

含随机裂纹网络孔隙材料渗透率的逾渗模型研究

李乐 李克非

Permeability of cracked porous solids through percolation approach

Li Le Li Ke-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 136402 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.136402

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.136402>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I13>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

忆阻逾渗导电模型中的初态影响

Effects of pristine state on conductive percolation model of memristor

物理学报.2013, 62(9): 096401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.096401>

Erdős Rényi 随机网络上爆炸渗流模型相变性质的数值模拟研究

Numerical simulations of the phase transition property of the explosive percolation model on Erdős Rényi random network

物理学报.2013, 62(4): 046401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.046401>

二分网上的靴襻渗流

Bootstrap percolation on bipartite networks

物理学报.2012, 61(16): 166402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.166402>

简谐振子免疫优化算法求解异构无线网络垂直切换判决问题

Simple harmonic oscillator immune optimization algorithm for solving vertical handoff decision problem in heterogeneous wireless network

物理学报.2012, 61(9): 096401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.096401>

含随机裂纹网络孔隙材料渗透率的逾渗模型研究

李乐 李克非[†]

(清华大学土木工程系, 教育部土木工程安全与耐久重点实验室, 北京 100084)

(2014年11月19日收到; 2015年2月4日收到修改稿)

采用逾渗理论对含随机裂纹网络的孔隙材料渗透性进行研究. 开裂孔隙材料渗透率的影响因素包括裂纹网络的几何特征、孔隙材料本体渗透率以及裂纹开度, 本文使用连续区逾渗理论模型建立了渗透率的标度律. 对于裂纹网络的几何特征, 本文基于连续区逾渗理论并考虑裂纹网络的分形特征提出了有限区域内二维随机裂纹网络的连通度定义; 对随机裂纹网络的几何分析表明, 随机裂纹局部团簇效应会降低裂纹网络的整体连通性, 随机裂纹网络的标度指数并非经典逾渗理论给出的固定值, 而是随着网络的分形维数的减小而增大. 本文在网络连通度和主裂纹团的曲折度的基础上, 提出了开裂孔隙材料渗透率标度律的解析表达, $K = K_0(K_m, b)(\rho - \rho_c)^\mu$, 分别考虑了裂纹网络的几何逾渗特征 $(\rho - \rho_c)^\mu$ 、孔隙材料渗透率 K_m 以及裂纹开度比 b ; 对有限区域含有随机裂纹网络的孔隙材料渗透过程的有限元模拟表明, K_0 在裂纹逾渗阈值附近与 b 呈指数关系, 但当裂纹的局部渗透率与 K_m 比值高于 10^6 后, 开度比 b 对渗透率不再有影响.

关键词: 裂纹网络, 渗透率, 逾渗阈值, 连通度

PACS: 64.60.ah, 62.20.mt, 64.60.aq, 05.60.-k

DOI: 10.7498/aps.64.136402

1 引言

多相复合材料的物理性质与各相的性质及空间分布等微观结构相关. 固体材料在力学荷载和环境因素作用下会产生裂纹. 裂纹一旦产生、扩展和连通后, 就成为外界与材料内部进行物质与能量交换的通道, 对材料的使用性能影响显著. 就孔隙材料而言, 其耐久性与材料渗透性直接相关^[1,2], 裂纹网络会显著影响其长期耐久性. 如果将孔隙材料视为均匀基体, 则开裂孔隙材料可以认为是由裂纹与基体两相组成. 在裂纹开展较少、分布较均匀的情况下, 可采用有效介质理论 (effective medium theory, EMT) 来分析材料的渗透性. 材料损伤的累积会使裂纹密度增加, 强化裂纹之间的相互作用, 裂纹之间的相互连通作用显得越来越重要^[3]. 当裂纹连通形成网络, 连通程度对材料整体的渗透性影响显著; 此时裂纹网络状态明显超出了 EMT 理论中对基体-夹杂拓扑假设的适用范围^[4]. 因此, 采用

EMT 中各种考虑夹杂相互作用的模型均难以描述裂纹网络对材料渗透性的影响.

考虑裂纹网络连通性对渗透性影响的方法之一是逾渗理论. 逾渗理论由 Broadbent 和 Hamersley^[5] 于 1957 年提出, 用来描述流体在孔隙介质中的流动. 近年来, 已有研究者将逾渗概念应用于含裂纹网络的固体材料中. 刘志峰等^[6] 基于键逾渗建立了均匀分布的随机多孔介质逾渗模型, 指出了渗透率在逾渗临界点处的标度指数依赖于局部渗透率分布函数的具体参数. 冯增朝等^[7] 建立了网格模型, 采用座逾渗原理模拟孔隙介质, 并在此基础上叠加随机裂纹, 统计了孔隙裂纹双重介质的逾渗规律. 早在 1990 年 Hestir 和 Long^[8] 就将二维的 Poisson 网络等效到正方形中, 用以计算网络的渗透率; Leung 等^[9] 将随机裂纹网络等效到正方形中, 得到棋盘格渗透率 K_{CB} , 并指出可以采用 K_{CB} 来表征二维裂纹网络的渗透性, 但是该研究并没有得到渗透率的逾渗现象. 以上研究中方格模型和原随机网络等价的等效性至今仍然存在争议, 尤其对

[†] 通信作者. E-mail: likefei@tsinghua.edu.cn

于裂纹密集的情况. 对于随机裂纹网络, 裂纹可以随机分布在研究区域内的任意位置. 因此如何定义网络逾渗的基本变量, 即经典逾渗理论中的占座概率 p , 成为一个基本问题. 文献中不同学者给出了不同的定义方法^[10-14]. 对于裂纹之间的连通性, 文献中最早将其定义为每条裂纹上的交点数^[15], 或者连通部分裂纹网络的密度占总体裂纹网络密度的比例^[16]. 但对于局部连通的密集裂纹网络, 文献中已有的定义^[15-17]并不能合理反映裂纹的团簇效应对裂纹网络渗透率的影响. 因此如何准确定量表征随机裂纹网络的连通程度, 也是尚未解决的问题. 另外, 如何定量表征裂纹开度对渗透率标度律影响的研究, 目前文献中仍然没有清晰的结论.

针对上述研究不足, 本文展开对含随机裂纹网络孔隙材料渗透率逾渗模型的研究. 本文使用连续区逾渗理论对随机裂纹网络进行几何特征分析, 采用裂纹面密度作为逾渗基本变量(占座概率), 计算不同分形特征裂纹网络的逾渗阈值, 探讨不同裂纹网络在逾渗阈值附近标度指数的变化规律; 然后基于裂纹网络的分形特征提出了连通度的定义方法, 并考虑裂纹网络的连通度和主裂纹团的曲折度给出了渗透率标度律的解析形式; 最后基于有限元数值工具, 对逾渗阈值附近含有二维随机裂纹网络孔隙材料的有效渗透率进行数值分析, 探讨裂纹开度对渗透率标度律的影响规律, 验证逾渗模型解析解的有效性.

