

二维晶格颗粒堆积中侧壁的压力分布与转向系数

杨林 胡林 张兴刚

Lateral pressure distribution and steering coefficient in two-dimensional lattice pile of granular material

Yang Lin Hu Lin Zhang Xing-Gang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 134502 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.134502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I13>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

玻璃橡胶混合颗粒的力学响应研究

Mechanical response study of glass-rubber particle mixtures

物理学报.2015, 64(15): 154502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154502>

振动颗粒混合物中的周期性分聚现象与能量耗散

Energy dissipation and periodic segregation of vibrated binary granular mixtures

物理学报.2015, 64(13): 134503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134503>

垂直振动激励下颗粒材料有效质量和耗散功率的研究

Dynamic effective mass and power dissipation of the granular material under vertical vibration

物理学报.2015, 64(4): 044501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.044501>

孤立波在一维复合颗粒链中传播特性的模拟研究

Simulation study on the propagation of solitary waves in a one-dimensional composite granular chain

物理学报.2014, 63(15): 154502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.154502>

粮仓内颗粒压力的测量: Janssen 行为及其偏差

Measurements of granular pressure in silo: Janssen behaviour and deviation

物理学报.2014, 63(10): 104503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.104503>

## 二维晶格颗粒堆积中侧壁的压力分布与转向系数\*

杨林 胡林<sup>†</sup> 张兴刚

(贵州大学物理系, 贵阳 550025)

(2014年8月26日收到; 2015年1月6日收到修改稿)

颗粒物质是大量颗粒聚集在一起的软凝聚态物质, 其微观结构与宏观力学性质的联系非常复杂. 本文用实验的方法观测了二维竖直晶格堆积颗粒, 在竖直方向外加正压力作用下其侧壁的受力分布情况, 根据实验结果详细讨论和分析了颗粒体系中正压力的转向行为. 实验结果表明: 在缓慢压缩颗粒体系的过程中, 正压力的变化呈现非线性和线性两段不同的规律; 对于确定堆积结构的颗粒体系, 竖直方向施加的正压力通过颗粒力链转向, 且水平方向不同堆积高度处所受压力值不同, 中部的压力大于顶部和底部的压力; 转向系数 $k$ 的饱和值随堆积角 $\theta$ 的增大而减小. 对颗粒堆的几何结构与受力情况进行分析, 给出了转向系数与堆积角之间的数学表达式, 理论值与实验值符合较好.

**关键词:** 颗粒物质, 几何结构, 侧压力, 转向系数

**PACS:** 45.70.-n, 29.27.Bd, 46.70.Lk, 61.43.Bn

**DOI:** 10.7498/aps.64.134502

## 1 引言

颗粒物质泛指大量离散固体颗粒的聚集体, 普遍存在于自然界和人类的生产与生活中. 例如, 沙丘、积雪、矿产、粮食、化工材料和建筑材料等. 由于颗粒体系通常是远离平衡态的非平衡态, 即使在静态堆积时其状态结构也处于亚稳态, 具有典型的非线性、自组织和能量耗散等特征, 所以静态颗粒物质间的相互作用、力传递以及力分布问题至今仍是人们关注的焦点.

颗粒体系具有一定的结构性, 其宏观形变和力学特性与微观组构密切相关. 针对颗粒体系的多尺度结构特征, 目前研究者们采用多种方法进行研究, 常用的方法有理论分析、数值模拟和简单的实验研究<sup>[1-3]</sup>. 其中Blumenfeld等<sup>[4,5]</sup>在理论上从颗粒体系的几何结构出发, 给出了二维受压颗粒的应力方程, 得出应力张量中各个分量与结构张量之间的关系. Majmudar等<sup>[6]</sup>用实验的方法研究了在外压力的作用下, 二维颗粒将出现不均匀的接触网

络, 证实了外压力在颗粒体系中是通过力链的方式传递的. 孙其诚等<sup>[7]</sup>通过光弹材料实验观测到受压颗粒体系中的力链分布, 其中力链的传递方向遵循力链角判定原则, 并统计出力链强弱的概率分布呈幂指数规律. 但他们的研究大都是理论和模拟或对简单实验的宏观描述, 很少用实验的方法直接观测颗粒体系内部的几何结构对宏观作用力的影响, 因此我们有必要设计简单晶格堆积的颗粒体系, 对颗粒体系的微观结构进行分析, 观测在压力的作用下颗粒的堆积结构与应力之间的关系.

