利用量子相干性判定开放二能级系统中非马尔可夫性

贺志　李莉　姚春梅　李艳

Non-Markovianity of open two-level system by means of quantum coherence

He Zhi　Li Li　Yao Chun-Mei　Li Yan

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 140302 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.140302
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.140302
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I14

利用量子相干性判定开放二能级系统中非马尔可夫性*

贺志† 李莉‡ 姚春梅 李艳

(湖南文理学院物理与电子科学学院, 常德 415000)

(2015 年 1 月 8 日收到; 2015 年 2 月 8 日收到修改稿)

从量子相干性包括 $l_1$norm 相干性和量子相对熵相干性的角度建立了判定开放量子系统中非马尔可夫过程的方法, 并给出了相应的判别条件. 作为它们的具体应用, 研究了一个两能级系统分别经历相位衰减通道、随机幺正通道和振幅耗散通道作用时对应的非马尔可夫过程发生必须满足的条件. 对于三种通道模型, 得到了 l_1 norm 相干性对系统任意态非马尔可夫过程发生的判别条件, 并发现在相位衰减通道和振幅耗散通道中其非马尔可夫过程发生的条件与用其他方式如信息回流、可分性和量子互熵给出的条件是相同的, 而在随机幺正通道中给出了一个新的且不完全等价于基于信息回流和可分性对应的条件. 至于量子相对熵相干性, 在相位衰减通道中得到了对系统任意态的非马尔可夫过程发生的具体条件, 并发现该条件也等同于基于信息回流、可分性和量子互熵给出的条件. 而在随机幺正通道和振幅耗散通道中得到了系统最大相干态对应的非马尔可夫过程发生的条件.

关键词: 开放二能级系统, 非马尔可夫性, l_1 norm 相干性, 量子相对熵相干性

PACS: 03.65.Yz, 03.67.Mn **DOI:** 10.7498/aps.64.140302

1 引 言

在量子信息处理中, 一个开放量子系统经历的动力学过程按照外界环境是否有记忆效应一般划分为马尔可夫过程和非马尔可夫过程. 马尔可夫过程对应环境没有记忆效应, 此时系统中信息和能量只能单方向地流入外界环境中; 而非马尔可夫过程对应环境有记忆效应, 此时系统和环境之间有信息和能量双向交流. 另外, 真实的环境一般有记忆效应, 特别是近年来在基于纳米尺度的固态量子信息处理中, 退相干控制 [1] 已经成为要解决的关键问题. 所以理解和量化开放量子系统中的非马尔可夫性已成为量子信息科学中的一个研究热点. 由于非马尔可夫过程中系统和外界环境之间有信息和能量互相交流, 从而这种非马尔可夫效应对量子纠缠保护 [2−6]、量子关联保护 [7−11]、几何相 [12] 和熵压缩 [13,14] 等量子信息资源具有显著作用. 进一步, 量化非马尔可夫效应对系统的影响无论是理论还是实验研究都是十分重要的课题. 所以人们从不同的角度定义了一些很重要的非马尔可夫度量 [15−24], 其中包括 Breuer 等 [15] 首次从信息回流的角度定义了一种非马尔可夫度量, 该度量后来在实验上得到了证实 [25,26], 从而引起了人们广泛的兴趣 [27−29]; Rivas 等 [16] 从映射可分性和量子纠缠的角度分别定义了两种非马尔可夫度量; Luo 等 [19] 从量子互熵的角度定义了一种非马尔可夫度量等. 虽然目前已经发展了这些重要的非马尔可夫度量方法, 但它们之间并不是完全相互等价的, 特别是对于多种耗散通道同时存在的情形, 各种非马尔可夫度量给出的条件是有差别的 [30−32].

* 国家自然科学基金 (批准号: 61475045, 11404111)、湖南省自然科学基金青年项目 (批准号: 2015JJ3092)、湖南省教育厅一般项目 (批准号: 12C0826) 和湖南文理学院重点项目 (批准号: 14ZD01) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hz9209@126.com

‡ 通信作者. E-mail: lltt1120@126.com

所以, 寻找一种统一度量非马尔可夫过程的方式已成为有待解决的难题.

众所周知, 量子相干性是量子力学和量子信息科学中的核心概念. 特别是在量子信息科学中, 一个量子系统相干性的存在是包括量子纠缠等量子关联存在的前提. 原则上, 当我们衡量一个系统量子态中相干性强弱时一般是考察系统的密度算符非对角元素的演化. 然而随着系统维度的增加, 密度算符非对角元素成倍地增加, 如果此时再去用每个对角元素的演化作为刻画相干性的强弱就显得十分烦琐. 最近, Baumgratz 等[33] 系统地建立了针对一个 d 维量子系统中刻画相干性所需条件的理论框架, 还特别定义了两种方便计算的相干性度量: l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性. 后来 Girolami [34] 从量子偏振 (skew) 信息的角度定义了另一种在实验上可观测的相干性度量. 因此, 在这两篇文献的启发下, 本文尝试从相干性度量的角度来测度开放量子系统中的非马尔可夫性. 到目前为止, 对于该课题的研究还未见到相关报道.