2 二维随机裂纹网络形貌分析

2.1 逾渗理论

经典逾渗理论中网格逾渗包括座逾渗和键逾渗. 网格逾渗的占座概率 p 取值在 0 到 1 之间, 在逾渗阈值 p_c 附近逾渗模型存在一个幂律类型的奇异性. 标度理论预测了决定奇异性的标度指数的存在, 且标度指数依赖于逾渗的空间维度. 对于无穷大的研究区域, 在阈值附近的标度理论可描述为

$$P(p) \propto (p - p_c)^\beta, \quad \xi(p) \propto (p - p_c)^{-\nu}, \quad (1)$$

其中, P 是座或键属于最大连通团的概率, ξ 是关联长度, 标度指数 β 和 ν 具有不变性, 即只依赖于逾渗的空间维数、与逾渗的几何特征无关^[18]. 然而, 阈值 p_c 依赖于网格的几何特征. 目前为止, 人们已经使用数值方法获得了不同几何特征的网格对应

的座或键逾渗阈值^[19]. 在有限的研究区域 $L \times L$ 内, 逾渗阈值还依赖研究区域的尺度 L , 逾渗发生时可能同时存在两个或以上的团贯穿研究区域. 同时, 有限区域的逾渗标度律也会受到区域尺度 L 的影响:

$$P(L, p) \propto (p - p_c)^\beta h[(p - p_c)L^{1/\nu}], \quad (2)$$

其中 Stauffer^[18] 指出 h 是一个高斯函数.

本文采用连续区逾渗模型来研究随机裂纹网络, 裂纹随机分布在连续(孔隙)介质中. 裂纹并不限定为网格中的座或者键, 裂纹的交点数也不限定为某一确定数值; 采用无量纲的裂纹面密度作为逾渗基本变量(占座概率),

$$\rho = \sum_{i=1}^N l_i^2 / 4L^2, \quad (3)$$

其中, 有限区域含有 N 条裂纹, l_i 为第 i 条裂纹的长度. 逾渗阈值 ρ_c 为有限区域出现逾渗的分界点: $\rho \geq \rho_c$ 时出现贯通的裂纹团; $\rho < \rho_c$ 时裂纹团处于未贯通状态.

2.2 二维裂纹网络的生成

首先定义无量纲尺度 x 作为有限区域二维随机网络的基本几何标度: $x = L/l$, 其中 L 为研究区域尺度, l 为裂纹长度. 以下研究中, 裂纹网络的裂纹长度服从等长分布, $l_i = l$. 本文的裂纹网络生成采用 $x = 5, 10, 15, 20, 25, 30$; 裂纹的开度由裂纹开度与长度的比值 b 来表征. Zhou 等^[20] 对力学加载下混凝土材料的裂纹网络进行了几何分析, 发现裂纹开度与裂纹长度直接相关. 借用该项研究结果, 本文的二维随机网络的裂纹开度比取值范围为 $b = 0.001-0.028$ 之间, 对应的裂纹平均长度为 3.6mm, 裂纹开度为 5 到 100 μm . 二维随机裂纹网络的生成过程如下: 使用 Monte Carlo 随机模拟方法, 依据裂纹长度和取向的统计分布特征, 设定裂纹的密度和裂纹之间的交点数, 对裂纹进行抽样、投放. 当裂纹与边界相交时, 剪去超出边界部分. 释放对裂纹的交点数的控制可得到无关联的随机裂纹网络, 如图 1(a) 所示, $\rho = 0.75, x = 20$. 通过控制裂纹的交点数可以得到不同连通程度的裂纹网络(关联裂纹网络), 图 1(b) 所示为生成的关联裂纹网络, $\rho = 0.75, x = 20, n_{\text{inter}}/N = 3$.

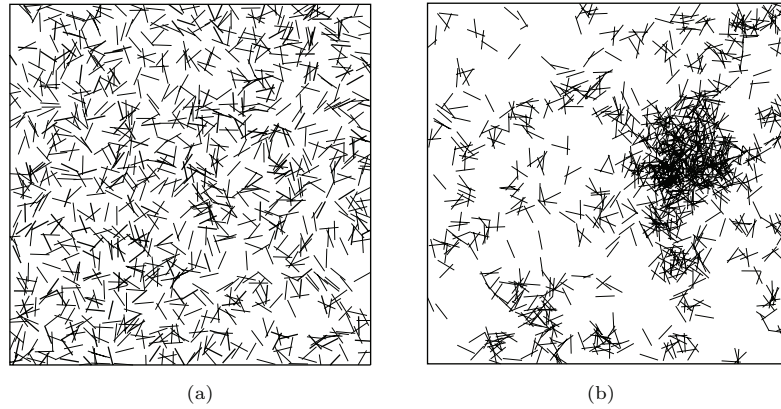


图1 二维随机裂纹网络的生成 (a) 无关联裂纹网络; (b) 关联裂纹网络

Fig. 1. Two dimensional random crack networks: uncorrelated network (a) and correlated network (b).

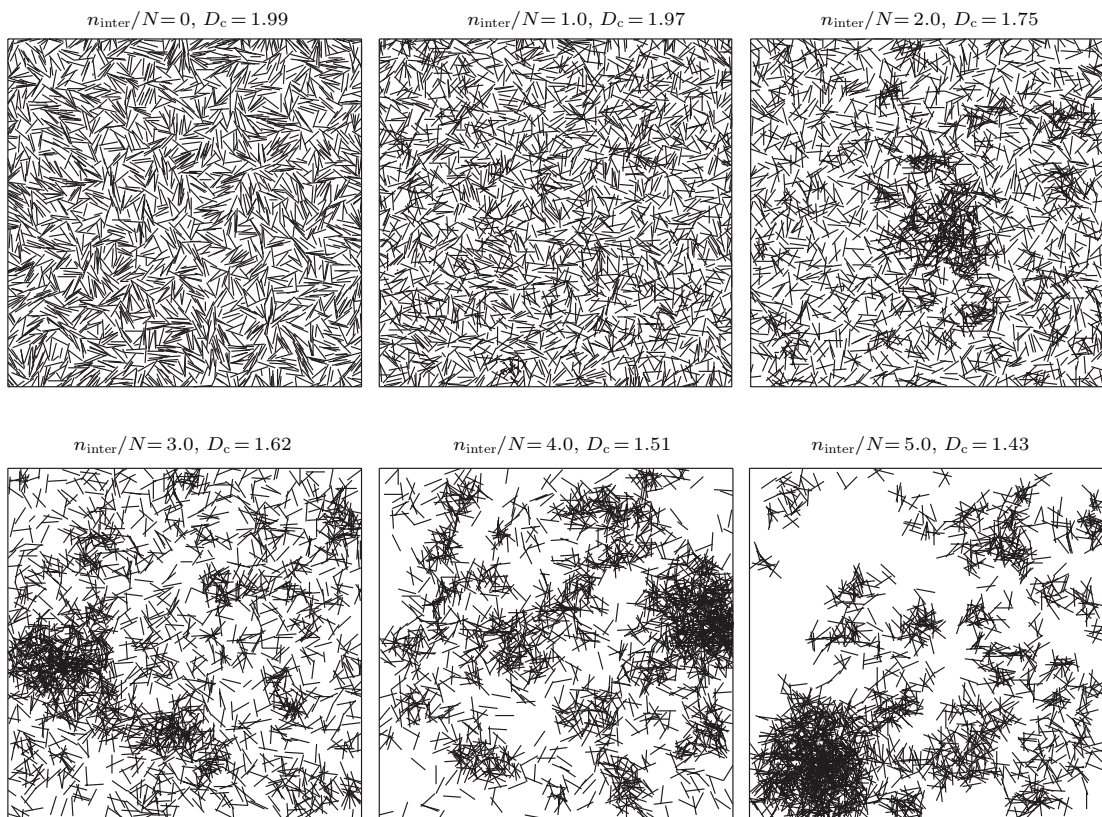


图2 不同分形特征的裂纹网络

Fig. 2. Crack networks with different fractal dimension.