对于复杂的二维多尺度结构体系, 在压力的作用下, 颗粒间相互接触的微结构形成情况、应力传递以及颗粒滑移通道和结构重组的关系是研究者关心的问题. 我们设计了二维竖直晶格堆积颗粒的测量装置, 用实验的方法有控制地改变颗粒体系的堆积结构, 研究其推挤过程中的动力学行为, 测量容器侧壁不同高度处压力的分布情况, 讨论颗粒物质转向系数与堆积结构之间的关系.

对于二维晶格堆积的颗粒结构, 静态时满足力平衡方程:  $\nabla \cdot \sigma = g$ , 其中 $\sigma$ 是颗粒介质中的

\* 国家自然科学基金(批准号: 11264006)、贵州省长专项基金(黔省专合字 2010-5)和贵州大学引进人才科研基金(批准号: 201334)资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: hulin53@sina.com

应力张量场,  $\mathbf{g}$  是重力场产生的体积力. 此外静态压缩颗粒体系还需满足应力张量与结构张量之间的关系

$$p_{xx}\sigma_{yy} + p_{yy}\sigma_{xx} = 2p_{xy}\sigma_{xy},$$

式中的  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{xy}$  是对称结构张量的分量, 其值与颗粒的堆积结构有关, 按照 Blumenfeld 等<sup>[8]</sup> 对结构张量的定义, 晶格结构堆积的颗粒体系中, 其对称结构张量为零, 因此, 我们需要用实验的方法找出晶格堆积的颗粒体系中应力与结构之间的关系.

## 2 实验装置及测量方法

实验装置如图 1 所示: 用铝合金材料做成底边长 245 mm, 宽 20 mm, 高 380 mm 的边框竖直放置, 后面玻璃封闭, 前面开放的颗粒容器, 容器左边壁和底板固定在光学平台上, 右边器壁悬挂连接在电动平移台上, 可随平移台移动; 5 个压力传感器 EVT-14D (量程为 150 N) 分别安放在右器壁的不同高度, 可实时采集颗粒系统作用在其上的压力; 颗粒堆顶部有一块用于挤压颗粒的挤压板 (如图 1 中所示), 此板与 LAB-B-B 型压力传感器 (量程为 500 N) 以及 SC3 步进电机的悬臂刚性连接. 实验时步进电机推动挤压板竖直向下推压颗粒堆, 即向整个颗粒体系施加一竖直向下的正压力. 实验前制备颗粒堆时用一张硬纸紧贴玻璃板, 待颗粒堆放完成后, 轻轻抽出硬纸, 以减小颗粒与后面器壁的摩擦.

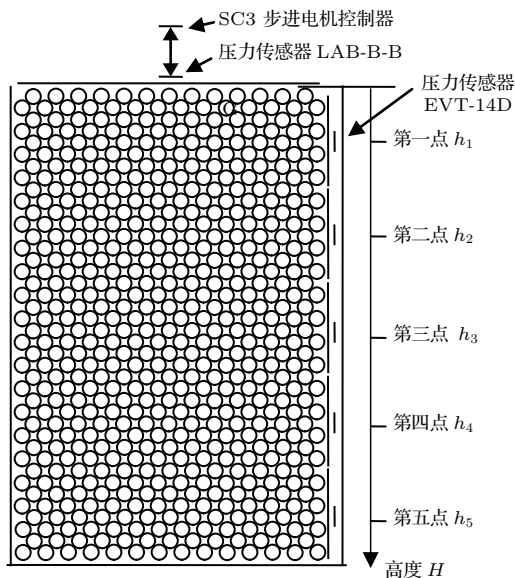


图 1 实验装置示意图

Fig. 1. The sketch of experimental setup.

