

基于分数阶流变模型的铁基块体非晶合金黏弹性行为研究

廖光开 龙志林 许福 刘为 张志洋 杨妙

Investigation on the viscoelastic behavior of an Fe-base bulk amorphous alloys based on the fractional order rheological model

Liao Guang-Kai Long Zhi-Lin Xu Fu Liu Wei Zhang Zhi-Yang Yang Miao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 136101 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.136101

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.136101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I13>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

铜-钼源漏电极对非晶氧化铟镓锌  $\square/\wedge/\square$  器件性能的提升

Improved performance of the amorphous indium-gallium-zinc oxide thin film transistor with Cu-Mo source/drain electrode

物理学报.2015, 64(12): 126103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.126103>

EI-Nabulsi 动力学模型下非 Chetaev 型非完整系统的精确不变量与绝热不变量

Exact invariants and adiabatic invariants for nonholonomic systems in non-Chetaev's type based on EI-Nabulsi dynamical models

物理学报.2015, 64(3): 034502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034502>

EI-Nabulsi 动力学模型下 Birkhoff 系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量

Perturbation to Noether symmetries and adiabatic invariants for Birkhoffian systems based on EI-Nabulsi dynamical models

物理学报.2014, 63(10): 104501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.104501>

微晶硅锗太阳能电池本征层纵向结构的优化

Optimization of the longitudinal structure of intrinsic layer in microcrystalline silicon germanium solar cell

物理学报.2013, 62(3): 036102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.036102>

1 at% Ag 替代  $Zr_{57}Cu_{20}Al_{10}Ni_8Ti_5$  金属玻璃中各组元对玻璃形成能力及热稳定性的作用分析

On glass forming ability and thermal stability of  $Zr_{57}Cu_{20}Al_{10}Ni_8Ti_5$  bulk metallic glass by substituting each component with 1 at% Ag

物理学报.2013, 62(1): 016101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.016101>

# 基于分数阶流变模型的铁基块体非晶合金黏弹性行为研究\*

廖光开 龙志林<sup>†</sup> 许福 刘为 张志洋 杨妙

(湘潭大学土木工程与力学学院, 湘潭 411105)

(2014年12月6日收到; 2015年2月5日收到修改稿)

采用分数阶黏弹单元替代经典模型中的黏壶, 结合非晶合金在外加载荷作用下的微观结构演化, 建立了以分数阶微积分表示的非晶合金黏弹性本构模型. 并根据 Hertz 弹性理论及分数阶黏弹性本构模型, 推导了块体非晶合金在纳米压痕球形压头下的位移与载荷及时间关系式. 基于推导的解析式, 对铁基块体非晶合金在表观弹性区的纳米压痕位移与载荷及时间曲线进行了非线性拟合分析. 相较于整数阶模型, 分数阶模型不仅具有较高的拟合精度, 其拟合参数能敏锐地反应加载速率对块体非晶合金黏弹性行为的影响, 且参数的变化规律与载荷作用下非晶合金微观结构演化呈现出较强的相关性.

**关键词:** 块体非晶合金, 分数阶流变模型, 纳米压痕, 黏弹性

**PACS:** 61.43.Dq, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.64.136101

## 1 引言

块体非晶合金以其优异的力学性能及广阔的应用前景, 近年来受到国内外学者的广泛关注<sup>[1-6]</sup>. 然而, 目前尚有许多影响块体非晶合金大规模工程应用的科学难题, 如非晶合金原子尺度的形变机理及其与微结构关系的研究, 进而制约了这类材料的进一步探索及应用<sup>[7]</sup>.

最近, 一些研究表明, 块体非晶合金在其弹性区具有显著的黏弹性能, 并且其微结构在外加载荷作用下呈现分形生长的特征<sup>[8,9]</sup>. 如何建立非晶合金微观结构演化与黏弹性行为的关联成为了领域内近期研究的热点. 学者们曾试图采用传统的整数阶流变模型(如三参数固体模型<sup>[10,11]</sup>, Zener 模型<sup>[12,13]</sup>和广义 Kelvin 模型<sup>[14]</sup>)对非晶合金的黏弹性行为进行模拟和分析. 上述研究发现, 整数阶流变模型对应的本构关系能很好地模拟非晶合金的黏弹性行为, 并基于模拟结果初步探讨了合金的黏

弹性行为与其微结构的关系. 然而, 由实验数据反演得到的整数阶流变模型存在不唯一性, 及其模型参数随时间变化的不确定性对这些流变模型在块体非晶合金黏弹性行为研究中的应用提出了严重挑战. 因此, 亟需引入新的流变模型来描述块体非晶合金的黏弹性这一复杂的物理力学行为.

分数阶微积分是一种卷积算子, 其定义中的微分和积分项充分体现了物质的分形特性和历史相关性<sup>[15]</sup>, 在描述具有时间效应且复杂的物理力学过程时具有相对较强的优势. 近年来, 被广泛应用于工程领域中非线性流变行为的研究<sup>[16-18]</sup>. 采用分数阶微积分来描述具有分形结构物质的本构关系<sup>[19]</sup>这一新思路在国际上尚属于起步阶段. 最近, 一些实验和模拟研究表明, 块体非晶合金的原子排列并不是绝对无序的, 而存在一定的短程或中程有序. 采用以溶质原子为中心的原子团簇模型来分析块体非晶合金的微观结构将更为合理, 而这种短程或中程有序的原子团簇具有自相似的分形本质<sup>[20]</sup>.