本文采用关联维数 D_c 来表征裂纹网络的连通特征. 采用两点关联方程^[21]来表征裂纹的空间分布: $C(r) = N(r)/N$, $N(r)$ 表示裂纹中点两两相距小于 r 的裂纹团中裂纹的个数或者累计裂纹长度, N 是裂纹总数或者裂纹总的累计长度. 若两条裂纹相距小于 r , 则认为两者具有很强的关联性. $C(r) \propto r^{D_c}$, 指数 D_c 即为关联维数. 如图2, $\rho = 1.5, x = 30$, 随着交点数 n_{inter}/N 的增加, 裂纹

网络出现了大小不等的裂纹集团, D_c 可以表征具有不同局部特征的裂纹网络的团簇效应.

2.3 裂纹网络逾渗参数分析

2.3.1 逾渗阈值

逾渗阈值是标度问题中最重要的参数之一. 本文计算了三种不同关联维数裂纹网络的逾渗阈值 ($D_c = 2.0, 1.75, 1.62$): 裂纹密度取值在 0 到 3 之间,

间隔0.05取一个密度点; 固定 x , 每个密度点进行400次的Monte Carlo模拟, 若出现了贯穿左右边界的裂纹团, 就将其记为逾渗网络, 统计出逾渗网络的个数, 计算逾渗概率, 从而得到在某一固定 x 下随裂纹密度变化的逾渗概率曲线; 变化无量纲尺度 x , 直至分析结束. 逾渗分析如图3所示: x 越大, 逾渗概率曲线在阈值附近变化越陡, 越接近于无限尺度上的逾渗现象; 不同 x 下得到的逾渗概率曲线的交点即为逾渗阈值. 对于无关联裂纹网络 ($D_c = 2.0$), $\rho_c = Nl^2/4L^2 = 1.43$, 与Bour^[10]给出的阈值 $Nl^2/L^2 = 5.6$ 相一致. 其他关联维数的裂纹网络, $D_c = 1.75, 1.62$, 对应的逾渗阈值分别为 $\rho_c = 1.68, 1.78$.

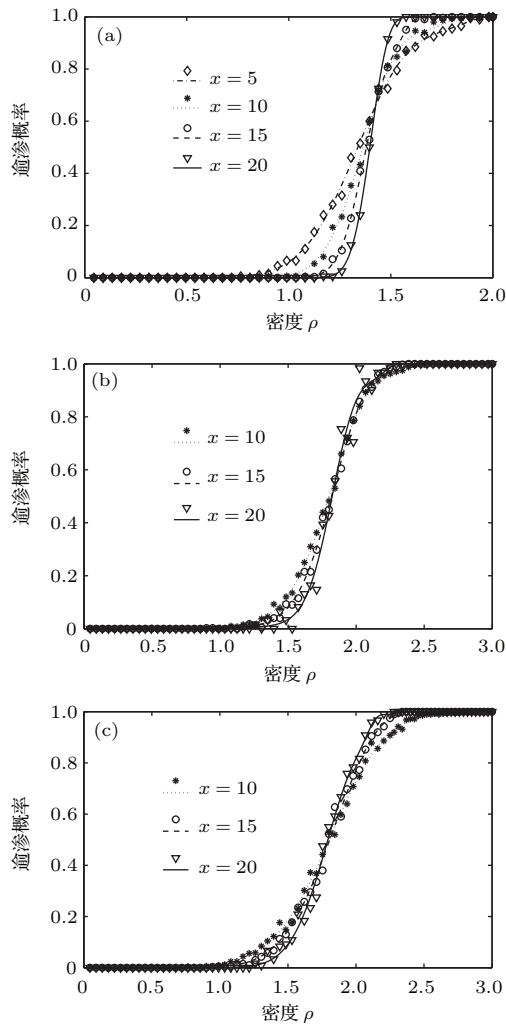


图3 有限尺度上不同裂纹网络逾渗阈值的计算 (a) $D_c = 2.0, x = 5, 10, 15, 20$; (b) $D_c = 1.75, x = 10, 15, 20$; (c) $D_c = 1.62, x = 10, 15, 20$

2.3.2 标度指数

1) ν

固定尺度 x 下, 当裂纹密度逐渐增加, 一次Monte Carlo模拟可以得到一个临界阈值 $\rho_c(x)$. 由于裂纹网络生成过程的随机性, 每次Monte Carlo模拟可能得到不同的 $\rho_c(x)$, 重复400次模拟, 可以得到 $\rho_c(x)$ 的均值和标准差 $\Delta(x)$. 如图4(a)所示, $\rho_c(x)$ 随着 x 的增大而增大. x 越大, 越接近于无限尺度, 标准差 $\Delta(x)$ 就越小, $\rho_c(x)$ 就越接近于无限研究尺度上真实的阈值 ρ_c . 标准差 $\Delta(x)$ 与 x 间存在幂律关系, $\Delta(x) \propto x^{-1/\nu}$. 在双对数坐标下, 直线的斜率即为 $-1/\nu$. 对于无关联裂纹网络 ($D_c = 2.0$), $1/\nu \approx 0.75$, 与经典逾渗理论中 $1/\nu = 0.75$ 相符合. 对于 $D_c = 1.97, 1.75, 1.62, 1.51$ 的不同分形特征的裂纹网络, 指数 $1/\nu$ 的取值分别为0.704, 0.408, 0.303, 0.231, 由图4(b)可以看出 ν 依赖裂纹网络的分形特征.

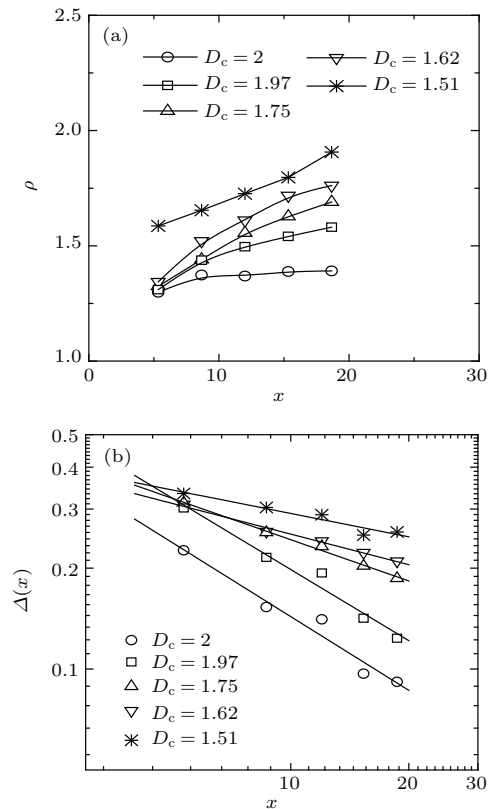


图4 不同 D_c 的随机裂纹网络 (a) ρ - x 曲线; (b) $\Delta(x)$ - x 曲线

Fig. 4. Crack networks with different D_c : (a) ρ - x curve; (b) $\Delta(x)$ - x curve.

