

有限温度下一维 Gaudin-Yang 模型的热力学性质*

张天宝^{1)†} 俞玄平¹⁾ 陈阿海²⁾

1) (浙江师范大学物理系, 金华 321004)

2) (伦敦大学学院物理与天文学系, 伦敦 WC1E 6BT)

(2015年1月4日收到; 2015年3月18日收到修改稿)

本文通过数值求解有限温度下一维均匀费米 Gaudin-Yang 模型的热力学 Bethe-ansatz 方程, 研究了此模型的基本性质, 得到了在给定的温度或给定的相互作用下, 化学势、相互作用、粒子密度和熵的相互变化图像. 对结果分析发现, 在给定温度和相互作用下, 熵随着化学势的变化有一个量子临界区域.

关键词: 热力学 Bethe-ansatz 方程, 有限温度, Gaudin-Yang 模型, 量子临界性质

PACS: 64.60.F-, 71.10.-w

DOI: 10.7498/aps.64.156402

1 引言

上个世纪 20 年代, 爱因斯坦预言了玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensation, BEC) 的存在, 而自 1995 年 Anderson 等人首次在实验上利用气态的碱金属原子实现了 BEC 之后^[1], 冷原子物理逐渐成为凝聚态物理研究中的新热点. 在冷原子系统中, 当温度下降到凝聚温度附近时, 量子统计便开始起主要作用. 与玻色气体不同, 费米气体由于受到泡利不相容原理的限制, 能级的占据从最低能态到费米面, 其冷却相比于玻色气体更难. 随着激光冷却和蒸发冷却技术的发展, 冷原子系统可以被冷却到费米温度甚至更低, 而 Feshbach 共振技术以及光晶格技术的成熟和运用^[2,3], 使得几乎所有实验参数变得可调, 这为实验上冷原子物理的研究带来了极大的便利, 如 1999 年, DeMaroco Jin 小组实现了费米子凝聚^[4], 2005 年 Esslinger 等人在实验上观察到了费米面以及相应的动力学特性^[5], Wang 等人关于冷原子云受迫振荡^[6]的研究等.

一般来说, 对许多物理问题的研究而言, 从高

维系统到低维系统总是意味着物理更为简单. 但在冷原子物理的研究中, 由于一维系统内的量子关联和量子涨落占据主导地位, 从而相对于高维系统来说, 一维系统的研究不但没有得到简化, 反而出现了更为复杂的物理^[7,8]. 也正因为如此, 其相图相比于高维系统显得更加独特. 这使得许多学者开始着眼于在一维冷原子系统中相关物理现象的研究, 如高温超导, 自旋电荷分离^[9], 集体激发^[10], 密度关联函数^[11]等. 另一方面, 由于一维量子气系统具有 Luttinger 液体的性质而不同于由 Landau 液体理论描述的三维量子气系统, 在强耦合和弱耦合限制下一些学者将一维系统的微观参数与 Luttinger 哈密顿量相联系, 从而得出了所研究系统的低能性质^[12]. 因此, 一维冷原子系统中的关联性质和 Luttinger 液体性质在冷原子物理研究中的作用变的越来越重要. 实验上, 随着现代冷却技术的日益成熟, 已经可以制备出不同类型的束缚势. 实验者通过对外部束缚势的调节使得低维系统的制备变得更加容易, 如实验者可以通过在研究系统的轴向加上一个有限大小的平缓束缚势 (ω_{\parallel}), 而在横向加上一个远大于纵向势场的束缚势 (ω_{\perp})

* 国家自然科学基金 (批准号: 11174253, 11374266) 和浙江省自然科学基金 (批准号: R6110175) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 34421501@qq.com

($\omega_{\perp} \gg \omega_{\parallel}$), 从而使粒子在横向上的运动被限制在零点振动上, 在这基础之上便可制备出“雪茄”型的准一维量子气.