\* 国家自然科学基金(批准号: 51471139, 51071134, 51401176), 湖南省自然科学基金重点项目(批准号: 12JJ2024, 14JJ3078)和湖南省研究生科研创新项目(批准号: CX2014B278)资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: longzli@xtu.edu.cn

纵观现有研究, 利用分数阶微积分模型来描述块体非晶合金的黏弹性行为还鲜有文献报道.

本文利用分数阶黏弹单元替代经典模型中的黏壶, 结合非晶合金在外加载荷作用下的微观结构演化, 建立了以分数阶微积分表示的非晶合金黏弹性本构模型; 将Hertz弹性接触理论拓展到黏弹性形变中, 并基于分数阶黏弹性本构模型, 推导了块体非晶合金在纳米压痕球形压头下的压痕位移与载荷及时间关系式; 对铁基块体非晶合金在表观弹性区的纳米压痕实验数据进行非线性拟合, 分析了加载速率在不同实验阶段对铁基块体非晶合金黏弹性行为的影响. 希望探索一条研究块体非晶合金力学性能的新思路.

## 2 分数阶黏弹性模型的建立

为了解释非晶合金的黏弹性(或延迟弹性)行为与微观非均匀性的关联, Yang等<sup>[10,11]</sup>将非晶合金的内部微观结构看作是由弹性基体包裹黏性流动单元组成, 并用Kelvin模型或三参数固体模型中的弹簧和黏壶分别对其进行力学比拟. Huo等<sup>[12,13]</sup>在研究非晶合金的表观弹性准静态循环压缩形成的应力-应变迟滞环现象时, 提出了与Yang等<sup>[10,11]</sup>相类似的微观结构, 即非晶合金由类固态基体和类液态流动单元组合而成(如图1(a)所示). 考虑到流动单元的不连续性, Huo等<sup>[12,13]</sup>对Yang等<sup>[10,11]</sup>提出的三参数固体模型进行了改进, 即用Zener模型对非晶合金的内部微观结构进行模拟.

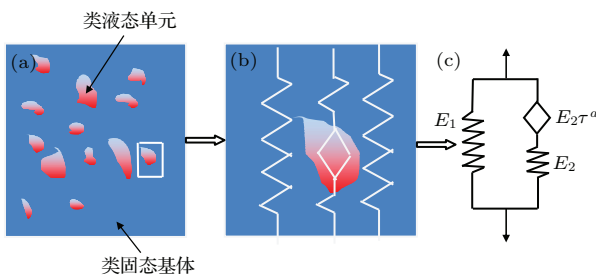


图1 (网刊彩色) (a) 非晶合金的微观非均匀结构<sup>[12,13]</sup>; (b) 微观非均匀结构力学比拟; (c) 分数阶Zener流变模型,  $E_1$ ,  $E_2$ 分别对应于非晶合金以及其体系内类液态单元的弹性模量,  $\tau$ 和 $\alpha$ 分别定义为平均松弛时间和分数阶次

Fig. 1. (color online) The microscopic inhomogeneous structure of amorphous alloys<sup>[12,13]</sup> (a); The mechanics match of microscopic inhomogeneous structure (b); The rheological model of fractional order Zener body,  $E_1$ ,  $E_2$  corresponding to the elastic modulus of the amorphous alloys and the liquidlike unit respectively,  $\tau$  and  $\alpha$  denoted the average relaxation time and fractional times (c).

借鉴上述研究工作, 为了更准确、全面虑及块体非晶合金在外加载荷作用下微观结构的分形生长特征, 本文将利用分数阶黏弹单元替代Zener模型中的黏壶来构建相应的分数阶模型, 并分别将模型中的弹簧和分数阶黏弹单元与非晶体系内的类固态基体和类液态流动单元进行力学比拟(如图1(b), (c)所示).

分数阶微积分的定义有多种, 本文以Riemann-Liouville定义<sup>[15]</sup>来构建分数阶模型, 其中函数 $f(t)$ 的 $\alpha$ 阶微分形式为

$$\begin{aligned} D^\alpha [f(t)] &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\zeta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t-\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(0)}{\zeta^\alpha} + \int_0^t \frac{f(t-\zeta)}{\zeta^\alpha} d\zeta \right] \\ &= \{1/[\Gamma(1-\alpha)t^\alpha]\} * df \\ &= I_\alpha(t) df, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $D^\alpha$ 为分数阶微分算子,  $\zeta$ 为一时间变量,  $I_\alpha(t) = 1/[\Gamma(1-\alpha)t^\alpha]$ 定义为Abel核<sup>[21]</sup>, 其中分数阶次 $0 \leq \alpha \leq 1$ , 时间 $t > 0$ ,  $\Gamma$ 为gamma函数,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