实验时, 将直径分别为  $14.00 \pm 0.05$  mm 和  $20.00 \pm 0.05$  mm, 高为  $18.00 \pm 0.05$  mm 的圆柱形聚甲醛 (POM) 尼龙塑料颗粒, 按照预先设计的不同结构竖直堆放在容器中, 记录下卸载时侧壁 5 个传感器的示数以及最初的堆积结构照片. 控制图 1 中连接有 LAB-B-B 压力传感器的 SC3 步进电机, 事先对步进电机速率定标, 实验时以  $1 \times 10^{-4}$  m/s 的速率档缓慢推挤覆盖在颗粒最上层的挤压板, 压力传感器记录竖直向下的正压力  $F_N$ , 侧壁的 5 个传感器分别测出其所在位置的侧壁压力  $f_1, f_2, f_3, f_4$  和  $f_5$ , 所有传感器均以每秒钟采集 4 个压力值, 计算机自动记录所有数据; 同时, 用高清晰单反相机拍摄记录颗粒体系的初始几何结构和任意时刻正压力作用下的形变结构. 当某一传感器示数达量程的 90% 左右时停止步进电机施力压缩. 保持实验条件以及操作情况不变, 重复 5 次, 取测量平均值, 并对采集的实验数据进行处理, 每秒取最后一个点作图 2 实验曲线. 实验所用颗粒的主要参数由生产厂家提供, 如表 1 所示.

表 1 实验颗粒的主要参数表

Table 1. The major parameters about the particles.

聚甲醛 (POM) 指标	参数值
摩擦因数 $\mu$	0.10—0.12
弹性模量 $E/\text{MPa}$	2600
密度 $\rho/\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	1.34
泊松比 $\nu$	0.33
最大弹性限度/%	2

## 3 实验结果及分析

### 3.1 实验结果

按照实验设计方案, 通过改变排列方式和颗粒大小实现不同的堆积角  $\theta$  (图 3 所示). 实验时将直径为 20 mm 的颗粒铺在最底层, 然后在其上层铺放直径为 14 mm 的颗粒, 两种尺寸的颗粒依次交叠循环堆成二维晶格结构, 不同堆积角条件下的实验结果如图 2 (a) 至 (d) 所示; 图 2 (e) 至 (h) 为直径为 14 mm 的单种颗粒在不同堆积角条件下的实验结果. 从图 2 中实验结果可见: 1) 容器侧壁承受了压力. 这表明, 竖直方向施加的正压力通过相互接触的颗粒以力链形式传递抵达侧壁. 2) 侧壁不同高度处的压力大小不相等, 具体表现为上、下较小, 中部较大的特性. 这种特性也区别于压力在连续

介质(如水和气体)中的传播状况. 3)侧壁在不同高度处接收到的压力大小与堆积角 $\theta$ 的大小有关. 4)竖直方向正压力 $F_N$ 随推压时间 $t$ 曲线的变化规律为:随着推压时间 $t$ 的增加,正压力 $F_N$ 先呈非线性规律缓慢增加,然后转变为线性规律上升.单种尺寸颗粒体系的这种行为更加显著. 5)在两种尺寸颗粒混和堆积的结构中,堆积角较小时,如图2(a)

中 $\theta = 0.75$  rad曲线后端出现较明显波动,根据录像观察,这是由于压缩的过程中结构发生局部的滑移错位所致.图2(e)为单种尺寸颗粒( $d = 14$  mm) $\theta = 0.75$  rad时相同推压作用下的行为,曲线出现明显的断裂点,这是由于颗粒体系在压缩的过程中结构出现坍塌所致.相同堆积角条件下,单种尺寸颗粒结构更容易出现坍塌现象.