用 δ 函数相互作用描述的一维量子气系统既是研究量子多体物理系统的基础, 也是冷原子物理中的重要研究系统之一. 目前为止, 许多物理现象已经在这种系统中被分析, 包括状态方程 [13], 集体激发 [14], 淬火动力学特性 [9] 等. 由 δ 函数相互作用描述的一维量子气系统可以用 Gaudin-Yang 模型描述 [15,16]. 零温时基于 Bethe-ansatz 的精确解, 此模型已被广泛研究 [17-20]. 但绝对零温的条件在现实中不能达到, 需要考虑有限温度时的物理. 1971 年 Takahashi 给出一组可决定系统相关热力学量的非线性积分耦合方程, 即所谓的热力学 Bethe-ansatz (Thermodynamic Bethe-ansatz, TBA) 方程 [21], 在此基础上, 有限温度下 Gaudin-Yang 模型的研究成为可能. 近年来, 随着科学技术的不断发展, 不管是实验上还是数值模拟上, 对此模型在有限温度下相关物理性质的研究也变得越来越普遍, 如有限温度下集体模的研究 [22], 自旋电荷分离现象 [23], 相关物理相变研究 [24-28], 以及系统的关联研究 [22,29,30] 等. 因此在有限温度下对此模型的研究具有非常现实的意义, 这正是我们这篇文章的核心.

另一方面, 由 Hubbard 模型描述的晶格系统在有限温度下的性质可以作为我们所研究的 Gaudin-Yang 模型问题的借鉴. 1972 年 Takahashi 给出了 Hubbard 模型的 TBA 积分耦合方程使得这一模型精确可解 [31], 在这之后通过对 TBA 耦合方程的各类求解, Hubbard 模型在有限温度下的研究日益成熟: Kawakami 等人首先对热力学 TBA 方程进行了数值计算, 并分析了有限温度下的电荷磁化率、热容等问题 [32,33]; Jüttner, Klümper, Suzuki 等人通过基于量子转移矩阵 [34,35] 的方法, 将求解 TBA 积分耦合方程转化为求解相应量子转移矩阵的最大本征值问题, 进而可求出系统的自由能和关联长度 [36,37]; Takahashi 等将热力学势在高温处展开研究了系统的热容和磁化率 [38]. 另外还有对有限温度下 Hubbard 模型基本性质的讨论 [39-41], 有限温度下半充满 Hubbard 模型运输性质的研究 [42,43], 有限温度下二维半充满 Hubbard 模型的绝缘—金属相变研究 [44] 等. 此外, 加入外势后的非均匀系统也被广泛研究, 如有限温度下受限晶格模型的密度泛函理论 [45,46].

由以上的研究作为基础, 我们将系统求解 Gaudin-Yang 模型的 TBA 方程, 给出数值求解方法并分析在给定温度和相互作用强度下, 粒子密度和熵随着化学势变化的情况.

2 模型与数值求解方法

本文主要讨论一维均匀费米气体的 Gaudin-Yang 模型, 其哈密顿量表示如下:

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j), \quad (1)$$

上式中 m 是粒子质量, N 表示粒子总数, 设系统尺度为 L , $n = N/L$ 表示粒子数密度, c 表示粒子间的相互作用, 其中 $c < 0$ 表示吸引相互作用, $c > 0$ 表示排斥相互作用, 并且 $c = -2/a_{1D}$, $a_{1D} = (-a_{\perp}^2/a_{3D})[1 - C(a_{3D}/a_{\perp})]$ 是一维散射长度, $a_{\perp} = \sqrt{2\hbar/m\omega_{\perp}}$, 数值常数 $C \approx 1.0326$ [47,48], 求和符号 \sum 遍及所有粒子. 这里我们只研究排斥相互作用下 Gaudin-Yang 模型的性质.

根据统计物理我们有如下热力学关系 [21]:

$$\begin{aligned} \Omega/L &= -P = E/L - N\mu/L - TS/L \\ &= e - n\mu - Ts, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 Ω , P , E , μ , T , S 分别表示系统的热力学势、压力、能量、化学势、温度和熵, 第二个等号右边的 e , n , s 分别表示能量密度, 粒子数密度和熵密度.

