S \text{div}(p)), \end{aligned}$$

整理即得五模材料中的声波方程

$$KS : \nabla (\rho^{-1} S \nabla p) - \ddot{p} = 0. \quad (5)$$

根据变换声学理论, 通过操控隐身衣的物性参数 ρ , K 和 S , 可在方程 (5) 与虚空间中经典声波方程

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$$

之间建立对应关系, 而隐身衣外部的散射声压场等同于虚空间中尺寸很小的物体的散射声压场, 从而实现隐身的效果. 若密度矩阵 ρ 为标量, 此时隐身衣为五模材料隐身衣. 标量密度用 ρ 表示.

理论上得到的隐身衣具有连续分布的物性参数, 工程上很难实现. 为解决这一问题需要采用分层的手段, 层内为同种材料. 这样一来不可避免会对隐身衣的性能产生影响. 下面针对对分层对隐身衣性能的影响展开研究.

2.2 分层隐身衣散射场求解的分离变量法

入射波为简谐声波时, 密度为标量的圆柱形五模材料隐身衣内部的声波方程可写为 2 维形式^[19]

$$KS : \nabla (\rho^{-1} S \nabla p) - \ddot{p} = 0, \quad (6)$$

其中

$$p = p(x, y, z) = p(x, y) = p(r, \theta)$$

为声压分布函数, (x, y, z) 为笛卡尔坐标变量, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ 为球极坐标变量;

K, ρ 分别为材料的体积模量和密度; \mathbf{S} 为五模材料特征张量. 五模材料模量张量 \mathbf{C} 可表示为^[19]

$$\mathbf{C} = K\mathbf{S} \otimes \mathbf{S} = \left(\sqrt{K_r}I_r + \sqrt{K_\perp}I_\perp \right) \otimes \left(\sqrt{K_r}I_r + \sqrt{K_\perp}I_\perp \right), \quad (7)$$

其中 K_r 和 K_\perp 为径向刚度和切向刚度(这里的切向刚度(tangential stiffness)并非剪切模量(shear modulus),“切向”表示与径向垂直的方向). 当 $K_r \neq K_\perp$ 时材料具有各向异性特性; 当 $K_r = K_\perp$ 时材料具有各向同性特性; 当 K_r 和 K_\perp 等于水的体积模量时, (7) 式是水的模量张量. 水就是各向同性的五模材料. 此外,

$$I_r = \begin{pmatrix} x^2/r^2 & xy/r^2 \\ xy/r^2 & y^2/r^2 \end{pmatrix}, \\ I_\perp = I - I_r,$$

其中 \mathbf{I} 为单位矩阵. 方程 (6) 的球极坐标形式为

$$c_r \frac{\partial}{\partial r} \left(c_r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c_r c_\perp \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + c_\perp^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

其中

$$c_r = \sqrt{K_r/\rho}, \quad c_\perp = \sqrt{K_\perp/\rho}$$

分别为材料的径向、切向声速. 对分层隐身衣来说, 层内声波方程为

$$c_{r,i} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\frac{K_{r,i}}{\rho_i}} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c_{r,i} c_{\perp,i} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + c_{\perp,i}^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

方程中用下标 $i = 1, \dots, N$ 表示不同层的物性参数. 下面采用分离变量法求解方程 (9). 令

$$p = \alpha(r) \beta(\theta) e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

其中 ω 为圆频率, 则方程 (9) 化为

$$\beta''(\theta) c_{\perp,i}^2 \frac{\alpha(r)}{r^2} + \beta(\theta) \left[c_{r,i}^2 \alpha''(r) + c_{r,i} c_{\perp,i} \frac{1}{r} \alpha'(r) + \omega^2 \alpha(r) \right] = 0. \quad (11)$$