本文的研究主要采用 Baumgratz 等[33] 提出的 l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性度量来检测一个开放二能级量子系统在遭受三类重要耗散通道作用时, 非马尔可夫过程发生所需的条件. 通过研究发现: 对于非马尔可夫相位衰减通道中的任意系统态, l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性判据给出了相同的条件, 且与用其他方式如信息回流、可分性和量子互熵给出的条件是相同的; 对于非马尔可夫随机幺正通道, l_1 norm 相干性判据对任意系统态给出了一个新的判别条件, 该条件不完全等同于基于信息回流的条件, 与之相比它是较为弱化的条件. 而量子相对熵相干性判据对系统最大相干态给出了非马尔可夫条件; 对于非马尔可夫振幅耗散通道, l_1 norm 相干性判据对任意系统态、量子相对熵相干性判据对系统最大相干态分别给出了与用信息回流、可分性和量子互熵测度时相同的条件.

2 两种相干性度量及其判别非马尔可夫性的条件

在提出基于相干性的非马尔可夫性度量之前, 首先简要地介绍本文将要用到的两种相干性度量. 在文献 [33] 中, Baumgratz 等系统地给出了一个合理的量子相干性度量所需要满足的条件, 特别从可计算性的角度提出了两种量子相干性度量: l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性. 本文主要考虑利用 l_1 norm 和量子相对熵相干性来测度开放系统中的非马尔可夫性. 下面给出 l_1 norm 相干性度量和量子相对熵相干性度量的定义.

现考虑一个 d 维量子系统中相干性的度量问题, 其 d 维量子系统中的量子态所对应的希尔伯特空间用 $\mathcal{H}$ 来表示.

根据文献 [33], l_1 norm 相干性度量被定义成量子系统密度算符中所有非对角元素绝对值的求和, 即

$$C_{l_1}(\hat{\rho}) = \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} |\rho_{i,j}|. \tag{1}$$

l_1 norm 相干性度量是衡量任一量子态中相干性最本质的一种定义, 它满足一个合理相干性度量要求的所有条件. 尤为重要的是, 与其他相干性度量相比, 容易计算是它的一个主要优点.

另外一种可计算且满足相干性度量要求的所有条件的是量子相对熵相干性度量 [33], 它被定义成

$$\begin{aligned} C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}) &= \min_{\hat{\delta}\in I} S\left(\hat{\rho}||\hat{\delta}\right) \\ &= S\left(\hat{\rho}_{\text{diag}}\right) - S\left(\hat{\rho}\right) + \min_{\hat{\delta}\in I} S\left(\hat{\rho}_{\text{diag}}||\hat{\delta}\right) \\ &= S\left(\hat{\rho}_{\text{diag}}\right) - S\left(\hat{\rho}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 I 表示所有非相干态的集合, 有 $I\subset\mathcal{H}$, 它在固定的基矢如 $\{|k\rangle\}_{k=1}^{d}$ 下能写成对角化的形式, 而 $\hat{\delta}\in\mathcal{I}$ 具有这样的形式: $\hat{\delta}=\sum_k \delta_k |k\rangle\langle k|$, 并且对于一个任意的密度算符 $\hat{\rho}=\sum_{k,k'}\rho_{k,k'}|k\rangle\langle k'|$, $\hat{\rho}_{\text{diag}}=\sum_k \rho_{k,k}|k\rangle\langle k|$, $S(\hat{\rho})=-\text{tr}\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}$ 是著名的 von Neumann 熵.

文献 [33] 研究表明: l_1 norm 相干性度量满足一个合理相干性度量要求的所有条件, 其中的一个条件是 l_1 norm 在非相干完全正定、迹保守映射 (incoherent completely positive and trace preserving maps, ICPTP) 下是不可增加的, 即 $C_{l_1}(\varPhi_{\text{ICPTP}}(\hat{\rho}))\leqslant C_{l_1}(\hat{\rho})$. 另外, 文献 [35—37] 研究表明: 量子相对熵具有诸多优良的性质, 特别是量子相对熵在完全正定、且迹保守的映射下是不可增加的, 即 $S(\varPhi\hat{\rho}||\varPhi\hat{\sigma})\leqslant S(\hat{\rho}||\hat{\sigma})$. 那么量子相对熵相干性度量 $C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho})$ 也应该有类似的单调性, 即 $C_{\text{rel.ent.}}(\varPhi\hat{\rho})\leqslant C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho})$. 这里需要强调的是, l_1 norm 相干性的性质 $C_{l_1}(\varPhi_{\text{ICPTP}}(\hat{\rho}))\leqslant C_{l_1}(\hat{\rho})$ 是

对非相干完全正定、迹保守映射成立的; 而量子相对熵相干性的性质 $S(\varPhi\hat{\rho}||\varPhi\hat{\sigma}) \leqslant S(\hat{\rho}||\hat{\sigma})$ 则是对任何完全正定、迹保守映射都是成立的. 所以接下来由它们给出非马尔可夫过程发生的条件其适用范围是不同的.

