

量子力学坐标-动量算符幂次排序互换的简捷公式与新推导方法

范洪义 楼森岳 张鹏飞

Operator-ordering identities for mutual transformation of power of coordinate-momentum operators obtained by a new concise method

Fan Hong-Yi Lou Sen-Yue Zhang Peng-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 160302 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.160302

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160302>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

介观 RLC 电路的密度矩阵的量子耗散

Quantum dissipation of the density matrix of mesoscopic RLC circuit

物理学报.2014, 63(11): 110301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110301>

利用热纠缠态表象获得 Caldeira-Leggett 密度算符方程的积分形式解

Integral-form solution of the Caldeira-Leggett density operator equation obtained by virtue of thermo entangled state representation

物理学报.2012, 61(21): 210301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.210301>

量子力学坐标-动量算符幂次排序互换的简捷公式 与新推导方法*

范洪义^{1)†} 楼森岳¹⁾ 张鹏飞²⁾

1)(宁波大学物理系, 宁波 315211)

2)(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

(2015年1月25日收到; 2015年4月1日收到修改稿)

量子力学坐标-动量算符幂次排序的相互转换是一个基本的量子力学课题, 本文提出了一个十分简捷有效的方法处理此问题, 即利用双变量厄米特多项式的母函数性质及有序算符记号内的算符特点, 给出一系列关于坐标-动量算符幂次排序的恒等式, 它们具有广泛的应用.

关键词: 基本对易关系, 双变量厄米特多项式的母函数

PACS: 03.65.Ca, 02.90.+p

DOI: 10.7498/aps.64.160302

1 引言

量子力学的基本对易关系 $[Q, P] = i\hbar$ 是1926年分别由 Heisenberg 和 Born 发现, 而其重要性为 Dirac 特别强调^[1], 认为它是量子理论的核心, 这里 Q, P 是量子力学坐标算符和动量算符. 一百多年来, 坐标-动量算符幂次排序互换的课题时有文献讨论, 因为这是一个基本的问题, 也比较复杂, 例如将 $P^n Q^m$ 重排为所有 Q 在左、所有 P 在右的结果是什么? 将它们排为 Weyl 序的形式又是什么? 但是就作者所知, 尚未见解决这个问题的简捷途径的报道.

理论物理学家的任务是找出简捷而明了易懂的方法, 本文提出了一组简洁的算符排序公式, 它们是用一个特殊函数(双变量厄米特多项式)来表示的.

我们提出的新方法是充分利用双变量厄米特多项式的母函数的性质及有序算符记号内的算符特点, 导出一系列关于坐标-动量算符幂次排序的恒等式, 它们具有潜在的应用.

单变量厄米特多项式 $H_n(x)$ 的母函数一般在数理方法及量子力学都已讲到,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{-t^2+2tx}, \quad (1)$$

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-t^2+2tx} \Big|_{t=0}. \quad (2)$$

而双变量厄米特多项式也是可以通过其母函数来定义:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n!m!} H_{n,m}(x,y) = e^{-ts+tx+sy}. \quad (3)$$

也可以说(1)式是(2)式的简并情形. 双变量厄米特多项式的应用也很重要而广泛, 尤其是在研究量子纠缠方面^[2]. 把(2)式改写为

$$H_{n,m}(x,y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n \partial s^m} e^{-ts+tx+sy} \Big|_{t=s=0}, \quad (4)$$

就可得到 $H_{n,m}(x,y)$ 的幂级数展开

$$H_{n,m}(x,y) = \sum_{l=0}^{\min[m,n]} \frac{n!m!(-1)^l}{l!(m-l)!(n-l)!} \times x^{n-l} y^{m-l}. \quad (5)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 11175113)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: fanhongyi@nbu.edu.cn

灵活应用 (3) 和 (4) 式就可立刻导出 $P^n Q^m$ 化为 Q 在左、 P 在右的结果. 我们将给出化 $P^n Q^m$ 为 Weyl 排序的结果, 其形式也很简洁; 我们还将给出化 Weyl 排序为 Q 在左、 P 在右的结果, 它们会在量子过程的各种计算中发挥作用.