对 $n = 0, 1, \dots$, 可将方程 (11) 分解为如下形式:

$$\beta''(\theta) + n^2 \beta(\theta) = 0, \\ c_{r,i}^2 \alpha''(r) + c_{r,i} c_{\perp,i} \frac{1}{r} \alpha'(r) \left(\omega^2 - n^2 c_{\perp,i}^2 \frac{1}{r^2} \right)$$

$$= 0. \quad (12)$$

求解 (12) 式, 可得

$$\beta(\theta) = C_n^1 \cos(n\theta) + C_n^2 \sin(n\theta), \\ \alpha(r) = C_{i,n}^3 \phi_{i,n}(r) + C_{i,n}^4 \psi_{i,n}(r) \\ = C_{i,n}^3 \left(\frac{\omega r}{c_{r,i}} \right)^{1 - \frac{c_{\perp,i}}{c_{r,i}}} J_{\mu_{i,n}} \left(\frac{\omega r}{c_{r,i}} \right) \\ + C_{i,n}^4 \left(\frac{\omega r}{c_{r,i}} \right)^{1 - \frac{c_{\perp,i}}{c_{r,i}}} H_{\mu_{i,n}}^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c_{r,i}} \right),$$

其中 $J_\mu, H_\mu^{(1)}$ 分别为第一类、第三类 Bessel 函数, 而

$$\mu_{i,n} = \sqrt{\left(\left(1 - \frac{c_{\perp,i}}{c_{r,i}} \right) / 2 \right)^2 + n^2 \frac{c_{\perp,i}^2}{c_{r,i}^2}}. \quad (13)$$

根据 (10) 式, 去掉时间项后的分层隐身衣层内的级数声压场可写为

$$p_i = \sum p_{i,n} = \sum (C_{i,n} \phi_{i,n}(r) + D_{i,n} \psi_{i,n}(r)) \times (\cos(n\theta) + k_{i,n} \sin(n\theta)) \quad (14)$$

的形式. 其中的未知系数 $C_{i,n}, D_{i,n}$ 以及 $k_{i,n}$ 需要根据边界条件确定.

2.3 入射声波的平面波展开

对于简谐入射波

$$P^I = e^{-i\omega t} e^{i\omega x} = e^{-i\omega t} e^{i\omega r \cos(\theta)}. \quad (15)$$

其傅立叶级数展开形式为

$$P^I = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(r) \cos(n\theta), \quad (16)$$

其中

$$\gamma_n(r) = \frac{2i^n \pi J_n(\omega r)}{\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) d\theta}.$$

2.4 散射声压场的解析解

下面考虑隐身衣的散射声压场. 水中散射声压场满足经典声波方程. 利用分离变量法^[27], 水中散射声压场级数形式可写为

$$p^S = \sum (E_n \cos(n\theta) + F_n \sin(n\theta)) \times H_n^{(1)}(\omega r), \quad (17)$$

式中未知系数 E_n, F_n 将在施加边界条件后求解.

2.5 分层隐身衣散射场的边界条件

下面考虑边界处理方法. 层与层之间应满足法向压力和粒子的法向速度相等的条件

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}^t \mathbf{S} p] \Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} &= 0, \\ [\mathbf{n}^t \rho^{-1} \mathbf{S} \nabla p] \Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $r_{i+\frac{1}{2}}$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) 为 $i, i+1$ 两层的界面, \mathbf{n} 为外法向量. 根据 (14) 式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{i,n} \\ D_{i,n} \end{bmatrix} &= M_{i,n} \begin{bmatrix} C_{i+1,n} \\ D_{i+1,n} \end{bmatrix}, \\ k_{i,n} &= k_{i+1,n}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{i,n} &= (\rho_i c_{r,i} \Phi)^{-1} \rho_{i+1} c_{r,i+1} \Psi, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \phi_{i,n}(r_{i+\frac{1}{2}}) & \psi_{i,n}(r_{i+\frac{1}{2}}) \\ \rho_i^{-1} \frac{\partial \phi_{i,n}}{\partial r}(r_{i+\frac{1}{2}}) & \rho_i^{-1} \frac{\partial \psi_{i,n}}{\partial r}(r_{i+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}, \\ \Psi &= \begin{bmatrix} \phi_{i+1,n}(r_{i+\frac{1}{2}}) & \psi_{i+1,n}(r_{i+\frac{1}{2}}) \\ \rho_{i+1}^{-1} \frac{\partial \phi_{i+1,n}}{\partial r}(r_{i+\frac{1}{2}}) & \rho_{i+1}^{-1} \frac{\partial \psi_{i+1,n}}{\partial r}(r_{i+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

在隐身衣内层 $r = a$ 处, 采用 Neumann 边界条件. 从而

$$C_{1,n} \frac{\partial \phi_{1,n}}{\partial r}(a) + D_{1,n} \frac{\partial \psi_{1,n}}{\partial r}(a) = 0. \quad (20)$$