令 $\bar{f}(s)$ 为 $f(t)$ 的Laplace变换, 则 $f(t)$ 在初始条件为零时的分数阶微分的Laplace变换为

$$L[D^\alpha f(t), s] = s^\alpha \bar{f}(s), \quad (2)$$

式中 $s^\alpha$ 为Laplace算子, 在分数阶微积分理论框架下, 将分数阶Zener模型(图1(c))的力学响应表示为

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{(E_1 + E_2) E_2^{1-\alpha} \eta^\alpha D^\alpha + E_1 E_2}{E_2^{1-\alpha} \eta^\alpha D^\alpha + E_2} \varepsilon(t) \\ &= \frac{(E_1 + E_2) E_2 \tau^\alpha D^\alpha + E_1 E_2}{E_2 \tau^\alpha D^\alpha + E_2} \varepsilon(t) \\ &= \frac{(E_1 + E_2) \tau^\alpha D^\alpha + E_1}{\tau^\alpha D^\alpha + 1} \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\sigma(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ 为应力和应变,  $E_1$ 和 $E_2$ 分别对应于非晶合金的弹性模量和体系内类液态流动单元的弹性模量,  $\eta$ 和 $\tau = \eta/E_2$ 定义为材料的黏度系数和平均松弛时间. 当 $\alpha = 0$ 时, 上式退化为Hooke弹簧的响应方程; 当 $\alpha = 1$ 时, 退化为Zener模型的响应方程<sup>[22]</sup>. 在单位阶跃载荷作用下, 对(3)式进行Laplace变换及其逆变换, 可求得蠕变柔量为

$$\begin{aligned} J(t) &= L^{-1} \left[ \frac{\tau^\alpha s^\alpha + 1}{(E_1 + E_2) \tau^\alpha s^\alpha + E_1} \cdot \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{E_1 + E_2} + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \end{aligned}$$

$$\times L^{-1} \left[ \frac{1}{(E_1 + E_2) \tau^\alpha s^\alpha + E_1} \cdot \frac{1}{s} \right]. \quad (4)$$

引入双参数 Mittag-Leffler 函数

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

并利用其相关性质 [23]:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm ct^\alpha) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp c)^{k+1}}$$

且

$$\bar{f}(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}(z) &= -\frac{1}{z} E_{-\alpha, \beta - \alpha} \left( \frac{1}{z} \right) \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha - \alpha k)}. \end{aligned} \quad (6)$$

将 (4) 式代入 (5) 式, 并结合 (6) 式的变换可得

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{E_1 + E_2} + \frac{E_2}{(E_1 + E_2)^2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \\ &\quad \times E_{\alpha, 1 + \alpha} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

根据 Mittag-Leffler 函数的性质 [24]: 当  $a, b > 0$ ,  $x \in C$  (实数) 时有

$$E_{a, b}(x) = x E_{a, a+b}(x) + \frac{1}{\Gamma(b)}. \quad (8)$$

则 (7) 式可写为

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{(E_1 + E_2) E_1} \\ &\quad \times E_{\alpha, 1} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式即为单位阶跃载荷作用下分数阶 Zener 模型的蠕变柔量表达式.

关于纳米压痕球形压头下的载荷-位移线弹性关系的研究, 已经有较为成熟的 Hertz 弹性接触理论 [10]:

$$h^{3/2} = \frac{3p(1-v)}{8\sqrt{RG}}, \quad (10)$$

式中  $h$  为位移,  $p$  为载荷,  $v$  和  $G$  分别表示材料的泊松比和剪切模量,  $R$  为球形压头半径. 根据

$$G = \frac{E}{2(1+v)}, \quad (11)$$

将 (11) 式代入 (10) 式得

$$h^{3/2} = \frac{3p(1-v^2)}{4\sqrt{RE}}, \quad (12)$$

其中  $E$  为弹性模量. 假设泊松比  $v$  不随时间变化, 将 Hertz 理论中的弹性模量倒数用相应的黏弹性积分算子替代, 可将弹性接触问题扩展到黏弹性接触问题 [25], 则 (12) 式可写为

$$\begin{aligned} h^{3/2}(t) &= \frac{3(1-v^2)}{4\sqrt{R}} \\ &\quad \times \int_0^t J(t-\zeta) \frac{\partial p(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (13)$$

设在加载阶段采用恒定速率加载, 则 (13) 式中加载速率  $\frac{\partial p(\zeta)}{\partial \zeta} = \dot{p}$  为一常数, 将 (9) 式代入 (13) 式得

$$\begin{aligned} h^{3/2}(t) &= \frac{3(1-v^2)\dot{p}}{4\sqrt{R}} \int_0^t \left\{ \frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{(E_1 + E_2)E_1} \right. \\ &\quad \times E_{\alpha, 1} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t-\zeta}{\tau} \right)^\alpha \right] \left. \right\} d\zeta \\ &= \frac{3(1-v^2)\dot{p}}{4\sqrt{R}} \cdot \left\{ \frac{t}{E_1} - \frac{E_2 t}{(E_1 + E_2)E_1} \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right)^k}{\Gamma(\alpha k + 2)} \right\} \\ &= \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}} \cdot \left\{ \frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{(E_1 + E_2)E_1} \right. \\ &\quad \times E_{\alpha, 2} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式即为用分数阶 Zener 模型表示的纳米压痕加载阶段球形压头下的载荷与位移及时间关系式. 当  $\alpha = 0$  时, 模型退化为 Hooke 弹簧体形式, 此时 (14) 式变为

$$\begin{aligned} h^{3/2}(t) &= \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}} \cdot \left[ \frac{2}{2E_1 + E_2} \right. \\ &\quad + (-1)^n \cdot \frac{E_2(E_1 + E_2)}{2E_1 + E_2} \\ &\quad \times \left. \frac{E_1^{n+1}}{(E_1 + E_2)^{n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