2 化 $P^n Q^m$ 为 Q 在左、 P 在右

用 Baker-Hausdorff 公式考察

$$\begin{aligned} e^{\lambda P} e^{\sigma Q} &= e^{\sigma Q} e^{\lambda P} e^{[\lambda P, \sigma Q]} \\ &= e^{\sigma Q} e^{\lambda P} e^{-i\lambda\sigma\hbar}, \end{aligned} \quad (6)$$

这里 λ 和 σ 是实参数, (6) 式右边是坐标算符排在了动量算符之左边, 我们记为 $\mathfrak{Q}$ -排序, 注意在 $\mathfrak{Q}$ -排序记号内部 Q 和 P 是可交换的 [3-5] (这是我们这个方法的关键), 这正如在正规乘积记号内部产生算符和湮没算符是可交换的一样. 于是

$$e^{\lambda P} e^{\sigma Q} = \mathfrak{Q} \left[e^{\sigma Q + \lambda P - i\lambda\sigma\hbar} \right]. \quad (7)$$

现在我们用 (3) 式将其右边展开为双变量厄米特多项式, 得到

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Q} \left[e^{\sigma Q + \lambda P - i\lambda\sigma\hbar} \right] \\ &= \mathfrak{Q} \left[\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(i\lambda\sqrt{\hbar})^n (\sigma\sqrt{\hbar})^m}{n!m!} H_{n,m} \right. \\ &\quad \left. \times (-iP/\sqrt{\hbar}, Q/\sqrt{\hbar}) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

对照 $e^{\lambda P} e^{\sigma Q}$ 的幂级数展开

$$e^{\lambda P} e^{\sigma Q} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \sigma^m}{n!m!} P^n Q^m, \quad (9)$$

就立刻导出

$$\begin{aligned} &P^n Q^m \\ &= i^n (\sqrt{\hbar})^{m+n} \mathfrak{Q} \left[H_{n,m} (-iP/\sqrt{\hbar}, Q/\sqrt{\hbar}) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

这是一个简洁易记的公式. 或用 (5) 式得

$$\begin{aligned} &P^n Q^m \\ &= i^n (\sqrt{\hbar})^{m+n} \mathfrak{Q} \left[\sum_{l=0}^{\min[m,n]} \frac{n!m!(-1)^l}{l!(m-l)!(n-l)!} \right. \\ &\quad \left. \times (-iP/\sqrt{\hbar})^{n-l} (Q/\sqrt{\hbar})^{m-l} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\min[m,n]} \frac{n!m!(-i)^l \hbar^l}{l!(m-l)!(n-l)!} Q^{m-l} P^{n-l}. \end{aligned} \quad (11)$$

以下的推导为书写简洁起见, 我们令普朗克常数 $\hbar = 1$.

3 化 $Q^m P^n$ 为 P 在左、 Q 在右

同样的方法, 考察

$$\begin{aligned} e^{\sigma Q} e^{\lambda P} &= e^{\lambda P} e^{\sigma Q} e^{-[\lambda P, \sigma Q]} \\ &= e^{\lambda P} e^{\sigma Q} e^{i\lambda\sigma}, \end{aligned} \quad (12)$$

其右边是动量算符排在了坐标算符之左边, 我们记为 $\mathfrak{P}$ -排序, 注意在 $\mathfrak{P}$ -排序记号内部 Q 和 P 是可交换的. 于是

$$e^{\sigma Q} e^{\lambda P} = \mathfrak{P} \left[e^{\sigma Q + \lambda P + i\lambda\sigma} \right]. \quad (13)$$