隐身衣外层 $r = b$ 处, 也要满足法向应力和粒子法向速度平衡的条件. 因此

$$\begin{aligned} &\rho_N c_{r,N} (C_{N,n} \phi_{N,n}(b) + D_{N,n} \psi_{N,n}(b)) \\ &= \gamma_n(b) + H_n^{(1)}(\omega b) E_n, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &k_{N,n} \rho_N c_{r,N} (C_{N,n} \phi_{N,n}(b) + D_{N,n} \psi_{N,n}(b)) \\ &= H_n^{(1)}(\omega b) F_n, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\rho_N^{-1} \rho_N c_{r,N} \left(C_{N,n} \frac{\partial \phi_{N,n}}{\partial r}(b) + D_{N,n} \frac{\partial \psi_{N,n}}{\partial r}(b) \right) \\ &= \gamma'_n(b) + \omega \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial z}(\omega b) E_n, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\frac{k_{N,n}}{\rho_N} \rho_N c_{r,N} \left(C_{N,n} \frac{\partial \phi_{N,n}}{\partial r}(b) + D_{N,n} \frac{\partial \psi_{N,n}}{\partial r}(b) \right) \\ &= \omega \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial z}(\omega b) F_n. \end{aligned} \quad (24)$$

求解 (16)–(24) 式, 可得

$$E_n = \frac{\gamma'_n(b) X_n - \gamma_n(b)}{H_n^{(1)}(\omega b) - \omega \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial z}(\omega b) X_n}, \quad (25)$$

$$X_n = \rho_N \frac{h_{1,n} \phi_{N,n}(b) + h_{2,n} \psi_{N,n}(b)}{h_{1,n} \frac{\partial \phi_{N,n}}{\partial r}(b) + h_{2,n} \frac{\partial \psi_{N,n}}{\partial r}(b)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{1,n} \\ h_{2,n} \end{bmatrix} &= (M_{1,n} \cdots M_{N-1,n})^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \psi_{1,n}}{\partial r}(a) \\ \frac{\partial \phi_{1,n}}{\partial r}(a) \end{bmatrix}, \\ F_n &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

最终得到分层隐身衣散射声压场表达式

$$p^S = \sum E_n \cos(n\theta) H_n^{(1)}(\omega r), \quad (28)$$

其中 E_n 可通过 (25) 式计算.

3 数值分析

基于上述理论推导, 编制了计算程序对层数、层厚分布等因素对分层隐身衣隐身性能的影响进行计算研究. 首先用数值算例验证理论及程序的有效性.

3.1 分层隐身衣散射场解析解的有效性验证

根据变换声学理论, 连续隐身衣物性参数由变换函数决定 (公式推导过程可参见文献 [19]). 取变换函数为最简单的线性变换

$$f = \frac{b - \delta a}{b - a} r + \frac{b}{b - a} (\delta a - a), \quad (29)$$

其中 a, b, δ 分别为隐身衣内径、外径和缩减系数. 隐身衣的散射声压场等同于被隐身物体缩减为原来 δ 倍后的散射声压场. 令 $\delta \rightarrow 1$, 散射声压场应逐步趋向于无隐身衣的散射声压场. 此过程中密度 (与水密度的相对值) 与特征张量

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{f f'}{r} \rightarrow 1, \\ \mathbf{S} &= \frac{f}{r} \left(I_r + \frac{r f'}{f} I_\perp \right) \rightarrow I, \end{aligned} \quad (30)$$

而径向刚度与切向刚度 (与水的体积模量的相对值)

$$K_r = \frac{f}{r f'} \rightarrow 1, \quad K_\perp = \frac{1}{K_r} \rightarrow 1. \quad (31)$$

根据 (7), (30), (31) 式, 连续隐身衣物性参数收敛于环境介质——也就是水的物性参数. 分层隐身衣是连续隐身衣的近似, $\delta \rightarrow 1$ 时其散射场应趋近于无隐身衣时物体的散射声压场. 取 $a = 0.05, b = 0.1, 层数 N = 5, 频率 f = 40 \text{ kHz}$. 计算距

隐身衣 $d = 0.2$ 处包络面上的散射场. 表 1 给出了 $\delta = 0.5$ 时的物性参数取值.

表 1 $\delta = 0.5$ 时的分层隐身衣物性参数
Table 1. Material parameters of layered cloak with $\delta = 0.5$.