2) β

基于以上在有限尺度上 $\rho_c(x)$ 的讨论, 若将 $\rho_c(x) - \rho_c \propto x^{-1/\nu}$ 代入(2)式中可得 $P \propto x^{-\beta/\nu}$.

如图5(a)所示不同的 x 下 P 的取值. 在双对数坐标下, 可得指数 β/ν 随 D_c 的变化规律. 对于无关联裂纹网络($D_c = 2.0$), $\beta/\nu \approx 0.106$, 与经典逾渗理论中 $\beta/\nu = 0.104$ 相符合. 不同分形特征的裂纹网络, β 和 ν 的取值也不同, 将上述结果汇总在图5(b)中.

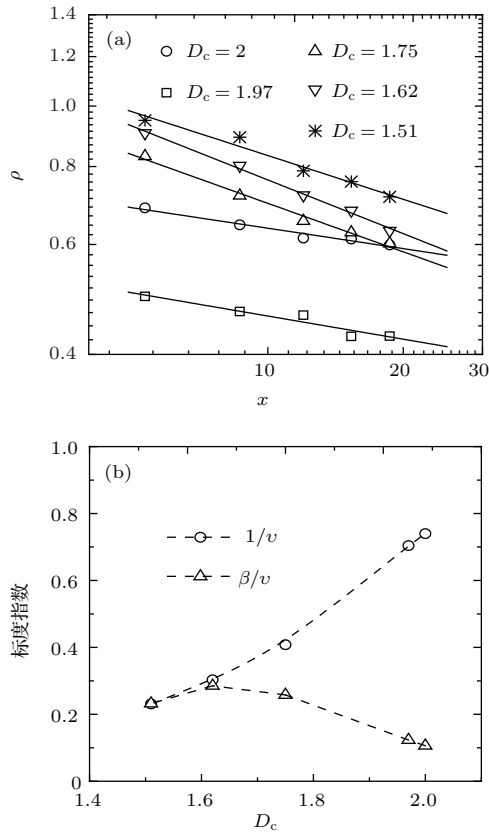


图5 不同 D_c 的随机裂纹网络 (a) P - x 曲线; (b) 标度指数随 D_c 的变化规律
Fig. 5. Crack networks with different D_c : (a) P - x curve; (b) critical exponents in terms of D_c .

2.3.3 连通度

开裂孔隙材料的渗透率会随着裂纹连通度的增加而增大, 但如何合理表征连通程度是本研究关注的问题. 连通度最早定义为每条裂纹上的交点数^[15], 但从图2的裂纹网络可以发现, 随着裂纹交点数的增加裂纹的局部连通加强, 但是对网络整体的连通作用并不明显. 也就是说, 一个局部连通的密集裂纹网络, 其网络整体渗透率不一定大. 以等长分布的随机裂纹网络为例, $x = 5$, $\rho = 1.5$, 裂纹交点数 n_{inter}/N 在0到5之间取值, 其网络的逾渗概率如图6所示. 随着裂纹交点数的增加($n_{\text{inter}}/N = 0-1.5$), 逾渗概率首先随之增加; 进一步增大交点数, 逾渗概率反而降低. 因此以

往研究中的连通度的定义方法并不能合理地描述裂纹网络的局部团簇效应. 基于逾渗理论本文给出了一个新的连通度定义方法. 在有限的研究尺度 L 内,

$$f = \frac{\xi}{L} (P(\rho, L))^{(3-D_c)}, \quad (4)$$

其中 ξ 是裂纹团的关联长度, $P(\rho, L)$ 是某一裂纹属于最大裂纹团的概率, 可以表达为最大裂纹团中裂纹的累积面密度占总体裂纹面密度的比例.

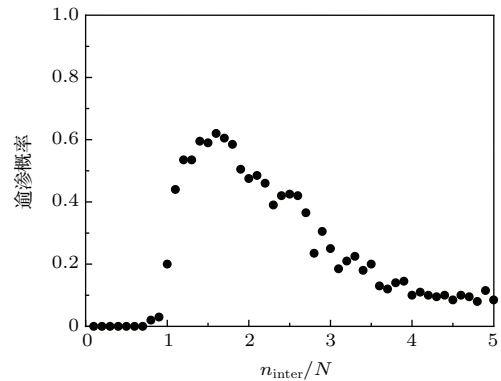


图6 逾渗概率与交点数的关系
Fig. 6. Percolation probability in terms of intersection ratio.

连通度 f 的定义中包含了裂纹网络的分形特征 D_c : 团簇效应越明显, D_c 越小, f 也越小, 也就是只出现局部连通的裂纹网络, 其整体连通度可能很小. 如果研究区域内所有的裂纹归属于同一个贯通的裂纹团, 则有 $P = 1, L = \xi$, 此时连通度 f 达到最大值1. 因此, 连通度 f 的取值范围在0到1之间. 对于无限研究尺度 $L \rightarrow \infty$, 在逾渗阈值 ρ_c 附近, 将(1)式代入(4)式中, 可得

$$f \propto (\rho - \rho_c)^{-\nu+(3-D_c)\beta}. \quad (5)$$

为了验证上述连通度 f 定义的合理性, 本文采用Monte Carlo模拟生成不同密度的无关联裂纹网络, $\rho = 0-2, x = 20, D_c = 2.0$, 每隔0.1取一个密度点, 每个点生成独立的200个裂纹网络, 求出每个网络的连通度, 取均值, 即为该密度所对应的裂纹网络的连通度, 分析结果见图7. 从图7(a)可以看出, 随着裂纹密度的增加, 连通度在某一密度附近(约在 $\rho = 1-1.5$ 之间)增加较快, 说明连通度的定义符合在阈值附近逾渗模型的奇异性. 固定裂纹密度 ρ , 通过控制裂纹的交点数可以得到不同的 f , 总是存在一个临界连通度 f_c , 当连通度大于 f_c 时, 出现逾渗. 变化 ρ , 可以得到 f_c - ρ 曲线, 如图7(b), 图中每个点是100次模拟得到 f_c 的平均值.