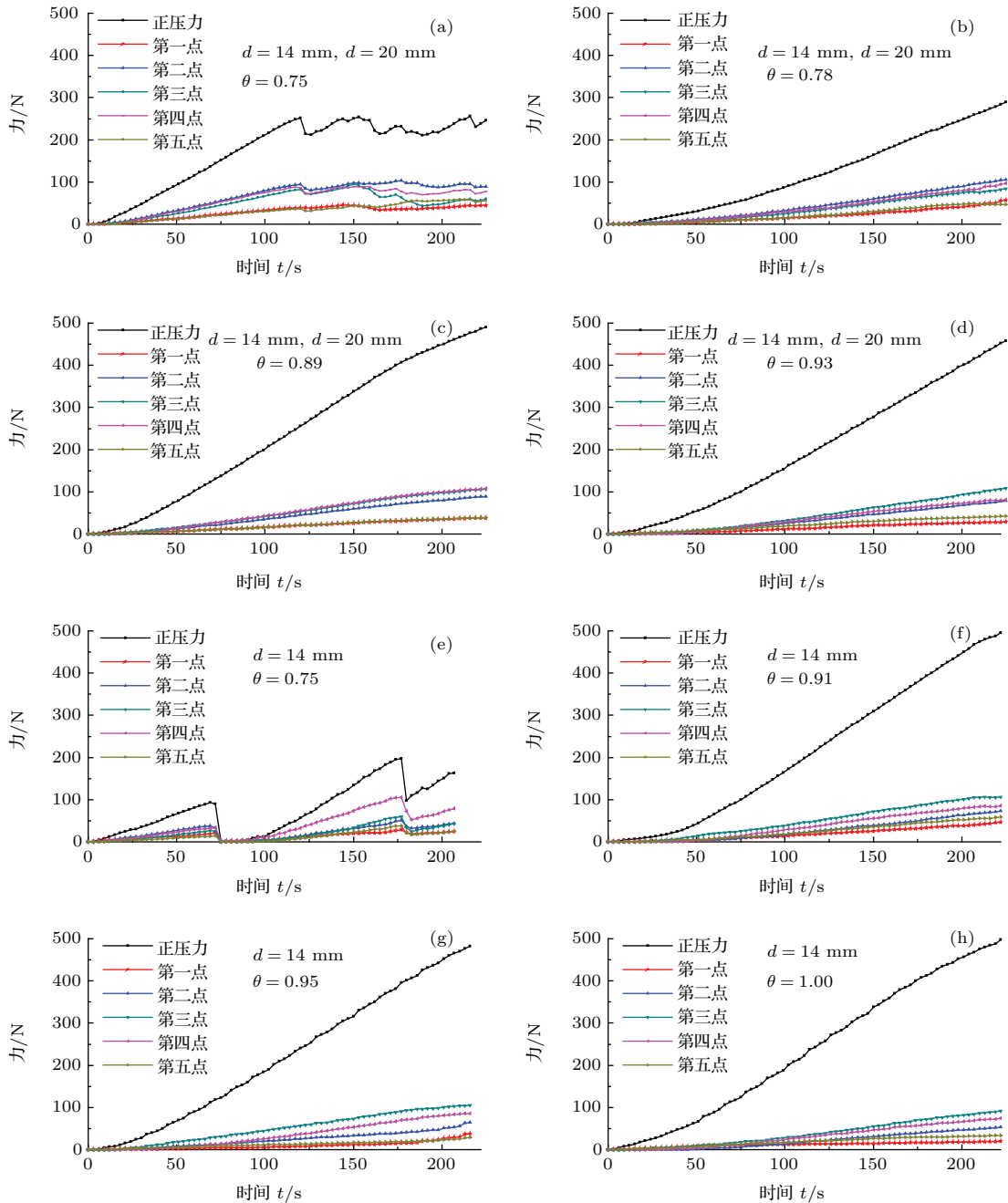


图2 (网刊彩色) 步进电机以 $1 \times 10^{-4}$  m/s速率缓慢挤压颗粒过程中力与时间的变化关系 (a)—(d)混合颗粒在不同堆积角下竖直正压力和水平侧压力与时间的关系; (e)—(h)单种颗粒在不同堆积角下竖直正压力和水平侧压力与时间的关系