	1层	2层	3层	4层	5层
密度	0.8864	1.0962	1.2500	1.3676	1.4605
径向刚度	0.3939	0.4872	0.5556	0.6078	0.6491
切向刚度	2.5385	2.0526	1.8000	1.6452	1.5405

注: 表 1 和表 2 中的密度为与水的密度的相对值, 刚度 (包括径向刚度及切向刚度) 为与水的体积模量的相对值.

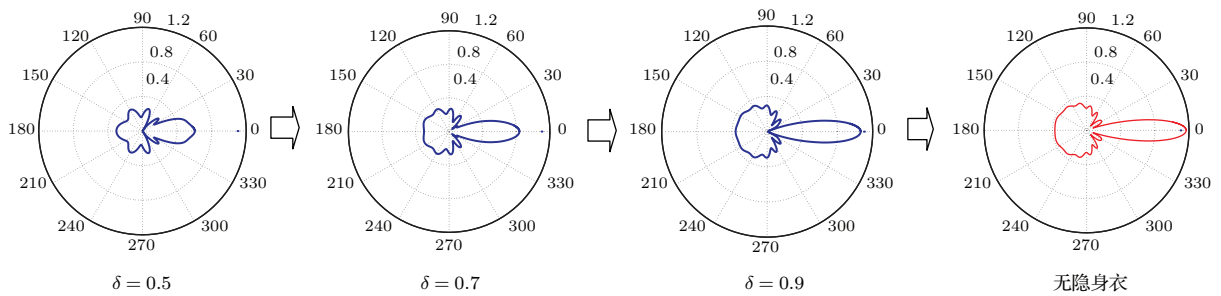


图 1 物性趋向于水时隐身衣的散射声压场

Fig. 1. Scattering field of cloak as material parameters approach that of water.

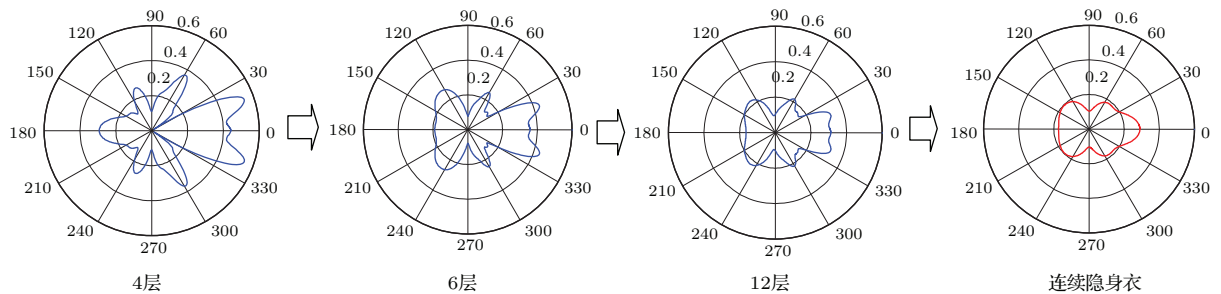


图 2 层数增多时分层隐身衣与连续隐身衣散射场对比

Fig. 2. Comparison of scattering fields between layered and continuous cloaks as layers' number varies.

3.2 层数对隐身衣性能的影响

对隐身衣进行分层, 层数是需要考虑的重要因素. 由于隐身衣厚度有限, 层数过多而单层厚度过小, 会对五模材料微结构的设计、制备造成不利影响; 层数过少又会对隐身衣的隐身性能带来影响. 因而研究层数对隐身衣性能的影响具有重要意义. 本文对频率 $f = 20 \text{ kHz}$, 40 kHz , 60 kHz (对应的 ka 值, 即入射波数与散射体尺度的乘积分别为 8.4, 16.8, 25.2) 时层数对隐身性能的影响进行了计算研究. 连续隐身衣材料物性利用 (29)–(31) 式计算, δ 取为 0.3. 令层厚均匀分布, 各层物性参数取为各

计算结果如图 1 所示. 容易看到, 此时隐身衣的散射声压场收敛于无隐身衣时光球的散射声压场. 这符合物理规律, 间接验证了理论和程序的有效性.