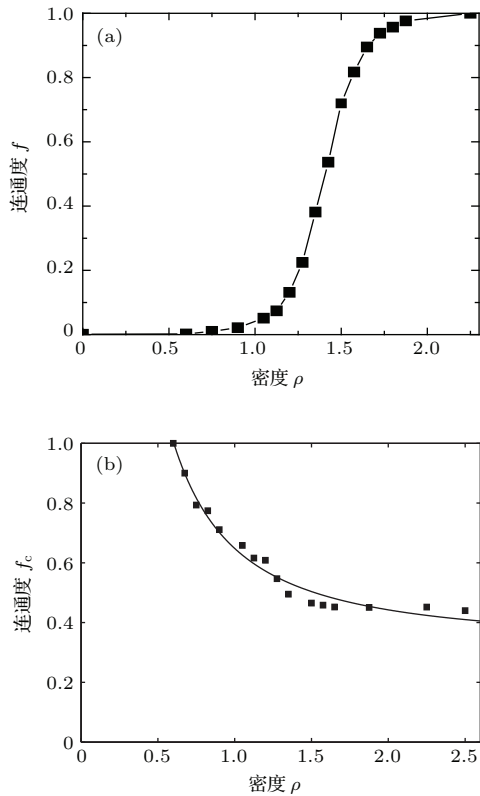


图7 连通度随裂纹密度的变化规律 ($x = 20, D_c = 2.0$)
 (a) $f-\rho$ 曲线; (b) $f_c-\rho$ 曲线
 Fig. 7. Connectivity in terms of crack density ($x = 20, D_c = 2.0$): (a) $f-\rho$ curve; (b) $f_c-\rho$ curve.

3 裂纹网络的渗透率

3.1 渗透率的标度律

孔隙材料渗透率会随着流体传输路径的增长而降低. 裂纹网络中起主导传输作用的裂纹团称为主裂纹团, 如图8所示. 假设主裂纹团中裂纹的累积长度为 L_ξ , 贯穿裂纹团的直线距离为 L_s , 由于主裂纹团是曲折的, 有 $L_\xi > L_s$, 裂纹团的曲折度可表征为 $\tau = L_\xi / L_s$. 在分形的概念中, 假如选用码尺 ϵ 测量流动路径, 量测长度可以近似的表示为

$$L_\xi(\epsilon) = L_s \epsilon^{1-D_{opt}}, \quad (6)$$

其中 D_{opt} 为最佳传输路径的分形维数, 它刻画了路径的粗糙程度. Sheppard 等^[22] 给出二维裂纹网络的分形维, $D_{opt} = 1.21$. 当选大的码尺去度量流动路径, 一些微裂纹就被忽略掉, L_ξ 会越小; 相反码尺越小, 得到的 L_ξ 越大. 当 $\epsilon \rightarrow 0$, L_ξ 包含了所有微裂纹的长度信息. 如果取 ϵ 正比于 ξ^{-1} , 上式可写为

$$L_\xi = L_s(\xi)^{D_{opt}-1} \propto L_s((\rho - \rho_c)^{-\nu})^{D_{opt}-1}, \quad (7)$$

代入曲折度的定义中可得

$$\tau(\rho) \propto (\rho - \rho_c)^{\nu(1-D_{opt})}. \quad (8)$$

含有随机裂纹网络的孔隙材料的渗透性依赖于裂纹网络的几何特征、裂纹微观信息以及基体材料的渗透率: $K = K(K_m; \rho, f, \tau, b)$, 主要参数包括裂纹的密度 ρ , 开度 b , 连通度 f , 曲折度 τ 和基体的渗透率 K_m . 若 $L \rightarrow \infty$, 在逾渗阈值附近 $\rho \rightarrow \rho_c$, 同时考虑裂纹网络的连通度和主裂纹团的曲折度, 渗透率可以表征为

$$K = K_0(K_m, b)(\rho - \rho_c)^\mu, \quad (9)$$

$$\mu \propto (-\nu + (3 - D_c)\beta) - \nu(1 - D_{opt}),$$

上式中标度部分表征主裂纹团的性质, 它依赖于裂纹的密度和裂纹网络的几何形貌特征, 其中指数 μ 的第一部分 $(-\nu + (3 - D_c)\beta)$ 来自连通度的贡献, 第二部分 $(-\nu(1 - D_{opt}))$ 为曲折度的贡献. 取 $D_{opt} = 1.21$, 根据上述计算的 ν 和 β 可求得对应不同的 D_c 渗透率的标度指数, 如表1所示. 对于指定的裂纹密度和裂纹网络, 开度对渗透性的影响包含在 K_0 中, $K_0 = K_0(K_m, b)$.

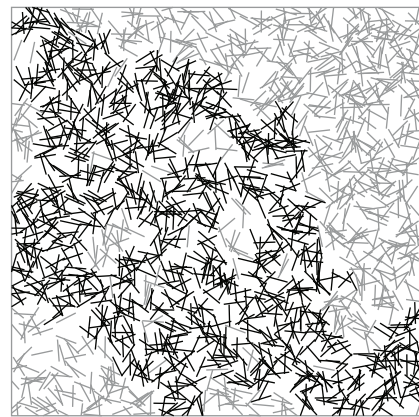


图8 裂纹网络及其主裂纹团的形貌: 等长分布随机裂纹 ($x = 20, \rho = 1.43, D_c = 2.0$)
 Fig. 8. Crack network and its backbone cluster at percolation: constant length distribution ($x = 20, \rho = 1.43, D_c = 2.0$).

表1 不同 D_c 对应的渗透率的标度指数
 Table 1 Scaling exponent of permeability for different D_c .

| 裂纹长度分布 | D_c | β | ν | μ |
|--------|-------|---------|-------|--------|
| 等长 | 2.0 | 0.143 | 1.351 | -0.924 |
| 等长 | 1.97 | 0.175 | 1.420 | -0.942 |
| 等长 | 1.75 | 0.632 | 2.451 | -1.146 |
| 等长 | 1.62 | 0.941 | 3.300 | -1.308 |
| 等长 | 1.51 | 1.004 | 4.329 | -1.924 |

3.2 二维裂纹网络渗过程的有限元分析

本文假定在含有裂纹网络的孔隙材料中流动的流体为不可压缩的牛顿流体. 在稳态渗流状态, 流体流速与压力梯度成正比: $\mathbf{q} = -\nabla p \times \mathbf{K}/\eta$, 其中 \mathbf{K} 是局部渗透率张量, η 为流体的动黏度, ∇p 为压力梯度. 如图 8 所示含有二维裂纹网络的渗流区域, 渗流方向沿 x 轴. 计算在左、右边界上施加压力边界条件:

$$p|_{\Gamma_1} = p_1, \quad p|_{\Gamma_2} = p_2. \quad (10)$$

上、下边界施加无流量边界条件,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_3, \Gamma_4} = \frac{K}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_3, \Gamma_4} = 0. \quad (11)$$

有限元网格中, 渗流区域孔隙材料采用三角形六节点单元, 裂纹采用二节点线单元; 使用有限元方法求得每个节点的压力 $p(x, y)$, 渗透流量可表示为

$$Q_x = \int_{\Gamma_y} -\frac{K}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dy, \quad (12)$$

其中 Γ_y 为垂直于渗透方向的任一截面. 裂纹网络的整体有效渗透率为

$$K_{\text{eff}} = \frac{Q_x \eta}{p_2 - p_1}. \quad (13)$$

3.3 数值分析

3.3.1 标度指数 μ

采用有限元数值分析得到不同裂纹密度对应的裂纹网络的渗透率, 结果如图 9 所示. 分析结构显示, 无关联裂纹网络 ($D_c = 2.0$) 的裂纹密度 ρ 接近 $\rho_c = 1.43$ 时, 裂纹网络出现逾渗, 有效渗透率 K_{eff} 增大了 4—5 个数量级.