由于  $n$  为无穷大, (15) 式右端第二项为 0, 则 (15) 式可写为

$$h^{3/2}(t) = \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}} \cdot \frac{2}{2E_1 + E_2}, \quad (16)$$

可得 (16) 式与两个  $E_2$  弹簧串联再并联一个  $E_1$  弹簧 (等效弹性模量  $E = E_1 + \frac{E_2}{2}$ ) 所推导的 Hertz 弹性解一致. 当  $\alpha = 1$  时, 模型退化为 Zener 体形式, 则 (14) 式变为

$$h^{3/2}(t) = \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}} \cdot \left\{ \frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{(E_1 + E_2)E_1} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times E_{1,2} \left[ -\frac{E_1 t}{(E_1 + E_2) \tau} \right] \Big\} \\
 &= \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}E_1} - \frac{3(1-v^2)E_2 \dot{p}t}{4\sqrt{R}(E_1 + E_2)E_1} \\
 & \times E_{1,2} \left[ -\frac{E_1 t}{(E_1 + E_2) \tau} \right] \\
 &= \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}E_1} + \frac{3(1-v^2)E_2 \dot{p}\tau}{4\sqrt{R}E_1^2} \\
 & \times \left( E_{1,1} \left[ -\frac{E_1 t}{(E_1 + E_2) \tau} \right] - 1 \right) \\
 &= \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}E_1} - \frac{3(1-v^2)E_2 \dot{p}\tau}{4\sqrt{R}E_1^2} \\
 & \times \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{E_1 t}{(E_1 + E_2) \tau} \right] \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

根据Huo等<sup>[13]</sup>设表观松弛时间 $t_c = \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}$ 及本文模型中的平均松弛时间 $\tau = \eta/E_2$ 可得 $\tau = \frac{E_1 t_c}{E_1 + E_2}$ ,代入(17)式得到

$$\begin{aligned}
 h^{3/2}(t) &= \frac{3(1-v^2)p}{4\sqrt{R}E_1} - \frac{3(1-v^2)\dot{p}E_2 t_c}{4\sqrt{R}(E_1 + E_2)E_1} \\
 & \times \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{t_c} \right) \right]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

(18)式与Huo等<sup>[13]</sup>所推导的结果一致. 以上结果说明(16)式和(18)式所对应的Hooke弹簧模型和Zener体模型分别为(14)式所表征的分数阶Zener体模型的两种特殊形式.

对于保载阶段,其加载模式类似于单位阶跃载荷作用下的情形<sup>[14]</sup>,即用模型的蠕变柔量代替Hertz理论中的弹性模量倒数便可得到保载阶段的蠕变位移与时间曲线关系式:

$$\begin{aligned}
 h^{3/2}(t) &= \frac{3p(t)(1-v^2)}{4\sqrt{R}} \left\{ \frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{(E_1 + E_2)E_1} \right. \\
 & \times \left. E_{\alpha,1} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

值得注意的是,(14)式和(19)式中的

$$\begin{aligned}
 & E_{\alpha,2} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right], \\
 & E_{\alpha,1} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right]
 \end{aligned}$$

为无穷求和级数,且存在gamma函数,在实际拟合过程中很难实现,只能取有限项进行计算,这样将会产生截断误差.且在计算时涉及阶乘和幂律运算,当参数 $\frac{t}{\tau}$ 较大时,求和项在达到截断条件以前分子或分母就会超出计算机中双精度数的范围,

故计算其函数值存在困难,为了避免直接对求和项进行截断,令gamma函数中的 $\alpha = 1$ ,可将上述Mitaag-Lellfler函数简化为分数指数形式<sup>[26]</sup>,其表达式为

$$\begin{aligned}
 & E_{\alpha,2} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \\
 &= \frac{E_1 + E_2}{E_1} \left( \frac{\tau}{t} \right)^\alpha \\
 & \times \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \right\}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E_{\alpha,1} \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \\
 &= \exp \left[ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right]. \quad (21)
 \end{aligned}$$

### 3 纳米压痕实验与数据分析

#### 3.1 纳米压痕实验

本文选用由铜模铸造法制备的铁基软磁块体非晶合金( $\text{Fe}_{41.5}\text{Co}_{27.6}\text{B}_{18.4}\text{Si}_{4.6}\text{Nb}_{3.9}\text{Cr}_4$ )作为研究对象.首先使用200—5000目的金相砂纸对样品进行手工逐级研磨,再用金刚石研磨膏将样品表面抛光成镜面光滑,并用超声波进行清洗,以减小样品表面由于加工缺陷造成的后续实验误差.最后采用美国Hysitron公司生产的带金刚石球形压头(在准静态加载条件下利用熔融石英校核得压头半径 $R = 420 \text{ nm}$ )的TribIndenter压痕仪进行实验.