从物理上讲, 当隐身衣层数越来越多时, 分层隐身衣声学特性应趋向于连续隐身衣. 令变换函数 (29) 中的 $\delta = 0.3$, 其余参数设定与上面一致. 当层数增多时, 计算层数增多时距隐身衣距离 $d = 0.2$ 处包络面上的散射声压场, 计算结果如图 2 所示. 可以看出, 当层数 $N = 12$ 时, 分层隐身衣性能与连续隐身衣散射场已很接近. 这符合物理规律, 再次验证了理论和程序的有效性.

层中心的连续隐身衣参数. 连续隐身衣参数取值与 3.1 节相同. 表 2 给出了层数为 5 时的物性参数取值.

表 2 层数为 5 时的分层隐身衣物性参数
Table 2. Material parameters of layered cloak with $N = 5$.

	1层	2层	3层	4层	5层
密度	1.0100	1.0408	1.0633	1.0806	1.0942
径向刚度	0.8347	0.8601	0.8788	0.8930	0.9043
切向刚度	1.1980	1.1626	1.1379	1.1198	1.1058

计算结果如图 3 所示. 图中横坐标为层数. 纵坐标为归一化散射系数, 单位分贝 (dB), 用来表征敷设隐身衣后的散射场减弱程度. 其计算公式为

$$\sigma_{\text{nsc}} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_c(\text{WithCloak})}{\sigma_c(\text{WithoutCloak})},$$

式中 $\sigma_c(\text{WithCloak})$ 为敷设隐身衣后的散射系数, $\sigma_c(\text{WithoutCloak})$ 为不敷设隐身衣的散射系数. 散射系数为散射声能 E^S 与入射声能 E^I 的比值 [28]. 而对于穿过曲面 S 的声压分布 p 声波, 声能正比于 $\text{IM} \left(\int_S p \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} dS \right)$. 特别的, 对于本文研究的分层隐身衣来说, 根据 (28) 式, 计算可得

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \text{IM} \left(\int_C p^S \frac{\partial \bar{p}^S}{\partial n} dS \right) / \text{IM} \left(\int_{C_+} p^I \frac{\partial \bar{p}^I}{\partial n} dS \right) \\ &= \frac{b\omega\pi}{2b\omega} \text{IM} \left[2 |E_0|^2 H_0^{(1)}(\omega b) H_0^{(2)}(\omega b) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|^2 H_n^{(1)}(\omega b) \left(\frac{n}{\omega b} H_n^{(2)}(\omega b) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - H_{n+1}^{(2)}(\omega b) \right) \right], \end{aligned}$$

其中 C 为散射体外表面, C_+ 为声波入射面. 从图 3 可见, 在当前频率范围内, 层数 $N = 5$ 时隐身衣已经具有较好的隐身效果 (~ 5 dB), 此后随着层数的增加隐身效果的改善程度不大. 此外, 从图中可以看出, 频率越低, 隐身衣效果越好. 这是因为分层隐身衣本质上为连续隐身衣的离散. 频率越低, 层厚波长比越小, 离散对连续的近似效果就越好.

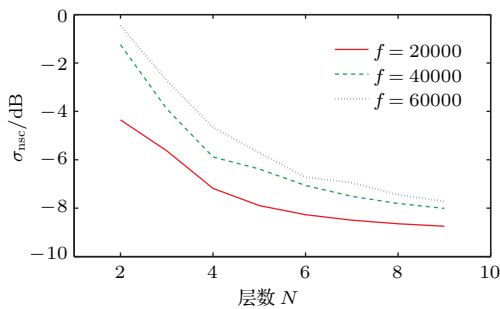


图 3 层数对隐身性能的影响

Fig. 3. Effects of layers' number on stealth performance.

3.3 层厚分布对隐身性能的影响

除了层数之外, 厚度分布也是隐身衣设计过程中需要考虑的重要因素. 本文对隐身衣厚度不变时层厚分布对隐身性能的影响进行了计算研究. 令层

数 $N = 5$, 计算了等厚度、厚度均匀增加、厚度均匀减小时不同频率下隐身衣的散射系数, 并以散射系数为目标对厚度进行了优化. 层厚分布确定后各层参数取为各层中心的连续隐身衣参数. 分层隐身衣对应的连续隐身衣参数取值方法与 3.1 节相同. 表 3 给出了频率 $f = 40$ kHz 时, 优化后的层厚分布以及各层上的物性参数.