进一步, 当量子系统经历一个完全正定、且迹保守的映射下所对应的动力学过程如果从可分性的角度[38]看是马尔可夫过程, 那么对应的映射存在下列关系:

$$\varPhi_t = \varPhi_{t,\tau}\varPhi_\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{3}$$

其中 $\varPhi_{t,\tau}$ 是中间的任一动力学过程的映射. 方程(3)对所有含时的马尔可夫过程包括满足动力学半群性质的不含时 Lindblad 方程和满足动力学可分性的含时的类 Lindblad 方程都是成立的.

因此, 当一个量子系统的初态 $\rho(0)$ 经历一个动力学映射 $\{\varPhi_t\}$ 的演化, 那么在任意时刻 t 的系统态 $\rho(t)$ 将能表示成

$$\hat{\rho}(t) := \varPhi_t\hat{\rho}(0). \tag{4}$$

从而根据方程(3) 和(4), 对于 l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性, 我们分别能得到下列的关系式

$$\begin{aligned} C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) &= C_{l_1}(\varPhi_{\mathrm{ICPTP,t}}\hat{\rho}(0)) \\ &= C_{l_1}(\varPhi_{\mathrm{ICPTP,t},\tau}\varPhi_{\mathrm{ICPTP},\tau}\hat{\rho}(0)) \\ &= C_{l_1}(\varPhi_{\mathrm{ICPTP,t},\tau}\hat{\rho}(\tau)) \leqslant C_{l_1}(\hat{\rho}(\tau)) \end{aligned} \tag{5}$$

和

$$\begin{aligned} &C_{\mathrm{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) = C_{\mathrm{rel.ent.}}(\varPhi_t\hat{\rho}(0)) \\ &= C_{\mathrm{rel.ent.}}(\varPhi_{t,\tau}\varPhi_\tau\hat{\rho}(0)) \\ &= C_{\mathrm{rel.ent.}}(\varPhi_{t,\tau}\hat{\rho}(\tau)) \leqslant C_{\mathrm{rel.ent.}}(\hat{\rho}(\tau)). \end{aligned} \tag{6}$$

注意到, 在方程(5)和(6)的推导过程中, 已经使用了 l_1 norm 相干性的性质 $C_{l_1}(\varPhi_{\mathrm{ICPTP}}(\hat{\rho})) \leqslant C_{l_1}(\hat{\rho})$ 和量子相对熵相干性的性质 $C_{\mathrm{rel.ent.}}(\varPhi\hat{\rho}) \leqslant C_{\mathrm{rel.ent.}}(\hat{\rho})$. 从方程(5)我们能清楚地看到, 对任意马尔可夫过程, l_1 norm 相干性 $C_{l_1}(\hat{\rho}(t))$ 是关于时间的单调递减函数, 即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) \leqslant 0$. 那么从相反的观点看, 如果 l_1 norm 相干性 $C_{l_1}(\hat{\rho}(t))$ 随时间变化的单调性被违反, 就能够被看作非马尔可夫过程发生的一个判别条件, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) > 0. \tag{7}$$

对于非马尔可夫过程, 条件 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) > 0$ 是对任意量子态都是成立的. 类似地, 对于量子相对熵相干性也有类似的判别非马尔可夫过程发生的条件:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\mathrm{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) > 0. \tag{8}$$

3 应用于三类重要的通道模型

下面把 l_1 norm 相干性如方程(7) 和量子相对熵相干性如方程(8) 的判别条件具体用于对一个二能级量子系统在分别经历相位衰减通道、随机幺正通道以及振幅耗散通道作用时其非马尔可夫过程进行讨论. 根据文献[39], 我们可知这里讨论的相位衰减通道、随机幺正通道以及振幅耗散通道都是非相干通道, 所以 l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性的判别条件对这三类重要通道模型都是严格成立的.

3.1 相位衰减通道

首先考虑一个二能级量子系统在经历一个非马尔可夫相位衰减通道作用下, 系统量子态的演化遵循下列的方程[40]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = \gamma(t)(\sigma_z\hat{\rho}(t)\sigma_z - \hat{\rho}(t)). \tag{9}$$

不失一般性, 这里假设系统初态有下列一般的形式

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{12}(0) \\ \rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

这样, 由方程(9) 所示的演化规律, 该二能级量子系统在任意时刻 t 的密度算符可写成

$$\hat{\rho}(t) = \varPhi_t\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{12}(0)f(t) \\ \rho_{21}(0)f(t) & \rho_{22}(0) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 $f(t) = \exp[-2\int_0^t \gamma(\tau)\mathrm{d}\tau]$.