在有限温度的均匀系统中, (1) 式可用热力学 Bethe-ansatzs 方程求解. 我们研究的基本物理量及其积分表达式如下:

$$n = N/L = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k) dk, \quad (3)$$

$$e = E/L = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2}{2m} \rho(k) dk, \quad (4)$$

$$P = -\Omega/L = k_B T \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + \xi^{-1}(k)] \frac{dk}{2\pi}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} s = S/L &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ [\rho(k) + \rho^h(k)] \ln[(\rho(k) + \rho^h(k)) \\ &\quad - \rho(k) \ln \rho(k) - \rho^h(k) \ln \rho^h(k)] dk \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ [\sigma_n(k) + \sigma_n^h(k)] \ln[\sigma_n(k) + \sigma_n^h(k)] \\ &\quad - \sigma_n(k) \ln \sigma_n(k) - \sigma_n^h(k) \ln \sigma_n^h(k) \} dk, \end{aligned} \quad (6)$$

其中方程 (3)–(6) 等号右边的积分表达式中, $\rho(k)$,

$\rho^h(k), \sigma_n(k), \sigma_n^h(k)$ 决定于下述耦合方程:

$$\frac{1}{2\pi} = \rho(k) + \rho^h(k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sigma_n(k), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & a_n * \rho(k) \\ & = \sigma_n(k) + \sigma_n^h(k) + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \sigma_m(k), \end{aligned} \quad (8)$$

a_n, T_{nm} 定义为

$$\begin{aligned} a_n(k) &\equiv \frac{1}{2\pi} \frac{n|c|}{(nc/2)^2 + k^2}, \quad a_0(k) \equiv \delta(k), \quad (9) \\ T_{nm}(k) &\equiv \begin{cases} a_{|n-m|}(k) + 2a_{|n-m|+2}(k) \\ \quad + 2a_{|n-m|+4}(k) + \dots \\ \quad + 2a_{n+m-2}(k) + a_{n+m}(k), & n \neq m, \\ 2a_2(k) + 2a_4(k) + \dots \\ \quad + 2a_{2n-2}(k) + a_{2n}(k), & n = m, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

这里,

$$\xi(k) \equiv \frac{\rho^h(k)}{\rho(k)}, \quad \eta_n(k) \equiv \frac{\sigma_n^h(k)}{\sigma_n(k)},$$

这些物理量决定于下述耦合方程 [21]:

$$\begin{aligned} \ln \xi(k) &= \kappa_0(k) - R * \ln[1 + \xi(k)] \\ &\quad + R * \ln \xi(k) - s * \ln[1 + \eta_1(k)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \ln \eta_1(k) &= s * \ln[1 + \eta_2(k)] - s * \ln[1 + \xi(k)] \\ &\quad + s * \ln \xi(k), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \ln \eta_2(k) &= s * \ln[1 + \eta_1(k)] \\ &\quad + s * \ln[1 + \eta_3(k)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \ln \eta_n(k) &= s * \ln[1 + \eta_{n-1}(k)] \\ &\quad + s * \ln[1 + \eta_{n+1}(k)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \eta_n}{n} = \frac{2h}{T}, \quad (15)$$

其中的一些函数定义如下:

$$\kappa_0(k) = \frac{k^2 - A}{T}, \quad (16)$$

$$R(x) = a_1 * s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x-y)s(y)dy, \quad (17)$$

$$s(x) = \frac{1}{2c} \operatorname{sech} \frac{\pi x}{c},$$

$$s * f(\Lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s(\Lambda - \Lambda')f(\Lambda')d\Lambda'. \quad (18)$$

(11)—(14) 式中 $\xi_k, \eta_n(k)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 是我们要求解的未知数, 由于 n 的取值可无限大, 所

以 (11)—(14) 式是含无限个方程的积分耦合方程组, 我们利用 (15) 式对方程组进行截断并将 $\ln \xi(k), \ln \eta_1(\Lambda), \dots, \ln \eta_{n_c-1}(\Lambda), \ln \eta_{n_c}(\Lambda)$, 分别标记为 $z_1, z_2, \dots, z_{n_c}, z_{n_c+1}$, 可得到含 $n_c + 1$ 个未知数, $n_c + 1$ 个方程的积分耦合方程组:

$$\begin{aligned} z_1 &= \kappa_0 - R * \ln[1 + \exp(-z_1)] \\ &\quad - s * \ln[1 + \exp(z_2)], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -s * \ln[1 + \exp(-z_1)] \\ &\quad + s * \ln[1 + \exp(z_3)], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ z_i &= s * \ln\{[1 + \exp(z_{i-1})] \\ &\quad \times [1 + \exp(z_{i+1})]\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ z_{n_c+1} &= s * \ln \left\{ [1 + \exp(z_{n_c})] \right. \\ &\quad \times \left[\cosh \frac{h}{T} \sqrt{1 + \exp(z_{n_c+1})} \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{h}{T} (1 + \exp(z_{n_c+1}))} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