为了表征铁基块体非晶合金(弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ ,泊松比 $\nu = 0.324$ <sup>[27]</sup>)在宏观弹性区的黏弹性能,选用不同加载速率(1—50 mN/s)加载到最大载荷为200  $\mu\text{N}$ (本实验的名义屈服极限载荷为280  $\mu\text{N}$ ),并保载0.5 s,然后以1 mN/s卸载到零,实验曲线族如图2所示.由图可得,随着加载速率的增加,加载阶段的载荷-位移( $P-h$ )曲线逐渐偏离Hertz弹性解曲线.达到最大载荷后,保载一段时间,压入深度最终稳定下来,且加载速率越大,压入深度越大,位移响应滞后于荷载作用的现象越明显,表现出了显著的加载速率敏感性.在随后的低速率卸载过程中, $P-h$ 曲线与Hertz解曲线逐渐趋于重合,压入深度在完全卸载后回复到零点.显然,在这一弹性加载—保载—卸载过程中,铁基块体非晶合金表现出了明显的滞弹性行为,而这种迟滞行为正是非晶合金本身结构非均匀性(存在纳米尺度的硬区和软区结构)对载荷作用的宏观响应. Yang等<sup>[10]</sup>和Huo等<sup>[13]</sup>在研究

Zr<sub>55</sub>Pd<sub>10</sub>Cu<sub>20</sub>Ni<sub>5</sub>Al<sub>10</sub> 和 Zr<sub>52.5</sub>Cu<sub>17.9</sub>Ni<sub>14.6</sub>Al<sub>10</sub>Ti<sub>5</sub> 块体非晶合金时也发现了类似的实验现象。

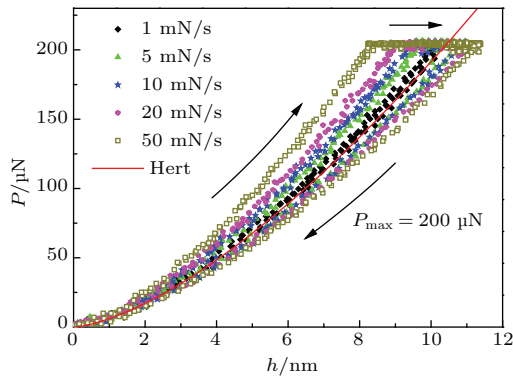


图2  $P_{\max} = 200 \mu\text{N}$  时, 不同加载速率下加载—保载—卸载过程的载-位移曲线族及Hertz解曲线

Fig. 2. When the maximum load is equal to  $200 \mu\text{N}$ , the load-displacement curves of different loading rates in the process of loading-loadholding-unloading and the curve of Hertz solution.

### 3.2 数值拟合分析与讨论

利用前文所建分数阶 Zener 模型 (14) 式和经典整数阶 Zener 模型 (17) 式分别对最大载荷为  $200 \mu\text{N}$ , 加载速率为  $5 \text{ mN/s}$  的加载阶段数据进行拟合, 拟合曲线及 Hertz 弹性解曲线如图 3 所示, 图中  $r^2$  为拟合相关性系数. 由图可以得到, 分数阶模型和整数阶模型相较于 Hertz 弹性解曲线与实验数据均能够较好地符合, 说明这两种流变模型在对实验数据的拟合方面都具有较强的优势. 根据分数阶 Zener 模型与非晶合金内部微结构的力学比拟关系,  $E_1$  为非晶合金在准静态变形条件下测得的弹性模量,  $E_2$  主要来自流动单元对弹性模量的贡献 [28]. 由拟合结果得到, 两种流变模型得到的弹性模量值  $E_1$  ( $215.005 \text{ GPa}$ ,  $220.051 \text{ GPa}$ ) 均大于铁基块体非晶合金在准静态条件下测得的弹性模量值 ( $200 \text{ GPa}$ ) [27], 这可能是由于材料在高速率加载过程中瞬时弹性性能增强的缘故, 但由分数阶模型拟合得到的  $E_1$  相较于整数阶模型得到的  $E_1$  更接近于材料在准静态条件下测得的弹性模量值. 同时, 在拟合过程中发现, 若想进一步减小拟合参数与实测值的偏差, 则整数阶模型曲线与实验值将发生较大的偏离现象. 而分数阶模型由于分数阶次  $\alpha$  的可变性, 在对实验数据的拟合过程中克服了这种拟合精度与参数准确性的不协调关系, 相较于整数阶模型不仅可以达到较好的拟合效果, 同时拟合得到的参数接近于材料的实测值. 容易发现, 分数阶流变

模型在表征材料的黏弹性行为时相比于整数阶模型具有更强的优势.

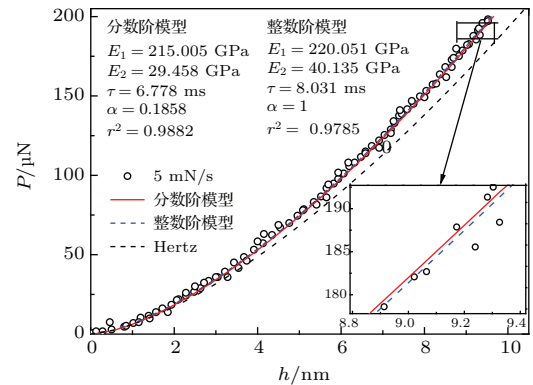


图3 不同模型拟合加载阶段的载-位移曲线

Fig. 3. The load-displacement curves in loading stage fitted by different models.