根据方程(1) 和(2), 通过一些简单的计算, 可分别得到 l_1 norm 相干性 $C_{l_1}(\hat{\rho}(t))$ 和量子相对熵相干性 $C_{\mathrm{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))$:

$$C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) = 2|\rho_{12}(0)|f(t), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &C_{\mathrm{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) \\ =& -\rho_{11}(0)\log_2\rho_{11}(0) - \rho_{22}(0)\log_2\rho_{22}(0) \\ &+ \frac{1+F(t)}{2}\log_2\left(\frac{1+F(t)}{2}\right) \\ &+ \frac{1-F(t)}{2}\log_2\left(\frac{1-F(t)}{2}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

这里, $F(t) = \sqrt{1+4[f^2(t)|\rho_{12}(0)|^2 - \rho_{11}(0)\rho_{22}(0)]}$ 且 $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$. 相应地, l_1 norm 相干性 $C_{l_1}(\hat{\rho}(t))$

和量子相对熵相干性 $C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))$ 对时间的微商分别有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) = -4|\rho_{12}(0)|f(t)\gamma(t) \tag{14}$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))\\ &= \frac{\dot{F}(t)}{2}\log_2\left(\frac{1+F(t)}{1-F(t)}\right)\\ &= \frac{-4f^2(t)|\rho_{12}(0)|^2\gamma(t)}{F(t)}\log_2\left(\frac{1+F(t)}{1-F(t)}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

从方程(14) 和(15), 我们容易发现无论是 l_1 norm 相干性所要求的条件 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) > 0$, 还是量子相对熵相干性所要求的条件 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) > 0$, 它们都等价于条件 $\gamma(t) < 0$ 的成立. 显然, l_1 norm 相干性的计算比量子相对熵相干性的计算容易, 这是 l_1 norm 相干性的突出优势之一. 更有趣的是, 它们共同的条件 $\gamma(t) < 0$ 与用其他非马尔可夫度量如信息回流、可分性和量子互熵等给出的条件是相同的[19,29].

3.2 随机幺正通道

进一步, 考虑当一个二能级量子系统与一个随机幺正通道相互作用模型, 该系统的动力学演化可以用下列唯象的主方程[41]来描述, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = \sum_{i=1}^{3}\gamma_i(t)[\boldsymbol{\sigma}_i\hat{\rho}(t)\boldsymbol{\sigma}_i - \hat{\rho}(t)], \tag{16}$$

这里, $\gamma_i(t)(i = 1,2,3)$ 表示含时的衰减系数, $\boldsymbol{\sigma}_i(i = 1,2,3)$ 表示著名的泡利矩阵. 明显地, 随机幺正通道模型是相位衰减通道模型的一个推广模型, 即它除了考虑相位衰减通道模型中 $\sigma_z(\sigma_3)$ 以外, 同时还考虑了 $\sigma_x(\sigma_1)$ 和 $\sigma_y(\sigma_2)$ 的影响. 文献 [31, 32] 从信息回流、可分性以及量子互熵的角度分别对随机幺正通道模型中的非马尔可夫性进行了研究, 得到了并不完全等价的非马尔可夫过程发生的条件. 特别是他们已经证明主方程(16) 可写成两种等价的表示形式:

$$\varPhi_t\hat{\rho} = \sum_{i=0}^{3}p_i(t)\boldsymbol{\sigma}_i\hat{\rho}\boldsymbol{\sigma}_i, \tag{17}$$

$$\varPhi_t\boldsymbol{\sigma}_i = \lambda_i(t)\boldsymbol{\sigma}_i \quad (i = 0,1,2,3), \tag{18}$$

这里, $\sigma_0 = \mathbb{I}$, $p_i(t) \geqslant 0$ 以及 $\sum_{i=0}^{3}p_i(t) = 1$. 特别地, 在 $t = 0$ 时, 由 $\varPhi_0 = \mathbb{I}$ 得到 $p_0(0) = 1$ 以及 $p_i(0) = 0 (i = 1,2,3)$. 另外, 方程(17) 和(18) 中的参数 $p_i(t)$ 和 $\lambda_i(t)$ 之间有下列关系:

$$\begin{aligned}p_0(t) &= \frac{1}{4}[1+\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)],\\ p_1(t) &= \frac{1}{4}[1+\lambda_1(t)-\lambda_2(t)-\lambda_3(t)],\\ p_2(t) &= \frac{1}{4}[1+\lambda_2(t)-\lambda_1(t)-\lambda_3(t)],\\ p_3(t) &= \frac{1}{4}[1+\lambda_3(t)-\lambda_2(t)-\lambda_1(t)],\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\lambda_0(t) = 1$, $\lambda_i(t) = \mathrm{e}^{2\left(\varGamma_i(t)-\sum_{j=1}^{3}\varGamma_j(t)\right)}$ $(i = 1,2,3)$ 以及 $\varGamma_i(t) = \int_0^t\gamma_i(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (i = 1,2,3)$.注意到方程(18) 揭示了随机幺正通道作用在泡利矩阵的运算规则, 那么系统的初态被选择成布洛赫球形式比较方便, 即

$$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2}(I+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+a_3 & a_1-\mathrm{i}a_2\\ a_1+\mathrm{i}a_2 & 1-a_3\end{pmatrix}. \tag{20}$$

由方程(18), 在任意时刻 t 的系统态能写成

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2[\varGamma_1(t)+\varGamma_2(t)]}\begin{pmatrix}a_3 & \omega(t)\\ \omega^*(t) & -a_3\end{pmatrix}, \tag{21}$$

其中 $\omega(t) = \mathrm{e}^{-2\varGamma_3(t)}[\mathrm{e}^{2\varGamma_1(t)}a_1 - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\varGamma_2(t)}a_2]$.