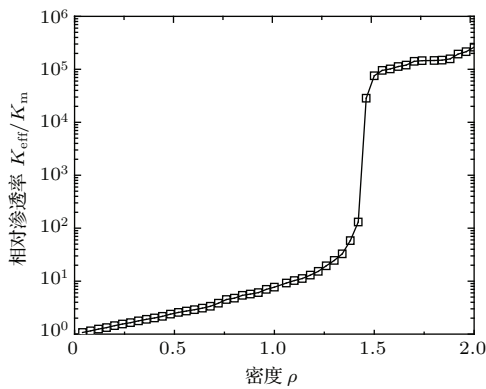


图 9 等长分布无关联随机裂纹网络的渗透率随 ρ 的变化 ($D_c = 2.0, x = 30$)

Fig. 9. Effective permeability in terms of crack density ($D_c = 2.0, x = 30$).

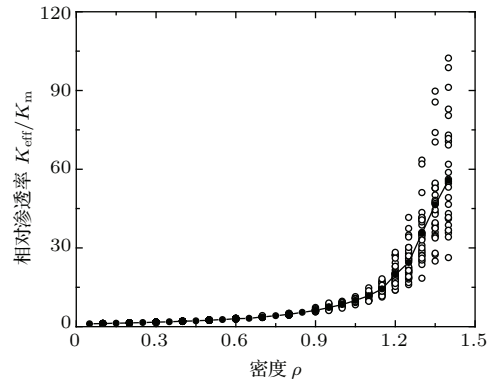


图 10 阈值以下无关联裂纹网络的相对渗透率 (实线为均值)

Fig. 10. Effective permeability of uncorrelated network below the threshold (solid line for mean values).

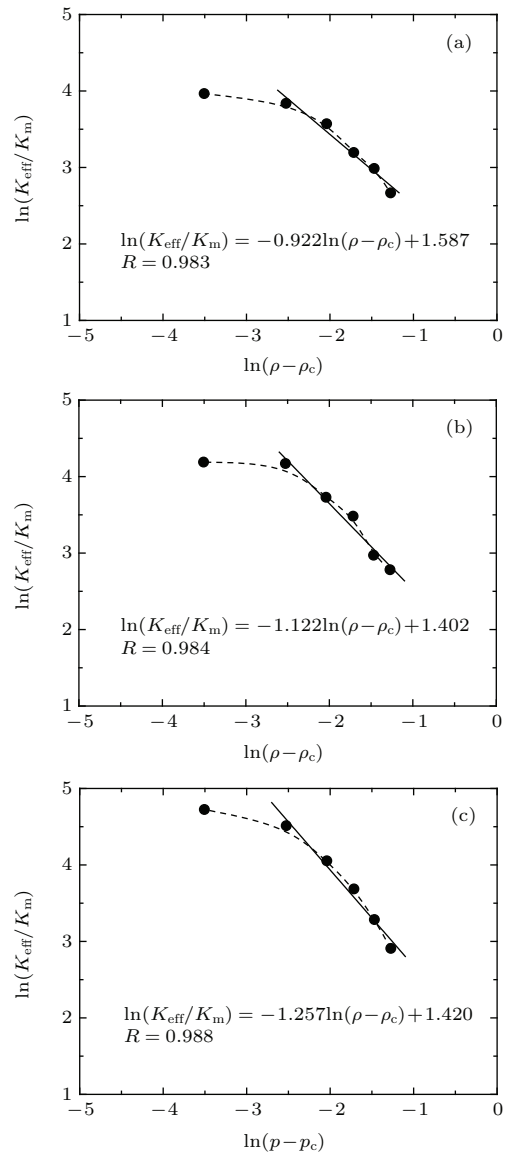


图 11 裂纹网络标度指数 μ 回归: (a) $D_c = 2.0$; (b) $D_c = 1.75$; (c) $D_c = 1.62$

Fig. 11. Regression of critical exponent of permeability μ : (a) $D_c = 2.0$; (b) $D_c = 1.75$; (c) $D_c = 1.62$.

本文计算了3种连通特性(关联维数 $D_c = 2.0, 1.75, 1.62$)下标度指数 μ 的取值, 裂纹密度取0到 ρ_c , 每间隔0.05取一个密度点, 每个密度点生成40个随机独立的裂纹网络, 每种裂纹形貌约进行1290次 Monte Carlo 模拟, 最终生成3870个裂纹网络. 通过有限元计算得出渗透率, 得出每个密度点的渗透率均值. 图10表示无关联裂纹网络 ($D_c = 2.0$) 的 K_{eff}/K_m 值数值结果, 图中实线表示不同密度点的渗透率均值. 由于有限尺度的影响, 变异系数由 $\rho = 0.05$ 时的0.5%增加为 $\rho = 1.4$ 时的19%. 取 ρ_c 附近 ($0.03 \leq |\rho - \rho_c| \leq 0.28$) 的数据点按照(9)式对进行标度参数 μ 的回归, 结果见图11; 三种裂纹网络 $D_c = 2.0, 1.75, 1.62$, 得到标度指数分别为 $\mu = -0.922, -1.122, -1.257$, 与表1结果符合很好, 验证了本文对随机网络几何特征分析的正确性.

3.3.2 裂纹开度比 b 对 K_0 的影响

设定裂纹的开度比在 $b = 0.001-0.028$ 之间, $x = 30, D_c = 2.0$. 裂纹的密度由0到逾渗阈值 ρ_c , 每间隔0.05取一个密度点. 图12给出了不同 b 下相对渗透率的变化规律, 可以看出在 $\rho \ll \rho_c$ 时, b 对渗透率的影响并不明显, 而对于完全连通的网络 ($\rho > \rho_c$), 连通通路已经形成, 开度对渗透率有直接的影响.

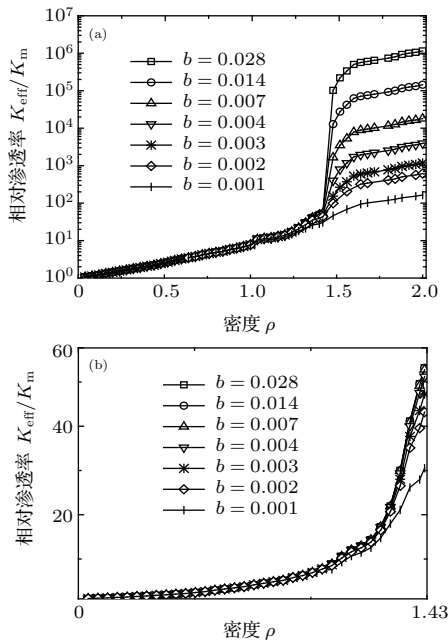


图12 不同 b 下相对渗透率的变化规律 ($x = 30, D_c = 2.0$)
Fig. 12. Effective permeability for different b ($x = 30, D_c = 2.0$).