数值上我们利用牛顿法求解上述方程组. 牛顿法是一种寻求形如方程 $f(x) = 0$ 的解的方法, 其过程可表述为: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, 其中 x_n 是一个近似解. 牛顿法的主要思想是: 利用 $f(x)$ 在近似解 x_n 处的切线得到与 x 轴的交点 x_{n+1} , 则 x_{n+1} 比 x_n 更接近方程 $f(x) = 0$ 的精确解. TBA 方程 (19)—(22) 可改写为: $z_j - F_j(z_1, z_2, \dots, z_N) = f(z_j) = 0$, ($j = 1, 2, 3, \dots, n_c + 1$), 这是含有 $n_c + 1$ 个未知数 $n_c + 1$ 个方程的方程组, 其中 n_c 是利用 (15) 式对 TBA 方程截段后 n 的最大值. 数值方法上我们需要扩展到多元牛顿法, 从而可得到 $N \times N$ 的线性方程组 ($N = n_c + 1$), 之后利用 LAPACK 软件对方程组求解, 进而可得到 $z_1, z_2, \dots, z_{n_c}, z_{n_c+1}$, 即 $\ln \xi(k), \ln \eta_1(\Lambda), \dots, \ln \eta_{n_c-1}(\Lambda), \ln \eta_{n_c}(\Lambda)$, 代入 (7)—(8) 式得出 $\rho(k), \sigma_n(k)$, 最后将 $\rho(k), \sigma_n(k)$ 代入 (3)—(6) 式即可求出相关物理量.

3 结果与讨论

通过数值求解热力学 Bethe-ansatz 方程 (11)—(14) 可得到上述各个基本物理量并作出三

维图像. 以 $\varepsilon = \hbar^2 c^2 / 2m$ 为能量的单位, 以 $1/c$ 为长度的单位, 为简便我们令 $\hbar = 2m = k_B = 1$. 下面我们将通过密度和熵的数值结果来分析相关的物理.

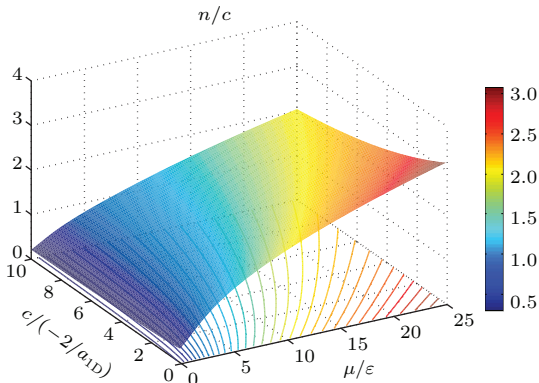


图1 (网刊彩色) 温度 $T/(\varepsilon/k_B) = 0.9$ 时, 粒子密度关于化学势及相互作用强度的图像

Fig. 1. (color online) For the temperature $T/(\varepsilon/k_B) = 0.9$, density as a function of the chemical potential and interaction.

图1给出了在温度 $T/(\varepsilon/k_B) = 0.9$ 时, 粒子密度, 化学势及相互作用强度之间的关系图像, 图右侧彩条颜色的深浅代表粒子数密度的大小. 从图中我们可以看出: 当相互作用一定时, 粒子数密度随着化学势的增加而增大; 当化学势一定时, 随着相互作用的增加, 粒子数密度减小.