为了进一步探索加载速率对铁基非晶合金黏弹性行为的影响, 利用分数阶模型分别对不同加载速率下加载阶段的  $P-h$  曲线及保载阶段的位移-时间 ( $h-t$ ) 曲线进行拟合, 结果如图 4、图 5 及表 1 所示. 分析上述图表可得: 随着加载速率的增加, 在加载阶段, 拟和得到的弹性模量  $E_1$ ,  $E_2$  和松弛时间  $\tau$  都逐渐增大, 而分数阶次  $\alpha$  在  $0.263-0.022$  范围内逐渐减小; 在保载阶段, 拟合得到的  $E_1$ ,  $\tau$  逐渐减小,  $E_2$ ,  $\alpha$  则呈增大趋势. 有趣的是, 在保载阶段, 拟合不同加载速率下的  $h-t$  曲线得到的弹性模量  $E_1$ ,  $E_2$  之和基本保持在一个恒定范围内, 这一规律正好与 Huo 等 [13] 的研究结果相一致.

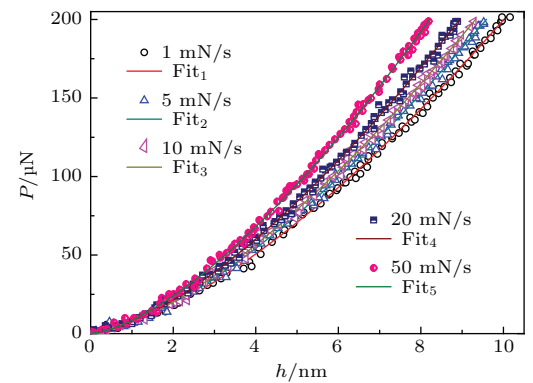


图4 不同加载速率下加载阶段的拟合曲线图

Fig. 4. The load-displacement curves in loading stage of different loading rates fitted by fractional order model.

根据文献 [28] 中的定义, 引入非晶体系内流动单元总体作用因子  $\rho = E_2/E_1$ , 将拟和参数值代入式中, 得到不同加载速率下的流动因子  $\rho$ , 如表 1 所示. 再根据分数阶黏弹单元的定义, 分数阶次  $\alpha$  可

以直观地体现物质的黏弹性特征. 基于表 1 中的结果, 可以得到如下规律: 在加载阶段, 随着加载速率的增大, 流动因子  $\rho$  逐渐增大, 对应了材料的整体流动性增强. 而分数阶次  $\alpha$  的取值及变化规律则反映了材料的宏观弹性特征增强. 结合非晶合金的内部微观演化机理可以推测: 在高速率加载过程中非晶体系内的流动单元容易被激活, 但在此过程中材料发生蠕变的时间极短, 体系内的黏性流动不能得到充分发展, 再者, 由于瞬时弹性性能增强的缘故, 材料表现出了较强的宏观弹性特征; 在保载阶段, 流动因子  $\rho$  和分数阶次  $\alpha$  随加载速率的增加都呈增大趋势, 且  $\alpha$  的取值范围 (0.605—0.921) 明显大于在加载阶段的取值范围 (0.263—0.022), 材料表现出较强的宏观黏性流动特征, 表明在加载过程中体系内被激活的流动单元在保载阶段得到了充分发展. 因此, 随着加载速率的增大, 在保载阶段表现出的蠕变长度越长.

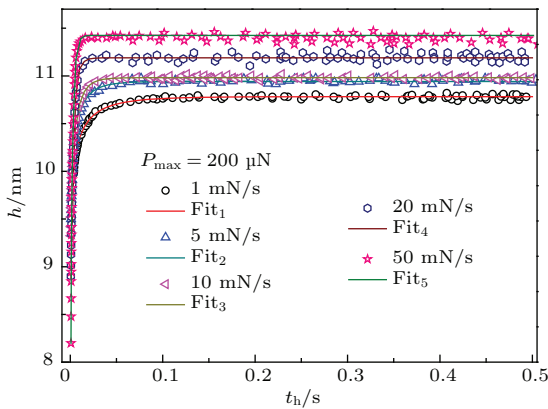


图 5 不同加载速率下保载阶段的拟合曲线图

Fig. 5. The time-displacement curves in load-holding stage of different loading rates fitted by fractional order model.

此外, 在拟合过程中还发现, 本文所建分数阶模型对不同取值范围内的分数阶次  $\alpha$  存在不同程度的敏感性. 例如, 拟合加载速率为 5 mN/s 的加载或保载阶段的实验曲线时, 在加载阶段, 当分数阶次  $\alpha$  在 0.01—0.4 范围时,  $P-h$  曲线出现了明显的分离现象, 表现出较强的分数阶次  $\alpha$  敏感性, 而在 0.4—0.8 范围时, 不同  $\alpha$  值的  $P-h$  曲线几乎重合在一起 (如图 6 所示), 表现出极弱的分数阶次  $\alpha$  敏感性. 拟合保载阶段的  $h-t$  曲线, 当分数阶次  $\alpha$  在 0.1—0.9 范围取值, 不同  $\alpha$  值的  $h-t$  曲线呈现出明显的分离现象 (如图 7 所示), 表现出较强的分数阶次  $\alpha$  敏感性. 结合前文分析可以得到: 在非晶合金的宏观弹性区内进行加载-保载纳米压痕实验, 在加载过程中材料表现出更多的宏观弹性特征, 而在保载阶段则表现出更多的宏观黏性流动特征, 随着加载速率的增大, 这一趋势越明显.