根据方程(1), 我们能得到 l_1 norm 相干性的解析表达式

$$C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) = \mathrm{e}^{-2[\varGamma_1(t)+\varGamma_2(t)]}|\omega(t)|. \tag{22}$$

从而可得到 l_1 norm 相干性对时间的微商:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t))\\ =& -2\frac{\mathrm{e}^{-2[\varGamma_1(t)+\varGamma_2(t)]}}{|\omega(t)|}\Big[a_1^2\,\mathrm{e}^{4[\varGamma_1(t)-\varGamma_3(t)]}(\gamma_2(t)+\gamma_3(t))\\ &+ a_2^2\,\mathrm{e}^{4[\varGamma_2(t)-\varGamma_3(t)]}(\gamma_1(t)+\gamma_3(t))\Big].\end{aligned} \tag{23}$$

那么, 判别非马尔可夫过程发生的条件 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) \leqslant 0$ 等价于当且仅当 $\gamma_1(t)+\gamma_3(t) < 0$, $\gamma_2(t)+\gamma_3(t) < 0$, 这是一个很有兴趣的结果. 因为我们不难发现, 当 $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$ 时, 随机幺正通道的非马尔可夫条件恰好退化成相位衰减通道对应的非马尔可夫条件.

文献[31]已经分别从信息回流和可分性的角度给出了判别马尔可夫过程发生的条件, 例如从信息回流角度看, 当且仅当 $\gamma_1(t)+\gamma_2(t)\geqslant 0$, $\gamma_1(t)+\gamma_3(t)\geqslant 0$, $\gamma_2(t)+\gamma_3(t)\geqslant 0$; 从可分性角度看, 当且仅当 $\gamma_1(t)\geqslant 0$, $\gamma_2(t)\geqslant 0$, $\gamma_3(t)\geqslant 0$. 明显地, 对于随机幺正通道模型, 从信息回流和可分性这两个角度得到的马尔可夫过程发生的条件是不完全等价的. 正如文献[31]所指出的, 可分性给出的条件成立能推导出信息回流对应的条件, 反之则不一定成立. 有兴趣的是, 本文中 l_1 norm 相干性给出的马尔可夫条件如 $\gamma_1(t)+\gamma_3(t)\geqslant 0$, $\gamma_2(t)+\gamma_3(t)\geqslant 0$ 也不完全等同于信息回流对应的条件, 它比信息回流对应的条件较为弱化一些.

另一方面, 根据方程(2), 不难得到量子相对熵相干性 $C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))$ 的解析表达式

$$\begin{aligned}&C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))\\=&-y_+(t)\log_2 y_+(t)-y_-(t)\log_2 y_-(t)\\&+x_+(t)\log_2 x_+(t)+x_-(t)\log_2 x_-(t),\end{aligned}\tag{24}$$

其中

$$y_\pm(t)=\left(1\pm \mathrm{e}^{-2[\varGamma_1(t)+\varGamma_2(t)]}a_3\right)\Big/2,$$

$$x_\pm(t)=\left(1\pm \mathrm{e}^{-2[\varGamma_1(t)+\varGamma_2(t)]}\sqrt{a_3^2+|\omega(t)|^2}\right)\Big/2.$$

从而可得到量子相对熵相干性 $C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))$ 对时间的微商:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))\\=&-\dot{y}_+(t)\log_2\frac{y_+(t)}{y_-(t)}+\dot{x}_+(t)\log_2\frac{x_+(t)}{x_-(t)}\\=&-\frac{\mathrm{e}^{-2[\varGamma_1(t)+\varGamma_2(t)]}}{\sqrt{a_3^2+|\omega(t)|^2}}\Bigg[(\gamma_1(t)+\gamma_2(t))\left(a_3^2\log_2\frac{x_+(t)}{x_-(t)}\right.\\&\left.-a_3\sqrt{a_3^2+|\omega(t)|^2}\log_2\frac{y_+(t)}{y_-(t)}\right)\\&+(\gamma_1(t)+\gamma_3(t))\,a_2^2\,\mathrm{e}^{4[\varGamma_2(t)-\varGamma_3(t)]}\log_2\frac{x_+(t)}{x_-(t)}\\&+(\gamma_2(t)+\gamma_3(t))\,a_1^2\,\mathrm{e}^{4[\varGamma_1(t)-\varGamma_3(t)]}\log_2\frac{x_+(t)}{x_-(t)}\Bigg].\end{aligned}\tag{25}$$