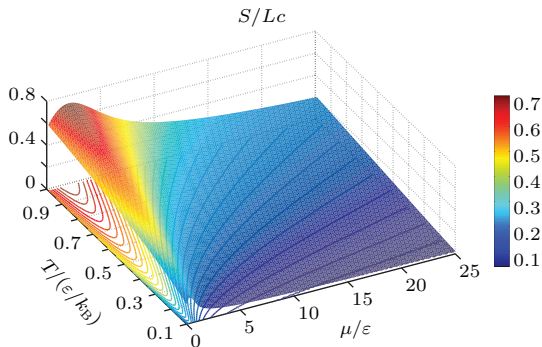


图2 (网刊彩色) 相互作用强度 $c/(-2/a_{1D}) = 1$ 时, 熵关于化学势及温度的图像

Fig. 2. (color online) For the interaction $c/(-2/a_{1D}) = 1$, entropy as a function of the chemical potential and temperature.

图2给出了当 $c/(-2/a_{1D}) = 1$ 时, 熵、化学势及温度之间的关系图像, 图右侧彩条颜色的深浅表示熵的大小. 从图2可以看出, 当给定温度时, 随着化学势的增加, 系统的熵先增加后减小, 有一个最大值; 随着温度的升高, 系统的熵增加且其最大值增大.

图3给出了当 $T/(\varepsilon/k_B) = 0.9$ 时, 熵关于化学势及相互作用强度的关系图像. 从图中可以看出, 当相互作用给定时, 随着化学势的增加, 系统的熵先增加后减小, 有一个最大值; 当给定化学势时, 随着相互作用强度的增加, 系统的熵逐渐减小, 且对应的熵的最大值逐渐减小.

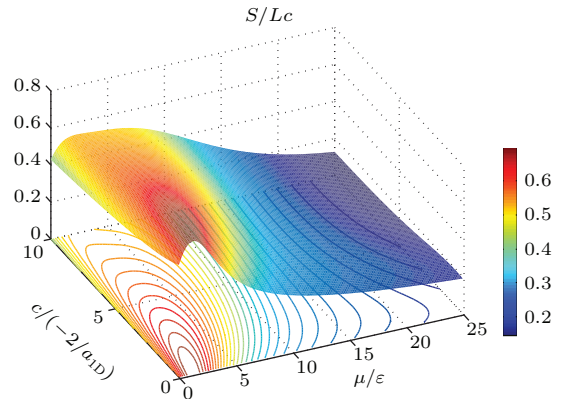


图3 (网刊彩色) 温度 $T/(\varepsilon/k_B) = 0.9$ 时, 熵关于化学势及相互作用强度的图像

Fig. 3. (color online) For the temperature $T/(\varepsilon/k_B) = 0.9$, entropy as a function of the chemical potential and interaction.

由图2和图3分析可知系统含有一个热涨落与量子涨落相互竞争的量子临界区域. 因此图中按照对系统熵的影响可分为三个区域, 分别是: 热涨落占主导因素的高温机制区域, 热涨落与量子涨落相互竞争的临界区域以及量子涨落占主导因素的Luttinger液体区域. 图2可以看出, 在高温低化学势处, 熵值较大, 属于高温区域, 温度对系统熵的影响占主导因素, 随着化学势的增加, 系统的熵先逐渐增大; 当化学势继续增加时, 系统进入临界区域, 粒子间相互作用开始对熵产生影响, 因为热涨落促进熵的增加, 量子涨落抑制熵的增加, 故温度和相互作用强度对熵的影响呈现出竞争的态势; 随着化学势继续增大到较大值时, 相互作用强度成为影响熵的主要因素, 系统进入量子涨落占主导因素的Luttinger液体态, 系统的熵逐渐减小. 图3可以看出, 相互作用强度较小时, 系统处于热涨落占主导因素的高温机制区域, 随着化学势的增加, 系统逐渐进入热涨落和量子涨落对熵的影响显现竞争态势的临界区域, 当化学势增加到较大值时, 系统进入量子涨落占主导因素的Luttinger液体态; 另一方面, 随着相互作用的增大, 系统的熵逐渐减小, 且对应的系统熵的最大值减小, 说明量子涨落对熵的抑制作用越来越明显, 并且随着相互作用强度的增

加, 高温机制区域逐渐变小, 量子涨落和热涨落相互竞争的临界区域逐渐变大. 因此, 当相互作用继续变大时, 临界区域会继续变大, 在较小化学势处, 量子涨落对熵的影响就会显现出很强的抑制作用.