表 3 优化后的层厚分布与各层物性参数

Table 3. The thickness distribution after optimization and corresponding material parameters.

	第一层	第二层	第三层	第四层	第五层
层厚	0.0040	0.0078	0.0111	0.0121	0.0150
密度	0.6015	0.8347	1.1231	1.3827	1.6035
径向刚度	0.2081	0.2888	0.3886	0.4784	0.5548
切向刚度	4.8043	3.4622	2.5732	2.0901	1.8023

计算结果如图 4 所示. 图中横坐标为频率, 纵坐标为归一化散射系数. 可以看到, 不同层厚分布对隐身衣性能影响最大可达 3—4 dB. 内层薄、外层厚的隐身衣性能更好. 对层厚分布进行优化可显著改善隐身衣性能. 对低频来说, 优化后的隐身衣性能比等厚度隐身衣优为 1 dB 左右, 比厚度均匀增加的隐身衣优为 0.5 dB 左右. 出现这些现象的原因是由于五模材料起作用的主要物性为弹性模量 (刚度). 连续隐身衣内层材料刚度数值变化较为剧烈. 参数变化剧烈的地方层厚过大会带来较大的离散误差, 进而会对性能造成较大影响.

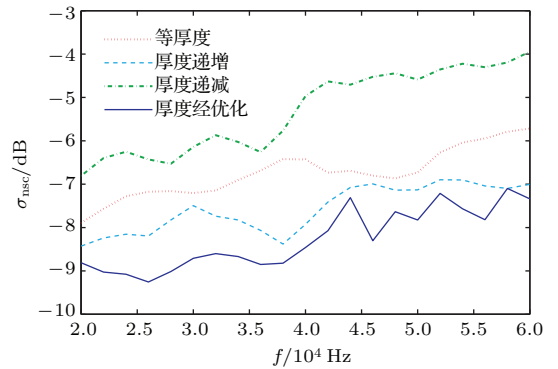


图 4 层厚分布对隐身性能的影响

Fig. 4. Effect of layers' thickness distribution on stealth performance.

4 结 论

本文推导了圆柱形分层声学隐身衣的理论解, 对分层对隐身性能的影响进行了计算和分析. 得到的主要结论如下:

1) 随着分层隐身衣层数的增加, 隐身衣的性能越来越好, 但相应的制备难度也会增大. 对测试频率来说, 层数 $N = 5$ 时隐身衣已经可以实现较佳的隐身效果 (~ 5 dB). 此后, 随着层数的增加隐身效果的改善程度不大.

2) 层厚分布对分层隐身衣性能有较大影响. 内层薄、外层厚对隐身衣性能的改善有利. 通过优化可使隐身衣性能相对均匀厚度隐身衣改善为 1 dB 左右.