显然, 方程(25)所给出的表达式比较复杂, 因此我们很难直接从它得出非马尔可夫过程发生即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))>0$ 的具体条件. 因为文献[33]已经阐明量子态 $|\psi_d\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^{d}|i\rangle$ 是 d 维量子系统中最大的相干态. 所以为了给出一个解析的判别非马尔可夫过程发生的条件, 我们只具体计算一种特殊但是很重要的一种情况, 即系统初态被选择为 $\hat{\rho}(0)=|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, $|\psi_2\rangle=(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$ 是二能级系统最大的相干态. 当系统初态 $\hat{\rho}(0)$ 写成布洛赫球形式时, 对应的系数满足 $a_1=1$, $a_2=a_3=0$. 此时非马尔可夫条件 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t))>0$ 就退化成 $\gamma_2(t)+\gamma_3(t)<0$. 相反地, 马尔可夫条件是 $\gamma_2(t)+\gamma_3(t)\geqslant 0$. 明显地, 此条件又比 l_1 norm 相干性给出的条件即 $\gamma_1(t)+\gamma_3(t)\geqslant 0$, $\gamma_2(t)+\gamma_3(t)\geqslant 0$ 更为弱化一些. 这里我们之所以考虑系统初态为最大相干态, 有三个方面的原因: 1) 对于最大相干态能得到其判别非马尔可夫过程发生的解析条件; 2) 最大相干态在许多量子任务中有着独特的作用, 如文献[42]已经阐明, 一个二能级系统的最大相干态是在一个参数计算中费舍尔信息最大化对应的最优化输入态; 3) 尽管这里没有给出严格的证明, 但我们相信最大相干态很可能是系统最大化非马尔可夫性对应的最优化态. 所以考虑系统初态为最大相干态对应的非马尔可夫条件是很有意义的.

3.3 振幅耗散通道

考虑一个二能级量子系统和一个零温度玻色热库发生相互作用, 此模型对应振幅耗散模型. 该二能级量子系统的动力学演化满足下列的主方程[40]:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t)\\=&-\frac{\mathrm{i}}{2}s(t)\left[\sigma_+\sigma_-,\rho(t)\right]\\&+\gamma(t)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+-\frac{1}{2}\left\{\sigma_+\sigma_-,\rho(t)\right\}\right),\end{aligned}\tag{26}$$

其中 $s(t)=-2\mathrm{Im}\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}$, $\gamma(t)=-2\mathrm{Re}\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}=-\frac{2}{|h(t)|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|h(t)|$, 系数 $h(t)$ 满足下列的微分方程:

$$\dot{h}(t)=-\int_0^t f(t-t_1)h(t_1)\mathrm{d}t_1,\tag{27}$$

其中初始条件有 $h(0)=1$, 记忆核 $f(t-t_1)=\int\mathrm{d}\omega J(\omega)\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)(t-t_1)]$ 是与热库的谱密度 $J(\omega)$ 有关的函数. 那么在任意时刻 t, 系统的密度算符能够写成

$$\rho(t) = \Phi_t \rho(0) = \begin{pmatrix} 1-|h(t)|^2\rho_{22}(0) & \rho_{12}(0)h(t) \\ \rho_{21}(0)h^*(t) & |h(t)|^2\rho_{22}(0) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

这里, 已经设系统初态为方程 (10) 所示的一般形式. 通过直接的计算, 分别能得到 l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性的数学表达式

$$C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) = 2|\rho_{12}(0)||h(t)| \tag{29}$$

和

$$\begin{aligned} C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) = {} & \frac{1+\lambda(t)}{2}\log_2\frac{1+\lambda(t)}{2} \\ & + \frac{1-\lambda(t)}{2}\log_2\frac{1-\lambda(t)}{2} \\ & - \frac{1+\chi(t)}{2}\log_2\frac{1+\chi(t)}{2} \\ & - \frac{1-\chi(t)}{2}\log_2\frac{1-\chi(t)}{2}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda(t) = {} & \{1+4[|h(t)|^2|\rho_{12}(0)|^2 \\ & - (1-|h(t)|^2\rho_{22}(0))|h(t)|^2\rho_{22}(0)]\}^{1/2}, \\ \chi(t) = {} & 1-2|h(t)|^2\rho_{22}(0). \end{aligned}$$

进一步, 可分别得到 l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性对时间的微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) = 2|\rho_{12}(0)|\frac{\mathrm{d}|h(t)|}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) = {} & \frac{\dot{\lambda}(t)}{2}\log_2\frac{1+\lambda(t)}{1-\lambda(t)} \\ & - \frac{\dot{\chi}(t)}{2}\log_2\frac{1+\chi(t)}{1-\chi(t)}, \end{aligned} \tag{32}$$

这里, $\dot{\lambda}(t) = \mathrm{d}\lambda(t)/\mathrm{d}t$ 以及 $\dot{\chi}(t) = \mathrm{d}\lambda(t)/\mathrm{d}t$.