Fig. 2. (color online) The vertical and horizontal pressure as the function of time: (a–d) The mixed grains; (e–h) The single grain.

### 3.2 压缩过程中的动力学行为分析

针对图2中正压力曲线变化规律可以从力学角度理解其动力学行为: 推压初始阶段, 步进电机的推压力主要用于克服颗粒之间以及颗粒在器壁之间滑移的摩擦力, 由于颗粒系统的摩擦力与颗粒的堆积几何结构、堆积疏密情况、颗粒材料以及器壁表面的粗糙程度和上层力分配到下层颗粒的权重等因数有关, 故曲线前端表现为非线性特征; 继续挤压推进, 颗粒通过自组排列, 形成力链, 当抵达器壁的力链挤压器壁时, 推压力主要用于克服颗粒之间以及力链对器壁的弹性挤压力, 这个阶段对应于曲线后半部的线性增长行为. 当推压力达到与颗粒堆积结构屈服应力相对应的临界值时, 力链发生断裂, 结构坍塌, 颗粒结构发生重组, 其过程表现为图2(a)与(e)中曲线后端的波动行为. 这种行为的物理机理与陆坤权等<sup>[9]</sup>关于地震的颗粒介质理论以及吴迪平等<sup>[10]</sup>关于离散颗粒层被横向推移过程的模拟结果相符合.

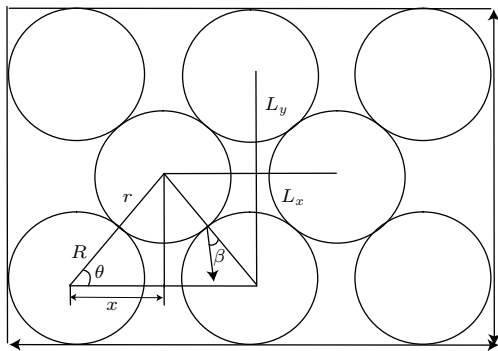


图3 颗粒堆积角示意图

Fig. 3. The sketch of the stacking angle.

### 3.3 转向系数的实验结果

根据实验中颗粒体系的堆积结构, 几何关系如图3所示. 直角三角形底边长度为

$$x = \frac{L - 2R}{2(N - 1)}, \quad (1)$$

其中  $L$  是颗粒堆积总宽度,  $R$  是大颗粒的半径,  $r$  是小颗粒的半径,  $N$  是底层颗粒总数,  $\theta$  为相邻上下层颗粒质心的连线与水平轴之间的夹角, 即堆积角. 则

$$\cos \theta = \frac{x}{R + r}. \quad (2)$$

竖直向下的应力为

$$\sigma_{yy} = \frac{F_N}{L}, \quad (3)$$

其中  $F_N$  是竖直向下的正压力. 侧壁上的平均水平应力为

$$\sigma_{xx} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5}{H}, \quad (4)$$

其中  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  分别是侧壁上不同高度处  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$  所测到的力,  $H$  是颗粒堆积总高度, 则转向系数为

$$k = \sigma_{xx} / \sigma_{yy}. \quad (5)$$

取图2中的各组实验数据, 根据(5)式计算得到不同堆积结构条件下, 转向系数随正压力的变化关系如图4所示, 图4(a)是混合颗粒的实验结果; 图4(b)是单种颗粒的实验结果.