图13给出了不同 b 与相对渗透率 K_{eff}/K_m 的关系, 可以看出在相对渗透率随着 b 的增加而增加, 当 $b > 0.004$ 时趋于平稳. 图14表示了(9)式中 $K_0(K_m, b)$ 与开度比 b 的关系, 由回归结果可以得到: 当 $b > 0.004$ 时, $K_0 \approx 4K_m$; 当 $b \leq 0.004$ 时, 在双对数坐标中 K_0 可以表达为 b 的线性表达式,

$$K_0 \propto b^\lambda, \quad b \leq 0.004. \quad (14)$$

对于 $D_c = 2.0, 1.75, 1.62$, λ 分别取值0.2, 0.477, 0.554, 因此指数 λ 可以回归为 D_c 的函数,

$$\lambda = -0.955D_c + 2.12. \quad (15)$$

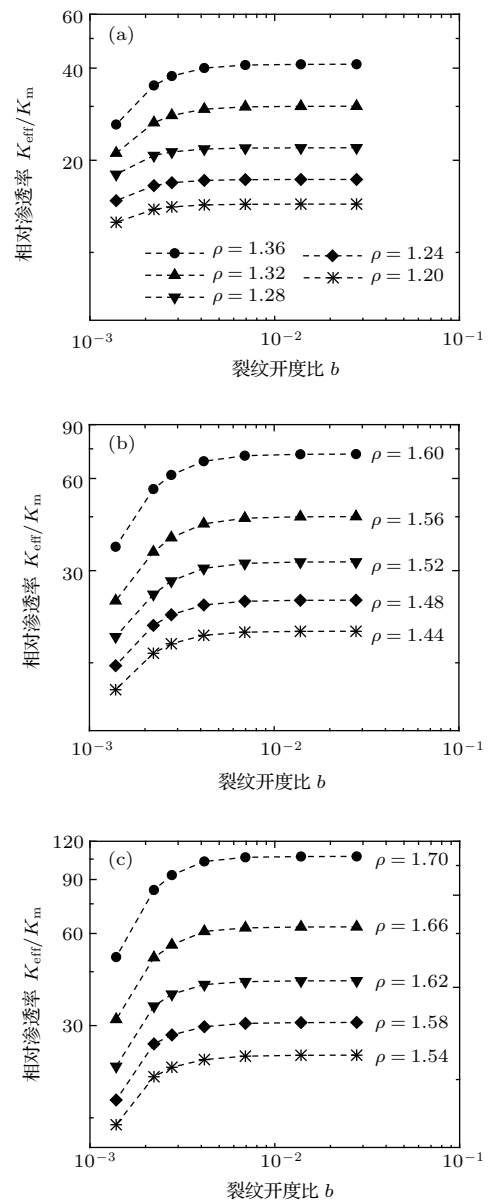


图13 不同 D_c 下相对渗透率 K_{eff}/K_m 与 b 的关系 (a) $D_c = 2.0$; (b) $D_c = 1.75$; (c) $D_c = 1.62$
Fig. 13. Effective permeability K_{eff}/K_m in terms of b for different D_c : (a) $D_c = 2.0$; (b) $D_c = 1.75$; (c) $D_c = 1.62$.

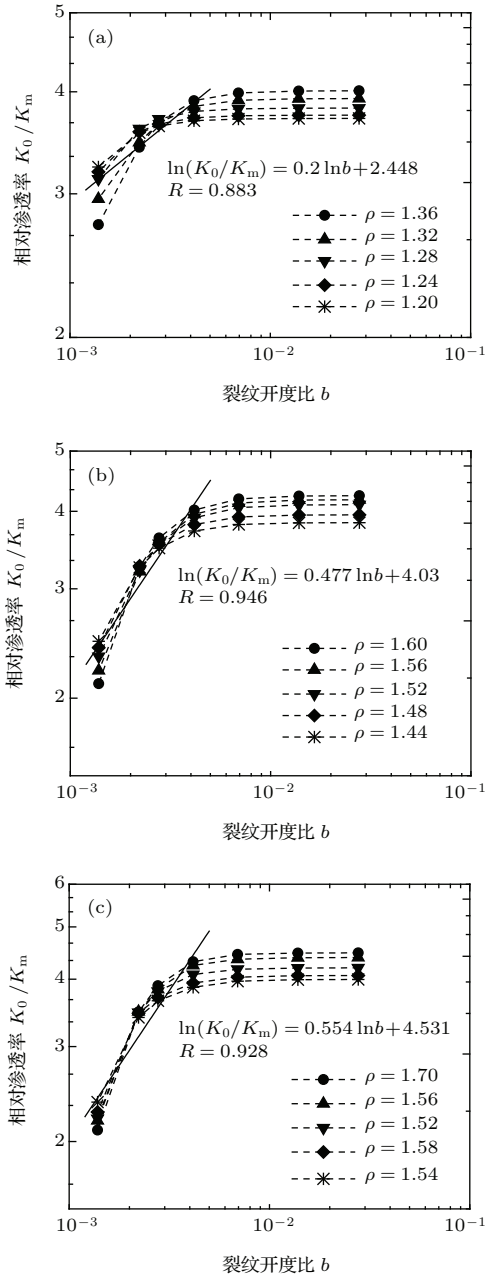


图 14 不同 D_c 下相对渗透率 K_0/K_m 与 b 的关系: (a) $D_c = 2.0$; (b) $D_c = 1.75$; (c) $D_c = 1.62$
 Fig. 14. Effective permeability K_0/K_m in terms of b for different D_c : (a) $D_c = 2.0$; (b) $D_c = 1.75$; (c) $D_c = 1.62$.

结合之前得到的不同分形特性裂纹网络的标度指数 μ , 可得对应裂纹网络的标度律

$$\begin{aligned}
 K &= K_0(\rho - \rho_c)^\mu \\
 &= \kappa K_m b^{-0.955 D_c + 2.12} (\rho - \rho_c)^\mu, \\
 & \quad b \leq 0.004, \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= K_0(\rho - \rho_c)^\mu \\
 &= 4 K_m (\rho - \rho_c)^\mu, \quad b > 0.004, \tag{17}
 \end{aligned}$$

式中的各参数拟合结果在表 2 中. 可以看出分形维数 D_c 越小, 由于团簇效应对流场的局部放大作用, κ 越大. 这里裂纹开度对渗透率影响的讨论采用了裂纹的开度比 b 作为基本变量, 以上的规律实际上是由裂纹的局部渗透率 K_{crack} 与孔隙材料基体渗透率 K_m 决定的. 采用立方定律假设, $b = 0.004$ (裂纹开度为 $15 \mu\text{m}$) 对应的裂纹渗透率 $K_{\text{crack}} = 1.875 \times 10^{-11} \text{m}^2$, 而本文多孔基体渗透率取值为 10^{-17}m^2 , 此时 $K_{\text{crack}}/K_m \approx 10^6$. 即, 裂纹的局部相对渗透率 K_{crack}/K_m 在 10^6 以内, 裂纹的开度才会对含有随机裂纹网络孔隙材料的渗透率有影响.