现在我们用 (3) 式将其右边展开为双变量厄米特多项式, 得到

$$\begin{aligned} &\mathfrak{P} \left[e^{\sigma Q + \lambda P + i\lambda\sigma} \right] \\ &= \mathfrak{P} \left[\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n \sigma^m}{n!m!} H_{n,m} (iP, Q) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

对照

$$e^{\sigma Q} e^{\lambda P} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \sigma^m}{n!m!} Q^m P^n, \quad (15)$$

就立刻得到简洁易记的公式

$$Q^m P^n = (-i)^n \mathfrak{P} [H_{n,m} (iP, Q)]. \quad (16)$$

或用 (5) 式得

$$\begin{aligned} &Q^m P^n = (-i)^n \mathfrak{P} \left[\sum_{l=0}^{\min[m,n]} \frac{n!m!(-1)^l}{l!(m-l)!(n-l)!} \right. \\ &\quad \left. \times (iP)^{n-l} Q^{m-l} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\min[m,n]} \frac{n!m!i^l}{l!(m-l)!(n-l)!} \\ &\quad \times P^{n-l} Q^{m-l}. \end{aligned} \quad (17)$$

4 化 $P^n Q^m$ 为 Weyl 排序

把 $e^{\lambda q + \sigma p}$ 直接量子化为 $e^{\lambda Q + \sigma P}$ 的方案称为 Weyl-Wigner 量子化, 每一种量子化方案对应一种算符排序, $e^{\lambda Q + \sigma P}$ 是 Weyl 排序好了的算符, 所以

$$e^{\lambda Q + \sigma P} = \dot{\dot{e^{\lambda Q + \sigma P}}}, \quad (18)$$

这里记号 $\dot{\dot{\cdot}}$ 表示 Weyl 排序 [6], 注意到

$$e^{\lambda P} e^{\sigma Q} = e^{\sigma Q + \lambda P + \frac{1}{2}[\lambda P, \sigma Q]}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{\sigma Q + \lambda P - i\frac{1}{2}\lambda\sigma} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{\sigma Q + \lambda P - i\frac{1}{2}\lambda\sigma} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

在 Weyl 排序内部 Q 和 P 也是可交换的, 所以可用 (5) 式展开

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} e^{\sigma Q + \lambda P - i\frac{1}{2}\lambda\sigma} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^m}{n!m!} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &\quad \times H_{n,m}(-i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

比较 (9) 式得到

$$\begin{aligned}
 P^n Q^m &= i^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} H_{n,m}(-i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

5 化 $\begin{pmatrix} P^n Q^m \\ \vdots \end{pmatrix}$ 为 $\mathfrak{P}$ -排序

反之, 若要将已是 Weyl 排序的算符 $\begin{pmatrix} P^n Q^m \\ \vdots \end{pmatrix}$ 化为 $\mathfrak{P}$ -排序, 则用

$$\begin{aligned}
 e^{\sigma Q + \lambda P} &= \begin{pmatrix} e^{\sigma Q + \lambda P} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= e^{i\frac{1}{2}\lambda\sigma} e^{\lambda P} e^{\sigma Q} \\
 &= \mathfrak{P} \left[e^{i\frac{1}{2}\lambda\sigma + \lambda P + \sigma Q} \right], \quad (22)
 \end{aligned}$$

右边用 (5) 式展开

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{P} \left[e^{i\frac{1}{2}\lambda\sigma + \lambda P + \sigma Q} \right] \\
 &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\left(-i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^m}{n!m!} \mathfrak{P} \\
 &\quad \times \left[H_{n,m}(i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \right]. \quad (23)
 \end{aligned}$$

比较

$$\begin{pmatrix} e^{\sigma Q + \lambda P} \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \sigma^m}{n!m!} \begin{pmatrix} P^n Q^m \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (24)$$

得到

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} P^n Q^m \\ \vdots \end{pmatrix} &= (-i)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m} \mathfrak{P} \\
 &\quad \times \left[H_{n,m}(i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \right]. \quad (25)
 \end{aligned}$$