从方程 (31), 我们很容易看出用 l_1 norm 相干性来测度非马尔可夫过程所要求的条件 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{l_1}(\hat{\rho}(t)) > 0$ 是等价于 $\frac{\mathrm{d}|h(t)|}{\mathrm{d}t} > 0$, 该条件与用其他非马尔可夫度量如信息回流、可分性和量子互熵等 [18,28] 给出的条件也是相同的. 而从方程 (32), 我们很难得到量子相对熵相干性来判定系统任意态的非马尔可夫过程发生的条件. 类似地, 为了给出一个解析的判别非马尔可夫过程发生的条件, 选择系统初态为最大相干态, 即 $\hat{\rho}(0) = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, $|\psi_2\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. 此时的量子相对熵相干性 $C_{\text{rel,ent}}(\hat{\rho}(t))$ 有

$$\begin{aligned} C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) = {} & \frac{1+\sqrt{1+4\mu^2-2\mu}}{2}\log_2\frac{1+\sqrt{1+4\mu^2-2\mu}}{2} \\ & + \frac{1-\sqrt{1+4\mu^2-2\mu}}{2}\log_2\frac{1-\sqrt{1+4\mu^2-2\mu}}{2} \\ & - (1-\mu)\log_2(1-\mu) - \mu\log_2\mu, \end{aligned} \tag{33}$$

其中 $\mu = |h(t)|^2/2$. 从而可得到量子相对熵相干性 $C_{\text{rel,ent.}}(\rho(t))$ 对时间的微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu = \eta|h(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|h(t)|, \tag{34}$$

其中

$$\begin{aligned} \eta = {} & \frac{2\mu-1/2}{\sqrt{1+4\mu^2-2\mu}}\log_2\frac{1+\sqrt{1+4\mu^2-2\mu}}{1-\sqrt{1+4\mu^2-2\mu}} \\ & - \log_2\frac{\mu}{1-\mu}. \end{aligned} \tag{35}$$

通过简单的数值模拟, 我们发现当 $0 \leqslant \mu = |h(t)|^2/2 \leqslant 1/2$, η 总是会大于零. 因此条件 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{\text{rel.ent.}}(\hat{\rho}(t)) > 0$ 就退化为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|h(t)| > 0$ 或者 $\gamma(t) < 0$. 很明显, 这一条件和 l_1 norm 相干性给出的条件也是相同的. 至于其他的系统态对应的非马尔可夫条件是否和最大相干态相同, 还有待于进一步的研究.

4 结 论

本文探索了从量子相干性的角度来测度开放量子系统中的非马尔可夫性. 分别利用 l_1 norm 相干性和量子相对熵相干性来研究一个二能级系统经历相位衰减通道、随机幺正通道和振幅耗散通道时非马尔可夫过程发生的条件, 并得到了一些很有意义的结果. 例如在相位衰减通道和振幅耗散通道中给出非马尔可夫过程发生的条件与用其他方式如信息回流、可分性和量子互熵给出的条件是相同的, 但在随机幺正通道中给出了一个新的且不完全等价于基于信息回流、可分性对应的条件. 其实这是可以理解的, 因为随机幺正通道模型涉及多通道情况, 这样基于信息回流给出的条件和基于可分性给出的条件是可以不等价的, 关于这一点已经被文献 [31] 所揭示. 所以对于多通道情况, 从不同的角度去测度其非马尔可夫过程得到不同的条件也是可以理解的. 至于量子相对熵相干性, 通过对三种重要通道模型的计算不难得知, 量子相对熵相干性的计算是比较复杂的. 幸运的是, 在相位衰减通道中得到了对系统任意态非马尔可夫过程发生的具

体条件, 并发现该条件也等同于基于信息回流、可分性和量子互熵给出的条件. 而在随机幺正通道和振幅耗散通道中, 为了得到解析的判别条件, 我们具体计算了二能级系统最大相干态对应的非马尔可夫过程发生的解析条件. 总之, 本文建立了新的可度量开放量子系统中非马尔可夫性的方法, 并得到的一些有意义的判别条件, 这些条件可对更深入地研究非马尔可夫过程的统一度量方式提供一定的参考.

最近, 我们注意到一系列关于量子相干性的度量[39, 43, 44]以及在量子信息处理中的各种应用[45, 46]不断被人们所发现. 然而真正理解量子相干性像量子纠缠和量子失协一样是量子信息处理中一种重要的物理资源, 却还是一个有待于进一步研究的科学问题, 同时它也为新的量子相干性度量建立提供了新的思路, 这将是我们今后努力的研究方向.

参考文献

[1] Buluta I, Ashhab S, Nori F 2011 *Rep. Prog. Phys.* **74** 104401

[2] Bellomo B, LoFranco R, Compagno G 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160502

[3] Zhang Y J, Man Z X, Xia Y J 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 173

[4] Xiao X, Fang M F, Li Y L, Zeng K, Wu C 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 235502

[5] Xiao X, Fang M F, Li Y L 2010 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** 185505

[6] Han W, Cui W K, Zhang Y J, Xia Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230302 (in Chinese) [韩伟, 崔文凯, 张英杰, 夏云杰 2012 物理学报 **61** 230302]

[7] Shan C J, Liu J B, Chen T, Liu T K, Huang Y X, Li H 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 100301

[8] Xiao X, Fang M F, Li Y L, Kang G D, Wu C 2010 *Opt. Commun.* **283** 3001

[9] Li C F, Wang H T, Yuan H Y, Ge R C, Guo G C 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 120302

[10] Han W, Zhang Y J, Xia Y J 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010306