表 2 对应不同网络分形特征 D_c 渗透率标度参数
 Table 2. Scaling parameters of permeability for different D_c .

| D_c | κ | λ | μ |
|-------|----------|-----------|--------|
| 2 | 11.57 | 0.2 | -0.922 |
| 1.75 | 56.26 | 0.477 | -1.122 |
| 1.62 | 92.85 | 0.554 | -1.257 |

4 结 论

本文使用连续区逾渗理论提出了二维随机裂纹网络连通度定义, $f \propto (\rho - \rho_c)^{-\nu + (3 - D_c)\beta}$, 该定义中包含了裂纹网络的分形特征 D_c . D_c 越小、裂纹团簇效应越明显, f 也越小, 表明随机网络中裂纹局部团簇效应会影响网络整体的连通度. 由于团簇效应的影响, 裂纹网络的逾渗阈值 ρ_c 随分形维数 D_c 的减小而增大. 研究还表明, 二维随机裂纹网络的标度指数 ν, β 也随着 D_c 的减小而增大, 而非固定值, 这与经典逾渗理论提出的标度指数存在普适性的观点有所不同.

本文考虑裂纹网络的连通度和主裂纹团的曲折度, 给出了描述含有随机裂纹网络孔隙材料的整体渗透率的解析表达, $K = K_0(K_m, b)(\rho - \rho_c)^\mu$, 其中标度律 $(\rho - \rho_c)^\mu$ 与裂纹网络的几何特征有关; K_0 与渗流过程有关, 涉及孔隙材料基体的渗透率 K_m 和裂纹开度比 b . K_0 随着裂纹开度比 b 的增加而增加, 当 $b > 0.004$ 时趋于固定值, $K_0 \approx 4K_m$; 当 $b \leq 0.004$ 时, K_0 可以表达为 b 的线性表达式, $K_0 = \kappa K_m b^{-0.955 D_c + 2.12}$, κ 与裂纹网络的分形特征有关, 分形维数越小, 团簇效应对流场的局部放大作用越明显, κ 越大.

参考文献

- [1] Mehta P K 1991 *ACI Spec. Publ.* **126** 1
- [2] Feldman R F 1986 *Proceedings of the Eighth International Congress on the Chemistry of Cement* (Rio de Janeiro: FINEP) p336
- [3] Jensen A D, Chatterji S 1996 *Mater. Struct.* **29** 3
- [4] Guéguen Y, Chelidze T, Le Ravalec M 1997 *Tectonophys.* **279** 23
- [5] Broadbent S R, Hammersley J M 1957 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** 629
- [6] Liu Z F, Lai Y T, Zhao G, Zhang Y W, Liu Z F, Wang X H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2011 (in Chinese) [刘志峰, 赖远庭, 赵刚, 张有为, 刘正锋, 王晓宏 2008 物理学报 **57** 2011]
- [7] Feng Z C, Zhao Y S, Lu Z X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2796 (in Chinese) [冯增朝, 赵阳升, 吕兆兴 2007 物理学报 **56** 2796]
- [8] Hestir K, Long J 1990 *J. Geophys. Res.* **95** 21565
- [9] Leung C T O, Zimmerman R W 2012 *Transp. Porous Med.* **93** 777
- [10] Bour O, Davy P 1997 *Water Resour. Res.* **33** 1567
- [11] Robinson P C 1983 *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 605
- [12] Berkowitz B 1995 *Math. Geol.* **27** 467
- [13] Balberg I, Anderson C H, Alexander S, Wagner N 1984 *Phys. Rev. B: Condens. Matter* **30** 3933
- [14] Masihi M, King P R 2007 *Water Resour. Res.* **43** W07439
- [15] Robinson P C 1984 *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** 2823
- [16] Zhou C, Li K, Pang X 2011 *Mech. Mater.* **43** 969
- [17] Li J H, Zhang L M 2011 *Comput. Geotech.* **38** 217
- [18] Stauffer D 1979 *Phys. Reports* **54** 1
- [19] Stauffer D, Aharony A 2003 *Introduction to percolation theory* 2nd edition (London: Taylor & Francis) pp15–19
- [20] Zhou C, Li K, Pang X 2012 *Cem. Concr. Res.* **42** 1261
- [21] Bonnet E, Bour O, Odling N E, Davy P, Main I, Cowie P, Berkowitz B 2001 *Rev. Geophys.* **39** 347
- [22] Sheppard A P, Knackstedt M A, Pinczewski W V, Sahimi M 1999 *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** L521

Permeability of cracked porous solids through percolation approach

Li Le Li Ke-Fei[†]

(Key Laboratory of Structure Safety and Durability of China Education Ministry; Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 19 November 2014; revised manuscript received 4 February 2015)

Abstract

This paper investigates the permeability of microcracked porous solids incorporating random crack networks in terms of continuum percolation theory. Main factors of permeability include the geometry of crack networks, permeability of porous matrix, and crack opening. For the two-dimensional random crack networks, a new connectivity factor is defined to take into consideration the spanning cluster of cracks, fractal dimension of networks, and the size of a finite domain. For an infinite domain, the connectivity factor around a percolation threshold observes the scaling law, so this definition of connectivity is proved to be consistent with the percolation concepts. Geometric analysis reveals that the local clustering will not necessarily contribute to the global connectivity of networks. It is also found that too strong a local clustering of cracks will decrease the probability of the global percolation, and this adverse aspect of the local clustering effect has never been reported in the literature. The percolation threshold changes with the crack pattern of networks and the scaling exponents of percolation are not constant but depend on the fractal dimension of the crack networks. On the basis of connectivity and tortuosity of crack networks, the scaling law for permeability is established, $K = K_0(K_m, b)(\rho - \rho_c)^\mu$, taking into consideration the geometris characteristics through $(\rho - \rho_c)^\mu$, the permeability of porous matrix K_m , and the crack opening aperture b . Then the permeability of a solid incorporating random crack networks is solved by finite element methods: all the cracks are idealized as 2-node elements and the matrix is divided into 6-node triangle elements. The fluid is assumed to be incompressible and Newtonian. With these assumptions the effective permeability of numerical samples is evaluated through Darcy's law. The scaling exponents of the permeability μ obtained numerically are very near to the theoretical values, and the impact of crack opening is less important as the crack density is far below the percolation threshold and the effect of crack opening becomes significant only as the crack density approaches the percolation threshold. Influence of crack opening on the permeability is strongly dependent on the opening aperture of the cracks. Finite element simulation results show that K_0 depends on b through a power law near the percolation threshold and this dependence disappears as the ratio between the local permeability of crack and the matrix permeability exceeds 10^6 .

Keywords: crack network, permeability, percolation threshold, connectivity

PACS: 64.60.ah, 62.20.mt, 64.60.aq, 05.60.-k

DOI: 10.7498/aps.64.136402

[†] Corresponding author. E-mail: likefei@tsinghua.edu.cn