6 化 $Q^m P^n$ 为 Weyl 排序

注意到

$$e^{\sigma Q} e^{\lambda P} = e^{\sigma Q + \lambda P + \frac{1}{2}[\sigma Q, \lambda P]}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{\sigma Q + \lambda P + i\frac{1}{2}\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} e^{\sigma Q + \lambda P + i\frac{1}{2}\lambda\sigma} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (26)
 \end{aligned}$$

右边用 (5) 式展开

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} e^{\sigma Q + \lambda P + i\frac{1}{2}\lambda\sigma} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\left(-i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^m}{n!m!} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} H_{n,m}(i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

比较 (15) 式得到

$$\begin{aligned}
 Q^m P^n &= (-i)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} H_{n,m}(i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

这是化 $Q^m P^n$ 为 Weyl 排序的易记忆公式。

7 化 $\begin{pmatrix} P^n Q^m \\ \vdots \end{pmatrix}$ 为 $\mathfrak{Q}$ -排序

反之, 若要将已是 Weyl 排序的算符 $\begin{pmatrix} P^n Q^m \\ \vdots \end{pmatrix}$ 化为 $\mathfrak{Q}$ -排序, 则用

$$\begin{aligned}
 e^{\sigma Q + \lambda P} &= \begin{pmatrix} e^{\sigma Q + \lambda P} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= e^{-i\frac{1}{2}\lambda\sigma} e^{\sigma Q} e^{\lambda P} \\
 &= \mathfrak{Q} \left[e^{-i\frac{1}{2}\lambda\sigma + \lambda P + \sigma Q} \right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

右边用 (5) 式展开

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{Q} \left[e^{-i\frac{1}{2}\lambda\sigma + \lambda P + \sigma Q} \right] \\
 &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^m}{n!m!} \mathfrak{Q} \\
 &\quad \times \left[H_{n,m}(-i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \right], \quad (30)
 \end{aligned}$$

比较 (24) 式得到

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} P^n Q^m \\ \vdots \end{pmatrix} &= i^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m} \mathfrak{Q} \\
 &\quad \times \left[H_{n,m}(-i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \right]. \quad (31)
 \end{aligned}$$

对照 (25) 式我们看出

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{Q} \left[H_{n,m}(-i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \right] \\
 &= (-1)^n \mathfrak{P} \left[H_{n,m}(i\sqrt{2}P, \sqrt{2}Q) \right]. \quad (32)
 \end{aligned}$$

8 应 用

作为(31)式的一个应用, 我们可立即得到 Weyl 排序算符 $\dot{\mathbf{P}}^n \mathbf{Q}^m \dot{\mathbf{}}$ 的如下的转换矩阵元

$$\begin{aligned} & \langle q | \dot{\mathbf{P}}^n \mathbf{Q}^m \dot{\mathbf{}} | p \rangle \\ &= i^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+m} \langle q | \mathfrak{H}_{n,m} \left(-i\sqrt{2}\mathbf{P}, \sqrt{2}\mathbf{Q} \right) | p \rangle \\ &= \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+m} \mathfrak{H}_{n,m} \left(-i\sqrt{2}p, \sqrt{2}q \right) e^{ipq}, \end{aligned} \quad (33)$$

这里 $|p\rangle$ 是动量本征态, $\langle q|$ 是坐标本征态. 根据 Weyl 对应

$$\dot{\mathbf{P}}^n \mathbf{Q}^m \dot{\mathbf{}} = \iint dp' dq' \Delta(p', q') p'^n q'^m, \quad (34)$$

其中 $\Delta(p', q')$ 是 Wigner 算符

$$\Delta(p', q') = \dot{\mathbf{}} \delta(p - \mathbf{P}) \delta(q - \mathbf{Q}) \dot{\mathbf{}}, \quad (35)$$

其原始定义为

$$\Delta(p', q') = \int \frac{du}{2\pi} e^{-ip'u} \left| q' - \frac{u}{2} \right\rangle \left\langle q' + \frac{u}{2} \right|, \quad (36)$$