4 结 论

本文主要通过数值求解一维均匀费米 Gaudin-Yang 模型的热力学 Bethe-ansatz 方程, 得出了一些基本物理量, 如密度和熵的结果, 并给出了当化学势和温度改变时, 密度和熵的变化图像. 结果表明: 系统可分为三个区域, 即高温机制区域, 量子临界区域和 Luttinger 液体区域. 对于系统熵的影响, 在高温区, 热涨落占主导因素; 在临界区, 热涨落和量子涨落呈现出竞争态势; 在 Luttinger 液体区, 量子涨落占主导因素.

本文对有限温度 TBA 方程的精确求解结果将可以进一步应用到有限温度的密度泛函理论中去^[49], 并可用于分析有限温度下的集体激发模^[22,50], 这将为实验上探测冷原子体系提供可用于测量和比较的理论依据.

参考文献

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [2] Feshbach H 1958 *Ann. Phys.* **5** 357
- [3] Tiesinga E, Verhaar B J, Stoof H T C 1993 *Phys. Rev. A* **47** 4114
- [4] DeMarco B, Jin D S 1999 *Science* **285** 1703
- [5] Köhl M, Moritz H, Stöferle T, Günter K, Esslinger T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 080403
- [6] Geng T, Yan S B, Wang Y H, Yang H J, Zhang T C, Wang J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5104 (in Chinese) [耿涛, 闫树斌, 王彦华, 杨海菁, 张天才, 王军民 2005 物理学报 **54** 5104]
- [7] Cazalilla M A, Citro R, Giamarchi T, Orignac E, Rigol M 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1405
- [8] Guan X W, Batchelor M T, Lee C H 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1633
- [9] Gao X L 2010 *Phys. Rev. B* **81** 104306
- [10] Li W, Gao X L, Kollath C, Polini M 2008 *Phys. Rev. B* **78** 195109
- [11] Xu Z J, Liu X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120305 (in Chinese) [徐志君, 刘夏吟 2011 物理学报 **60** 120305]
- [12] Astrakharchik G E, Blume D, Giorgini S, Pitaevskii L P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 050402
- [13] van Amerongen A H, van Es J J P, Wicke P, Kheruntsyan K V, van Druten N J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 090402
- [14] Moritz H, Stöferle T, Köhl M, Esslinger T 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 250402
- [15] Yang C N 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312
- [16] Gaudin M 1967 *Phys. Lett. A* **24** 55
- [17] Menotti C, Stringari S 2002 *Phys. Rev. A* **66** 043610
- [18] Gao X L, Asgari R 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033604
- [19] Gao X L, Polini M, Asgari R, Tosi M P 2006 *Phys. Rev. A* **73** 033609
- [20] Guan L M, Chen S, Wang Y P, Ma Z Q 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 160402
- [21] Takahashi M 1971 *Prog. Theor. Phys.* **46** 1388
- [22] Hu H, Gao X L, Liu X J 2014 *Phys. Rev. A* **90** 013622
- [23] Lee J Y, Guan X W, Sakai K, Batchelor M T 2012 *Phys. Rev. B* **85** 085414
- [24] Chen Y Y, Jiang Y Z, Guan X W, Zhou Q 2014 *Nat. Commun.* **5**
- [25] Hoffman M D, Javernick P, Loheac A C, Porter W J, Anderson E R, Drut J E 2014 arXiv:1410.7370v1
- [26] Zhao E, Guan X W, Liu W V, Batchelor M T, Oshikawa M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 140404
- [27] Batchelor M T, Foerster A, Guan X W, Kuhn C C N 2010 *J. Stat. Mech.* P12014
- [28] Klümper A, Păţu O I 2011 *Phys. Rev. A* **84** 051604
- [29] Kheruntsyan K V, Gangardt D M, Drummond P D, Shlyapnikov G V 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 040403
- [30] Kheruntsyan K V, Gangardt D M, Drummond P D, Shlyapnikov G V 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053615
- [31] Takahashi M 1972 *Prog. Theor. Phys.* **47** 69
- [32] Usuki T, Kawakami N, Okiji A 1989 *Phys. Lett. A* **135** 476
- [33] Usuki T, Kawakami N, Okiji A 1990 *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** 1357
- [34] Suzuki M 1985 *Phys. Rev. B* **31** 2957
- [35] Suzuki M, Inoue M 1987 *Prog. Theor. Phys.* **78** 787
- [36] Jüttner G, Klümper A, Suzuki J 1998 *Nucl. Phys. B* **522** 471
- [37] Klümper A, Bariev R Z 1996 *Nucl. Phys. B* **458** 623
- [38] Takahashi M, Shiroishi M 2002 *Phys. Rev. B* **65** 165104
- [39] Khatami E, Rigol M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053611
- [40] Wolak M J, Rousseau V G, Miniatura C, Grémaud B, Scalettar R T, Batrouni G G 2010 *Phys. Rev. A* **82** 013614
- [41] Snyder A, Tanabe I, De Silva T 2011 *Phys. Rev. A* **83** 063632
- [42] Carmelo J M P, Gu S J, Sampaio M J 2014 *J. Phys.* **47** 255004
- [43] Carmelo J M P, Gu S J, Sacramento P D 2013 *Ann. Phys.* **339** 484
- [44] Chen F, Ying H P, Xu T F, Li W Z 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 1672 (in Chinese) [陈锋, 应和平, 徐铁锋, 李文铸 1994 物理学报 **43** 1672]
- [45] Gao X L, Chen A H, Tokatly I V, Kurth S 2012 *Phys. Rev. B* **86** 235139
- [46] Campo V L 2014 arXiv:1407.6726v1
- [47] Olshanii M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 938
- [48] Dunjko V, Lorent V, Olshanii M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5413
- [49] Hu J H, Wang J J, Gao X L, Okumura M, Igarashi R, Yamada S, Machida M 2010 *Phys. Rev. B* **82** 014202
- [50] Wei F X, Gao X L 2014 *Journal of Zhejiang Normal University (Nat. Sci.)* **37** 54 (in Chinese) [卫福霞, 高先龙 2014 浙江师范大学学报(自然科学版) **37** 54]