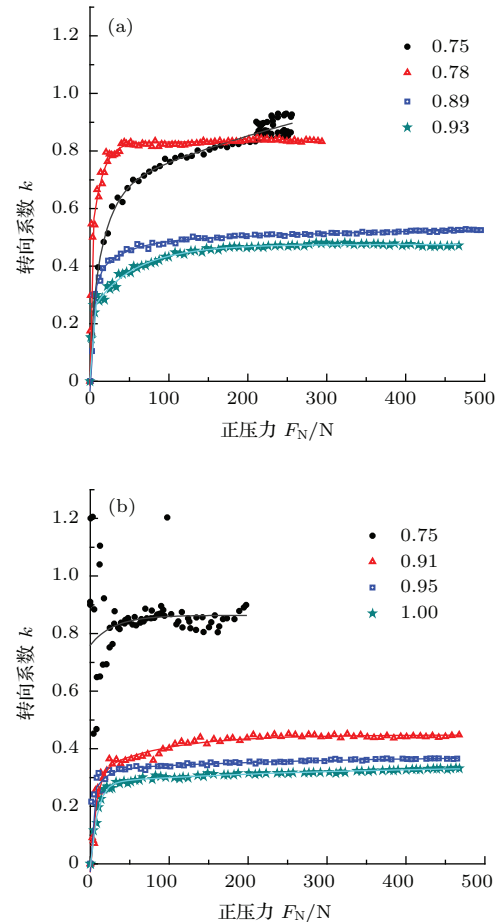


图4 (网刊彩色) (a) 混合颗粒的转向系数与正压力的关系; (b) 单种颗粒的转向系数与正压力的关系

Fig. 4. (color online) The steering coefficient as the function of vertical pressure: (a) the mixed grains; (b) the single grain.

根据实验录像对图4曲线作如下分析: 1) 初始压缩阶段颗粒排列较疏松, 步进电机缓慢推压颗粒输入的正压力主要消耗在用于克服颗粒之间以及颗粒与器壁的滑动(或转动)摩擦力, 这时侧应力  $\sigma_{xx}$  为零, 因而转向系数为零; 当电机继续推进, 颗

粒之间通过微小滑移自组排列形成颗粒短链,一旦力链形成,竖直正压力沿着力链转向,侧应力 $\sigma_{xx}$ 不再为零,表现为转向系数曲线迅速增加;随着外力继续推挤,颗粒致密,短力链变长、变粗,力链强度增大,当颗粒结构达到致密稳定时,抵抗正压力的能力达到最大,转向系数曲线趋于饱和. 2) 转向系数的饱和值主要取决于颗粒体系的摩擦系数 $\mu$ 和堆积角 $\theta$ ,当摩擦系数一定时,堆积角越大,转向系数越小. 因为堆积角愈大,颗粒的成链方向愈趋向竖直方向,应力的竖直分量优于其水平分量.

#### 4 转向系数的理论分析和实验结果

在颗粒物质的堆积结构中,设颗粒之间实际接触力 $F$ 与颗粒接触方向之间的夹角为 $\beta$ (如图3所示),则力 $F$ 在水平方向上的分力为

$$f_{xx} = F \cdot \cos(\theta + \beta) = \sigma_{xx} \cdot L_y. \quad (6)$$

力 $F$ 在竖直方向上的分力为

$$f_{yy} = F \cdot \sin(\theta + \beta) = \sigma_{yy} \cdot L_x, \quad (7)$$

其中 $L_y$ 和 $L_x$ 分别为颗粒元胞的长和宽,因此 $L_y/L_x = \tan \theta$ ,因此,转向系数

$$k = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = \frac{1}{\tan(\theta + \beta) \cdot \tan \theta}. \quad (8)$$