所以有

$$\begin{aligned} & \langle q | \dot{\mathbf{P}}^n \mathbf{Q}^m \dot{\mathbf{}} | p \rangle \\ &= \iint dp' dq' p'^n q'^m \\ & \quad \times \int \frac{du}{2\pi} e^{-ip'u} \left\langle q \left| q' - \frac{u}{2} \right\rangle \left\langle q' + \frac{u}{2} \right| p \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint dp' dq' p'^n q'^m \\ & \quad \times \int \frac{du}{2\pi} e^{-ip'u} \delta \left(q' - q - \frac{u}{2} \right) e^{ip(q' + \frac{u}{2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint \frac{dp' dq'}{\pi} p'^n q'^m \\ & \quad \times e^{-i2(q'-q)(p'-p)} e^{ipq}. \end{aligned} \quad (37)$$

对照(33)式就得到相空间中积分变换公式^[7]

$$\begin{aligned} & \iint \frac{dp' dq'}{\pi} p'^n q'^m e^{-i2(q'-q)(p'-p)} \\ &= i^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+m} \mathfrak{H}_{n,m} \left(-i\sqrt{2}p, \sqrt{2}q \right). \end{aligned} \quad (38)$$

9 结 论

利用双变量厄米特多项式的母函数性质, 对于量子力学坐标-动量算符幂次排序互换的问题, 本文提出了新的简捷有效的方法, 使得复杂的问题变得清晰, 从而导出了简明的公式. 本文中介绍的理论新颖简洁, 显示了理论物理的学术意义.

参考文献

- [1] Dirac P A M 1930 *The Principle of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press)
- [2] Fan H Y, Zhan D H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 060301
- [3] Fan H Y, Lou S Y 2013 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **56** 2042
- [4] Fan H Y, Lou S Y, Pan X Y, Da C 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 110304 (in Chinese) [范洪义, 楼森岳, 潘孝胤, 笪诚 2014 物理学报 **63** 110304]
- [5] Fan H Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020302 (in Chinese) [范洪义 2014 物理学报 **63** 020302]
- [6] Fan H Y 1992 *J. Phys. A* **25** 3443
- [7] Fan H Y, Liang Z F 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 050301 (in Chinese) [范洪义, 梁祖峰 2015 物理学报 **64** 050301]

Operator-ordering identities for mutual transformation of power of coordinate-momentum operators obtained by a new concise method^{*}

Fan Hong-Yi^{1)†} Lou Sen-Yue¹⁾ Zhang Peng-Fei²⁾

1) (Department of Physics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

2) (Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 25 January 2015; revised manuscript received 1 April 2015)

Abstract

Since the foundation of quantum mechanics, operator-ordering identities for mutual transformation of power of coordinate-momentum operators have been a fundamental and tough topic. To the best of our knowledge, this topic has not been tackled smoothly because there is no elegant and direct way to investigate it. In this paper we report a very concise and novel method to handle this topic, i.e., we employ the generating function of two-variable Hermite polynomial and the characteristics of ordered operators to derive a series of operator-ordering identities for mutual transformation of power of coordinate-momentum operators: they surely possess potential applications. The essence of our method lies in the fact that coordinate-momentum operators can be permutable within ordered product of operators, just as the scenarios in $\mathbf{P}\text{-}\mathbf{Q}$ ordering, $\mathbf{Q}\text{-}\mathbf{P}$ ordering and Weyl ordering. We also derive the integration transformation formula about two-variable Hermite polynomial in phase space. The correspondence relation between operator ordering and quantization recipe is established. The beauty of theoretical physics is embodied extensively in the paper.

Keywords: fundamental commutative relation, generating function of two-variable Hermite polynomials

PACS: 03.65.Ca, 02.90.+p

DOI: 10.7498/aps.64.160302

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11175113).

[†] Corresponding author. E-mail: fanhongyi@nbu.edu.cn