[11] He Z, Li L W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 180301 (in Chinese) [贺志, 李龙武 2013 物理学报 **62** 180301]

[12] Zheng L M, Wang F Q, Liu S H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2430 (in Chinese) [郑力明, 王发强, 刘颂豪 2009 物理学报 **58** 2430]

[13] Xiao X, Fang M F, Hu Y M 2011 *Phys. Scr.* **84** 045011

[14] Cai C J, Fang M F, Xiao X, Huang J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210303 (in Chinese) [蔡诚俊, 方卯发, 肖兴, 黄江 2012 物理学报 **61** 210303]

[15] Breuer H P, Laine E M, Piilo J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210401

[16] Rivas A, Huelga S F, Plenio M B 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 050403

[17] Lu X M, Wang X G, Sun C P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042103

[18] Hou S C, Yi X X, Yu S X, Oh C H 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062115

[19] Luo S, Fu S, Song H 2012 *Phys. Rev. A* **86** 044101

[20] Lorenzo S, Plastina F, Paternostro M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 020102

[21] Bylicka B, Chruscinski D, Maniscalco S 2014 *Sci. Rep.* **4** 5720

[22] Chruscinski D, Maniscalco 2014 *Phys. Rev. A* **112** 120404

[23] Liu J, Lu X M, Wang X G 2013 *Phys. Rev. A* **87** 042103

[24] He Z, Yao C, Zou J 2014 *Phys. Rev. A* **90** 042101

[25] Liu B H, Li L, Huang Y F, Li C F, Guo G C, Laine E M, Breuer H P, Piilo J 2011 *Nat. Phys.* **7** 931

[26] Tang J S, Li C F, Li Y L, Zou X B, Guo G C 2012 *Europhys. Lett.* **97** 10002

[27] Xu Z Y, Yang W L, Feng M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 044105

[28] He Z, Zou J, Li L, Shao B 2011 *Phys. Rev. A* **83** 012108

[29] Zeng H S, Tang N, Zheng Y P, Wang G Y 2011 *Phys. Rev. A* **84** 032118

[30] Haikka P, Cresser J D, Maniscalco S 2011 *Phys. Rev. A* **83** 012112.

[31] Chruscinski D, Wudarski F 2013 *Phys. Lett. A* **377** 1425

[32] Jiang M, Luo S 2013 *Phys. Rev. A* **88** 034101

[33] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401

[34] Girolami D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 170401

[35] Lindblad G 1975 *Commun. Math. Phys.* **40** 147

[36] Ruskai M B 2002 *J. Math. Phys.* **43** 4358

[37] Vedral V, Plenio M B 1997 *Phys. Rev. A* **57** 1619

[38] Wolf M M, Eisert J, Cubitt T S, Cirac J I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 150402

[39] Shao L H, Xi Z J, Fan H, Li Y M 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042120

[40] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press) p472

[41] Vacchini B 2012 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** 154007

[42] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401

[43] Xi Z J, Li Y M, Fan H 2014 arXiv 1408.3194v2 [quant-ph]

[44] Du S, Bei Z, Guo Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 052120

[45] Bromley T R, Cianciaruso M, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 210401

[46] Zhang Y J, Han W, Xia Y J, Yu Y M, Fan H 2015 arXiv 1502.02446v1 [quant-ph]

Non-Markovianity of open two-level system by means of quantum coherence*

He Zhi† Li Li‡ Yao Chun-Mei Li Yan

(*College of Physics and Electronics, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China*)

(Received 8 January 2015; revised manuscript received 8 February 2015)

Abstract

We propose an approach to measuring non-Markovianity of an open two-level system from quantum coherence perspective including l_1 norm of coherence and quantum relative entropy of coherence, and derive corresponding non-Markovian conditions. Further, as a particular application, non-Markovian conditions of an open two-level system undergoing phase damping channel, random unitary channel and amplitude damping channel, respectively are investigated. Specifically speaking, for the three channels we obtain non-Markovian conditions based on l_1 norm of coherence at any initial state of system, and find that non-Markovian conditions are the same as the conditions of other measurements, i.e., information back-flow, divisibility and quantum mutual entropy for the phase damping channel and amplitude damping channel, but non-Markovian conditions new and different from the conditions of other measurements for random unitary channel. On the other hand, for phase damping channel we obtain non-Markovian conditions based on quantum relative entropy of coherence at any initial state of system, which are the same as the conditions of other measures, i.e., information back-flow, divisibility and quantum mutual entropy. However, for the random unitary channel and amplitude damping channel we obtain non-Markovian conditions at maximally coherent state of system.

Keywords: open two-level systems, non-Markovianity, l_1 norm of coherence, quantum relative entropy of coherence

PACS: 03.65.Yz, 03.67.Mn **DOI:** 10.7498/aps.64.140302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61475045, 11404111), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 2015JJ3092), the Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 12C0826), and the School Foundation from the Hunan University of Arts and Science, China (Grant No. 14ZD01).

† Corresponding author. E-mail: hz9209@126.com

‡ Corresponding author. E-mail: lltt1120@126.com