在颗粒相互挤压的过程中,设颗粒之间的摩擦力达到最大静摩擦力时,由静态体系的合外力为零可列方程

$$F \cdot \sin \beta = \mu \cdot F \cdot \cos \beta, \quad (9)$$

其中 $\mu$ 为颗粒之间的摩擦因数,得

$$\beta = \arctan \mu. \quad (10)$$

若取颗粒体系等效摩擦因数 $\mu = 0.11$ ,则(10)式中的 $\beta \approx 0.11$ ,于是,转向系数 $k$ 与堆积角 $\theta$ 的关系可写成

$$k = \frac{1}{\tan(\theta + 0.11) \cdot \tan \theta}. \quad (11)$$

根据多次不同堆积角重复实验的结果,取转向系数达到稳定时的平均值与堆积角的关系作图,其结果如图5所示:分散数据点为实验值,平滑曲线为(11)式的理论计算值,可见随着颗粒堆积角的增大,转向系数有减小趋势,且理论值与实验值符合较好.

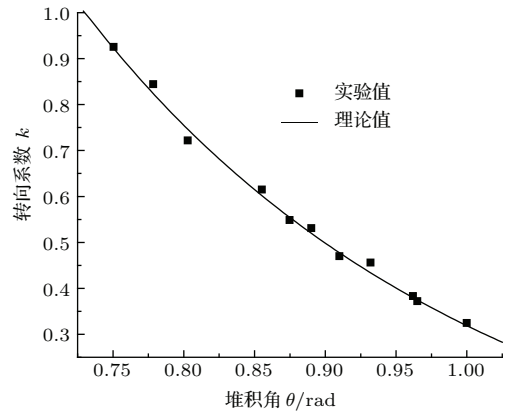


图5 转向系数与堆积角的关系

Fig. 5. The relationship between the steering coefficient and the stacking angle.

#### 5 结论

本文通过实验的方法,观测了二维竖直晶格堆积颗粒在竖直方向外加正压力作用下侧壁的受力行为. 根据不同堆积角的实验结果,分析了颗粒体系中正压力的转向行为以及推压过程中的动力学行为. 结果表明:在缓慢推压颗粒的过程中,正压力与时间曲线上表现为非线性和线性两种规律,我们认为这两种规律分别反应了推压初始阶段,正压力主要用于克服颗粒之间以及颗粒与器壁之间滑移的摩擦力;当颗粒结构致密后,正压力主要用于克服颗粒之间以及力链与器壁之间的弹性挤压力. 即持续推压扰动条件下颗粒体系存在摩擦、滑移、挤压的不同机理,当摩擦、滑移占主导地位时,曲线呈非线性变化规律,当挤压占主导地位时,曲线呈线性变化规律;水平方向(器壁)不同堆积高度处的压力值不相同,即中部的压力大于顶部和底部的压力. 这种行为是由于颗粒力链向非竖直方向传递了力,即颗粒力链或拱形结构将竖直方向的正压力分散到水平方向所致(颗粒物质的粮仓效应特征). 我们用实验的方法找出晶格堆积的颗粒体系中应力转向与堆积结构之间的关系,即转向系数 $k$ 的饱和值与摩擦因数 $\mu$ 和堆积角 $\theta$ 有关,当摩擦因数一定时,转向系数随堆积角的增大而减小. 同时,对静态二维晶格堆积结构进行定量分析,推导出转向系数与摩擦因数和堆积角之间的数学表达式,当 $\mu = 0.11$ 时,理论计算结果与实验结果符合较好.

后续研究中,我们将着眼于颗粒的滑移通道与微观结构形成的关系和力链的断裂导致的结构坍塌与重组等规律的研究,深入探究静态颗粒体系几何结构与应力的关联性. 这些工作将有利于帮助人

们认识和理解颗粒物质这类新型凝聚态物质的基本力学特性以及结构变化的物理机理.

作者感谢与贵州大学物理系孔维姝教授和高立科师兄的讨论. 感谢贵州大学机械实训中心杨进德老师在装置加工方面的大力协助.