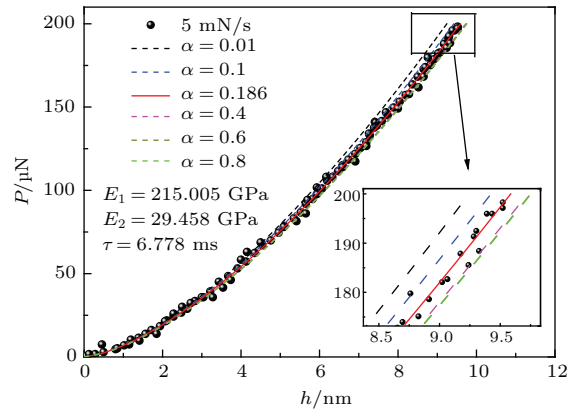


图 6 不同分数阶参数  $\alpha$  拟合加载速率为 5 mN/s 的加载阶段的载荷-位移曲线图

Fig. 6. The load-displacement curves of loading rate at 5 mN/s in loading stage fitted by fractional order model with different fractional parameter  $\alpha$ .

表 1 不同加载速率曲线在不同阶段的拟合参数

Table 1. The fitting parameters of different loading rates curves in different stages.

加载速率/(mN/s)	$E_1$ /GPa	$E_2$ /GPa	$\tau$ /ms	$\alpha$	$\rho = E_2/E_1$	相关性系数 $r^2$	
加	204.907±3.281	27.816±0.621	5.906±0.121	0.263±0.011	0.135	0.9753	
载	215.005±3.533	29.458±0.532	6.778±0.342	0.186±0.002	0.137	0.9882	
阶	220.001±2.566	33.209±3.332	8.239±0.136	0.151±0.024	0.151	0.9675	
段	20	228.137±3.841	39.101±2.561	8.539±0.043	0.089±0.015	0.171	0.9726
	50	251.581±4.823	46.203±2.691	9.616±0.081	0.022±0.025	0.183	0.9654
保	185.183±6.281	35.744±3.426	4.012±0.312	0.605±0.124	0.193	0.9862	
载	181.673±4.513	54.802±4.213	3.619±0.252	0.712±0.212	0.301	0.9673	
阶	10	180.615±3.662	60.846±3.121	2.992±0.211	0.859±0.113	0.337	0.9761
段	20	174.952±4.621	61.012±5.632	1.968±0.315	0.832±0.215	0.349	0.9832
	50	169.642±5.712	67.021±3.152	1.501±0.263	0.921±0.013	0.395	0.9647

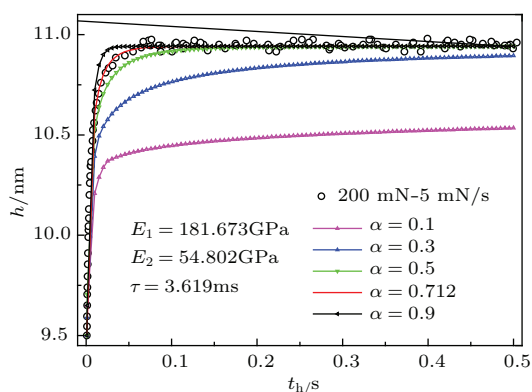


图7 不同分数阶参数 $\alpha$ 拟合加载速率为5 mN/s的保载阶段的时间-位移曲线图

Fig. 7. The time-displacement curves of loading rate at 5 mN/s in load-holding stage fitted by fractional order model with different fractional parameter  $\alpha$ .

## 4 结 论

利用分数阶黏弹单元替代经典模型的黏壶构建了分数阶流变模型,并基于该模型对铁基块体非晶合金( $\text{Fe}_{41.5}\text{Co}_{27.6}\text{B}_{18.4}\text{Si}_{4.6}\text{Nb}_{3.9}\text{Cr}_4$ )在其表观弹性区的黏弹行为进行了分析,得到以下结论:

1) 在外加载荷作用下,铁基块体非晶合金在其表观弹性区内具有明显的黏弹性能,并呈现出了显著的加载速率敏感性。

2) 由于分数阶次 $\alpha$ 的可变性,分数阶模型在拟合过程中克服了整数阶模型的拟合精度与参数准确性的不协调关系;相较于整数阶模型,分数阶模型不仅能更好地与实验数据符合,且拟合得到的弹性模量接近于材料在准静态条件下测得的实验值。

3) 根据不同阶段拟合得到的参数及分数阶次 $\alpha$ 的敏感性,得到了非晶合金在高速率加载过程中体系内的流动单元容易被激活,以及非晶合金在加载阶段以弹性特征为主和保载阶段以黏性流动特征为主的形变规律。

## 参考文献

[1] Liu L, Sun M, Chen Q, Liu B, Qiu C L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1930 (in Chinese) [柳林, 孙民, 谌祺, 刘兵, 邱春雷 2006 物理学报 **55** 1930]  
 [2] Yang L, Guo G Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 126101  
 [3] Imran M, Hussain F, Rashid M, Cai Y Q, Ahmad S A 2013 *Chin. Phys. B* **22** 096101  
 [4] Xu F, Ding Y H, Deng X H, Zhang P, Long Z L 2014 *Phys. B* **450** 84