参考文献

- [1] Leonhardt U 2006 *Science* **312** 1777
- [2] Pendry J B, Schurig D, Smith D R 2006 *Science* **312** 1780
- [3] Kwon D H, Werner D H 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 013505
- [4] Schurig D, Mock J J, Justice B J, Cummer S A, Pendry J B, Starr A F, Smith D R 2006 *Science* **314** 977
- [5] Ma H, Qu S B, Xu Z, Zhang J Q, Wang J F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1025
- [6] Wu Q, Zhang K, Meng FY, Li LW 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1619 (in Chinese) [吴群, 张狂, 孟繁义, 李乐伟 2009 物理学报 **58** 1619]
- [7] Guo P F, Li D, Dai Q, Fu Y Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 054101
- [8] Smolyaninov I I, Smolyaninova V N, Kildishev A V, Shalaev V M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 213901
- [9] Cummer S A, Popa B I, Schurig D, Smith D R, Pendry J B 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036621
- [10] Ruan Z, Yan M, Neff C W, Qiu M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 113903
- [11] Luo XY, Liu DY, Yao LF, Dong JF 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 084101 (in Chinese) [罗孝阳, 刘道亚, 姚丽芳, 董建峰 2014 物理学报 **63** 084101]
- [12] Cummer S A, Schurig D 2007 *New J. Phys.* **9** 45
- [13] Chen H, Chan C T 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 183518
- [14] Cummer S A, Popa B I, Schurig D, Smith D R, Pendry J B, Rahm M, Starr A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 024301
- [15] Cummer S A, Rahm M, Schurig D 2008 *New J. Phys.* **10** 115025
- [16] Liang W C, Sánchez-Dehesa J 2007 *J. Phys.* **9** 010450
- [17] Torrent D, Sánchez-Dehesa J 2008 *New J. Phys.* **10** 063015
- [18] Farhat M, Guenneau S, Enoch S, Movchan A, Zolla F, Nicolet A 2008 *New J. Phys.* **10** 115030
- [19] Norris A N 2008 *Proc. R. Soc. A* **464** 2411
- [20] Hu J, Liu X N, Hu G K 2013 *Wave Motion* **170**
- [21] Layman C J, Naify C J, Martin T P, Calvo D C, Orris G J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 024302
- [22] Bückmann T, Thiel M, Kadic M, Schittny R, Wegener M 2014 *Nature Communications* **5** 4130
- [23] Gao D B, Zeng X W 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 184301 (in Chinese) [高东宝, 曾新吾 2012 物理学报 **61** 184301]
- [24] Cai L, Wen J H, Yu D L, Lu Z M, Wen X S 2014 *Chin. Phys. Lett.* **31** 094303
- [25] Scandrett C L, Boisvert J E, Howarth T R 2010 *J. Acoust. Soc. Am.* **127** 2856
- [26] Scandrett C L, Boisvert J E, Howarth T R 2011 *Wave Motion*. **48** 505
- [27] Du G H, Zhu Z M, Gong X F 2012 *Basic Acoustics* (Nanjing: Nanjing University Press) (in Chinese) [杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬 2012 声学基础 (南京: 南京大学出版社)]
- [28] Jones D S 1986 *Acoustic and Electromagnetic Waves* (Oxford: Clarendon Press)

Theoretical and numerical analysis of layered cylindrical pentamode acoustic cloak

Zhang Xiang-Dong[†] Chen Hong Wang Lei Zhao Zhi-Gao Zhao Ai-Guo

(Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan 430205, China)

(Received 9 October 2014; revised manuscript received 16 January 2015)

Abstract

As a newly-developed method, acoustic cloak made of pentamode materials is on its speedway to the promising potential application. However, physical fabrication of pentamode cloak with continuously varying material parameters can be a tough work, if not totally impossible. Layering is a natural compromise to bypass this quandary. Researches on layering effects of inertial cloak are ample. However, researches on layering pentamode acoustic cloak are relatively limited. Among these researches Scandrett extends the effective bandwidth through optimization of material parameters[2010 *J. Acoust. Soc. Am.* **127** 2856, 2011 *Wave Motion.* **48** 505].

The present work concerns the layering effects of pentamode acoustic cloak. By comparing with precedent results, the present paper has two major innovations: Firstly, cylinder is chosen to be the basic geometry. This is of obvious advantage since cylinder is the basic geometry of acoustic cloak's important potential host. Secondly, effects of layers' number and thickness distribution on the stealth effect are analyzed. The two are key parameters to be determined in the layering process. This paper is organized as follows: Firstly, analytical expression of the scattering pressure field of layered cloak is deduced by means of variables separation. In this process Fourier expansion plays a key role. And the harmonic assumption of the incident acoustic wave is made. Secondly, typical cases are calculated to verify the validation of the theoretical analysis. First let material parameters tend towards that of water, and compare the scattering field with that of the bare rigid object when the cloak is replaced by water. Second let the layering number goes to infinity, and compare the scattering field with that of the continuous cloak. Phenomena conforming with basic physical laws are observed. And validity of the theory and codes is confirmed. Thirdly, effects of layers' number and thickness distribution on the stealth character are theoretically and numerically analyzed. One can easily see from the computational results that a critical number N exists. When layers' number exceeds N , improvement of the stealth effect becomes less efficient by further adding layers' number. One can also see from the computational results that a wise distributional strategy that helps improve the stealth effect indeed exists. And the optimization iteration can be utilized to further improve it.

As a summary, the present paper concerns the layering process of cloaking. Qualitatively and quantitatively, several significant results are obtained. This paper offers a useful reference for future fabrication of realistic acoustic pentamode cloak.

Keywords: acoustic cloak, pentamode material, layering

PACS: 43.40.Sk, 43.20.Fn, 43.20.Tb, 43.20.Bi

DOI: 10.7498/aps.64.134303

[†] Corresponding author. E-mail: zhxdon@163.com