### 参考文献

- [1] Ball R C, Blumenfeld R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 115505
- [2] Edwards S F, Grinev D V, Brujic J 2003 *Physica A* **330** 61
- [3] DeGiuli E, McElwaine J 2011 *Phys. Rev. E* **84** 041310
- [4] Blumenfeld R 2007 *New Journal of Physics* **9** 160
- [5] Gerritsena M, Kreissb G, Blumenfeld R 2008 *Physica A* **387** 6263
- [6] Majmudar T S, Behringer R P 2005 *Nature* **435** 1079
- [7] Sun Q C, Jin F, Wang G Q, Zhang G H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 0030 (in Chinese) [孙其城, 金峰, 王光谦, 张国华 2010 物理学报 **59** 0030]
- [8] Blumenfeld R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 108310
- [9] Lu K Q, Hou M Y, Jiang Z H, Wang Q, Sun G, Liu J X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 119103 (in Chinese) [陆坤权, 厚美瑛, 姜泽辉, 王强, 孙刚, 刘寄星 2012 物理学报 **61** 119103]
- [10] Wu D P, Li X X, Qin Q, Gan B, Zang Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 098201 (in Chinese) [吴迪平, 李星祥, 秦勤, 管奔, 臧勇 2014 物理学报 **63** 098201]

# Lateral pressure distribution and steering coefficient in two-dimensional lattice pile of granular material\*

Yang Lin Hu Lin<sup>†</sup> Zhang Xing-Gang

(Department of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

( Received 26 August 2014; revised manuscript received 6 January 2015 )

## Abstract

Granular material is a kind of soft condensed matter, which gathers up a large number of particles, and the relation between its microstructure and macroscopic mechanical properties is very complex. In this paper, the lateral stress distribution of the two-dimensional vertically stacked lattice of granular material under a pressure in the vertical direction has been investigated experimentally. The steering behavior of the vertical pressure in a granular system is discussed and analyzed in detail based on the experimental results. Results show that in the process of slow compression, the vertical pressure increases slowly in a nonlinear form at first and gradually transforms into a linear increase. This phenomenon corresponds to the dynamic processes of friction-slip-extrusion. This kind of behavior is more significant in the particle system of the same size. In the initial stage of pressing, the vertical force of the stepping motor is mainly used to overcome the friction between the particles and the sliding friction between the particle and the wall. As the friction in the granular system is related to the geometry of the particulate deposits, the material of particles, the roughness of the wall surface, and other relevant factors, the front-end of vertical pressure displays nonlinear characteristics. Continuing the squeeze and push forward, a force chain is formed among particles through self-organization. The vertical force is mainly used to overcome the elastic pressing force between the particles and the force to the wall, so later on the vertical pressure performs linear growth. For the system of particles with an established packed structure, the vertical pressure applied in the vertical direction steers along the force chain between the particles, and the value of horizontal pressure is different at different stacking heights. That is, the pressure in the middle is greater than that at the top and the bottom. The saturated value of steering coefficient  $k$  decreases with the stacking angle  $\theta$ . As the stacking angle increases, the vertical component of the stress becomes more pronounced than its horizontal component. The expression of steering coefficients against stacking angle has been obtained through careful analysis of the geometrical structure and the force distribution of the granular pile, and the theoretical value fit well with the experimental results.

**Keywords:** granular material, geometric structure, lateral pressure, steering coefficient

**PACS:** 45.70.-n, 29.27.Bd, 46.70.Lk, 61.43.Bn

**DOI:** 10.7498/aps.64.134502

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11264006), the Special Foundation of Guizhou Provincial Governor, China (Guizhou Province Specialized Cooperative. 2010-5), and the Introduction of Talents in Scientific Research Foundation of Guizhou University, China (Grant No. 201334).

† Corresponding author. E-mail: [hulin53@sina.com](mailto:hulin53@sina.com)