[5] Liao G K, Long Z L, Yang M, Chen S M, Zou P 2014 *Chin. J. Nonfe. Met.* **24** 2762 (in Chinese) [廖光开, 龙志林, 杨妙, 陈舒敏, 邹萍 2014 中国有色金属学报 **24** 2762]  
 [6] Lu Z, Jiao W, Wang W H, Bai H Y 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 045501  
 [7] Wang W H 2011 *Physics* **40** 701 (in Chinese) [汪卫华 2011 物理 **40** 701]  
 [8] Yang Y, Zeng J F, Volland A, Blandin J J, Gravier S, Liu C T 2012 *Acta Mater.* **60** 5260  
 [9] Peng H L, Li M Z, Sun B A, Wang W H 2012 *J. Appl. Phys.* **112** 023516  
 [10] Yang Y, Zeng J F, Ye J C, Lu J 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 261905  
 [11] Ye J C, Lu J, Liu C T, Wang Q, Yang Y 2010 *Nat. Mater.* **9** 619  
 [12] Huo L S, MA J, Ke H B 2012 *J. Appl. Phys.* **111** 113522  
 [13] Huo L S, Zeng J F, Wang W H, Liu C T, Yang Y 2013 *Acta Mater.* **61** 4329  
 [14] Peng J, Long Z L, Wei H Q, Li X A, Zhang Z C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4059 (in Chinese) [彭建, 龙志林, 危洪清, 李乡安, 张志纯 2009 物理学报 **58** 4059]  
 [15] Chen W, Sun H G, Li X C 2010 *The use of fractional derivative modeling in mechanics and engineering problems* (Beijing: Science Press) p12 (in Chinese) [陈文, 孙洪广, 李西成 2010 力学与工程问题中的分数阶导数建模 (北京: 科学出版社)] p12  
 [16] Yin D S, Ren J J, He C L, Chen W 2007 *Chin. J. Rock Mech. Eng.* **26** 1899 (in Chinese) [殷德顺, 任俊娟, 和成亮, 陈文 2007 岩石力学与工程学报 **26** 1899]  
 [17] Chen H S, Li M M, Kang Y G, Zhang S L 2008 *Chem. J. Chin. Univ.* **29** 1271 (in Chinese) [陈宏善, 李明明, 康永刚, 张素玲 2008 高等学校化学学报 **29** 1271]  
 [18] Xu F 2012 *Ph. D. Dissertation* (Xiangtan: Xiangtan University) (in Chinese) [许福 2012 博士学位论文 (湘潭: 湘潭大学)]  
 [19] Mandelbrot B B 1982 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: W H Freeman) p14-19  
 [20] Ma D, Stoica A D, Wang X L 2009 *Nat. Mater.* **8** 30  
 [21] Zhang C Y 2006 *Viscoelastic Fracture Mechanics* (Beijing: Science Press) p16  
 [22] Koeller R C 1984 *J. Appl. Mech.* **51** 299  
 [23] Crothers D S F, Holland D, Kalmykov Y P, Coffey W T 2004 *J. Mol. Liq.* **114** 27  
 [24] Kai Diethelm 2002 *J. Math. Anal. Appl.* **265** 229  
 [25] Lee E H, Radok J R M 1960 *J. Appl. Mech.* **27** 438  
 [26] Wang Z F, Zhang G Z, Liu G 2008 *J. Chem. Eng. Chin. Univ.* **22** 351 (in Chinese) [王志方, 张国忠, 刘刚 2008 高校化学工程学报 **22** 351]  
 [27] Long Z L, Shao Y, Xie G Q, Zhang P, Shen B L, Inoue A 2008 *J. Allo. Comp.* **462** 52  
 [28] Wang W H 2014 *Sci. Sin-Phys. Mech. Astron.* **44** 396 (in Chinese) [汪卫华 2014 中国科学: 物理学力学天文学 **44** 396]



# Investigation on the viscoelastic behavior of an Fe-base bulk amorphous alloys based on the fractional order rheological model\*

Liao Guang-Kai Long Zhi-Lin<sup>†</sup> Xu Fu Liu Wei Zhang Zhi-Yang Yang Miao

(College of Civil Engineering and Mechanics, Xiangtan University, Xiangtan 411005, China)

( Received 6 December 2014; revised manuscript received 5 February 2015 )

## Abstract

Combined with the microstructure evolution in amorphous alloys under the external load, a fractional order viscoelastic constitutive model is first derived by replacing a Newtonian dashpot in the classical Zener model with the fractional derivative Abel dashpot. Based on the Hertzian theory and the fractional order viscoelastic constitutive model, a relationship between displacement and load (or time) for an instrumental nanoindentation test with a spherical indenter is then proposed. Finally, a series of nanoindentation test data for an Fe-base bulk amorphous alloy are employed to verify the derived model, and its viscoelastic behavior in the apparent elastic region is analyzed in detail. Results show that the fractional order rheological model has higher fitting accuracy than that of the integer order model, and the fitting parameters of the proposed model are more suitable to reflect the effect of the loading rate on the viscoelastic behavior in the alloy studied. Variation of the above-mentioned fitting parameters exhibits a strong correlation with the microstructure evolution during the loading of this Fe-base amorphous alloy.

**Keywords:** bulk amorphous alloys, fractional order rheological model, nanoindentation, viscoelastic behavior

**PACS:** 61.43.Dq, 45.10.Hj

**DOI:** [10.7498/aps.64.136101](https://doi.org/10.7498/aps.64.136101)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51471139, 51071134, 51401176), the Provincial Key Program of Natural Science Foundation of Hunan, China (Grant Nos. 12JJ2024, 14JJ3078), and the Hunan Provincial Innovation Foundation for Postgraduate, China (Grant No. CX2014B278).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [longzl@xtu.edu.cn](mailto:longzl@xtu.edu.cn)