Thermodynamic properties of one-dimensional Gaudin-Yang model at finite temperature*

Zhang Tian-Bao^{1)†} Yu Xuan-Ping¹⁾ Chen A-Hai²⁾

1) (*Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

2) (*Department of Physics and Astronomy, University College London, Gower Street, London WC1E 6BT, United Kingdom.*)

(Received 4 January 2015; revised manuscript received 18 March 2015)

Abstract

The one-dimensional system interacting via a delta-function interparticle interaction is a very important one in cold atomic systems and has fundamental importance in many-body physics. In one dimension, due to the geometric confinement induced quantum correlations and quantum fluctuations, there may exist a number of unusual phenomena, such as spin-charge separation, effective fermionization and quantum criticality. This paper studies the basic properties of a uniform one-dimensional Gaudin-Yang model for fermions by solving the thermodynamic Bethe-ansatz equations by a numerical method. Numerically, we use the many-variable Newton's method to solve the coupled equations. We analyze the physical properties, including density, interaction, temperature and entropy at a given temperature and a given interaction, separately. We know that a lot of researches are limited to zero temperature. However, we cannot reach the absolute zero temperature in the real cold atomic experiment. So it is important to deal with the finite temperature problems. We study the density and entropy as a function of the chemical potential, temperature and interaction and, then give the phase diagrams, respectively. We found that there is a quantum critical zone in the phase diagram of entropy, including the high temperature zone with thermal fluctuations and the Luttinger liquid zone with quantum fluctuations. For a given temperature and low chemical potential, the thermal fluctuations are the main factor in the entropy. With the increase of chemical potential, the system enters the quantum critical zone where the competitive effect between the thermal fluctuations and the quantum fluctuations exists. When the chemical potential is large enough, the quantum fluctuations become the main factor in the system's entropy, and we get the Luttinger liquid phase. Our results can be further used in the finite temperature density-functional theory and to analyze the collective phenomena at a finite temperature.

Keywords: thermodynamic Bethe-ansatz equations, finite temperature, Gaudin-Yang model, quantum criticality

PACS: 64.60.F-, 71.10.-w

DOI: 10.7498/aps.64.156402

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11174253, 11374266), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. R6110175).

† Corresponding author. E-mail: 34421501@qq.com