

混沌信号的压缩感知去噪

李广明 吕善翔

Chaotic signal denoising in a compressed sensing perspective

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 160502 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.160502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于有源广义忆阻的无感混沌电路研究

Inductorless chaotic circuit based on active generalized memristors

物理学报.2015, 64(17): 170503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170503>

两级式光伏并网逆变器建模与非线性动力学行为研究

Numerical modeling and research on nonlinear dynamic behaviors of two-stage photovoltaic grid-connected inverter

物理学报.2015, 64(13): 130503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130503>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔

Period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap

物理学报.2015, 64(12): 120502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120502>

Duffing 系统随机相位抑制混沌与随机共振并存现象的机理研究

Mechanism for the coexistence phenomenon of random phase suppressing chaos and stochastic resonance in Duffing system

物理学报.2015, 64(10): 100501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100501>

混沌信号的压缩感知去噪*

李广明^{1)†} 吕善翔²⁾

1)(东莞理工学院计算机学院, 东莞 523808)

2)(华南理工大学电子与信息学院, 广州 510641)

(2015年3月25日收到; 2015年5月23日收到修改稿)

对非线性时间序列进行噪声抑制是从中提取有效信息的前提. 混沌信号的去噪算法不仅要使滤波后的信号具有较高的信噪比, 也要具有较好的不确定性. 从压缩感知的角度出发, 提出了一种新的噪声抑制方法. 该方法包括估计噪声方差, 以及依据动态的稀疏度将观测值往确定的过完备字典上投影. 仿真实验表明, 该方法比常用的小波阈值法和局部曲线拟合法具有更高的输出信噪比, 而原始信号的混沌特性也能得到较大程度的恢复.

关键词: 混沌信号, 去噪, 压缩感知, 稀疏度

PACS: 05.45.-a, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.64.160502

1 引言

最近几十年已经提出了很多应用混沌信号的通信系统, 其中混沌信号适用于保密通信的原因在于其似噪声特性和长期不可预测性^[1,2]. 由于时变, 多径、多用户信道中噪声的存在, 实现相关检测所需要的混沌同步技术较难实现. 假设通信模型的过程噪声属于加性高斯白噪声 (additive white gaussian noise, AWGN), 有效的混沌信号的去噪技术将大大提高所估计信道矩阵的精度. 另一方面, 不少论著也将海杂波信号、地热信号等作为混沌信号建模, 对这些信号做进一步分析也需要对混沌信号进行有效去噪^[3].

当前, 对混沌信号的去噪方法可以分为三大类. 1) 模型-参数已知: 使用状态空间模型的无先导卡尔曼滤波及容积卡尔曼滤波等都使用了混沌信号递归表达式作为状态方程^[4,5], 该类方法能够实现在线估计, 然而其精度有限, 且噪声方差和迭代参数都要作为先验信息输入. 2) 模型已知-参数未知: 文献^[3]提出的相空间去噪方法属于这种半盲的模型, 即显式地使用了混沌信号的源表达式,

但递归参数却是在算法中使用最小二乘法进行估计, 最后再将观测信号和估计的信号的全局误差最小化. 3) 模型未知-参数未知: 该方法属于全盲先验, 且各种自然界产生的信号也只能使用该方法进行噪声抑制. 小波阈值 (wavelet threshold, WT) 算法^[6,7]、局部曲线拟合 (local curve fitting, LCF) 算法^[8,9]以及经验模态分解 (empirical mode decomposition, EMD) 算法^[10]在全盲方法中具有代表性. 这三种方法本质上都是利用了混沌流信号所具有的低频性质, 在滤波过程中尽可能在保留非周期性质的前提下进行低通滤波, 而它们的有效性取决于过滤边界的确定. 比如, WT 算法是将高频带某个阈值之下的系数归零 (硬阈值), LCF 算法是在某个最优的窗口长度之下进行硬投影, EMD 算法的关键是选取最优的本征函数数目对源信号进行重构. 在这几种较为成熟的算法体系的基础上, 本文提出使用压缩感知 (compressed sensing, CS) 理论体系的稀疏重构技术来进行混沌信号的噪声抑制.

研究压缩感知理论的热潮可以追溯到 Candes 等^[11]在 2006 年提出用过完备的矩阵来对源信号

* 国家自然科学基金 (批准号: 61170216, 61372082) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lgngmng@163.com

进行压缩采样, 从而意味着人们可以制造模拟-信息采样器, 比如单原子相机等. 后续的压缩感知理论也拓宽到更广的应用方向, 比如无线电信号处理和生物学图像处理 [12,13]. CS理论的应用前提是能够对信源进行直接或间接的稀疏建模, 其核心理论则在于不断优化前端采样矩阵的等距约束常数 (restricted isometry constant, RIC) 以及提出更高精度、更低复杂度或对噪声更鲁棒的后端恢复算法 [14-18].

本文从压缩感知理论出发提出一种对混沌流信号的去噪方法. 文中采用了CS理论的稀疏建模思想, 因为混沌流信号在很多字典的分解下都对应着稀疏的频域. 本文算法的创新性在于对重构信号的稀疏度使用噪声强度来动态确定, 以及给出一种低复杂度的字典的设计方案. 本文的组织架构如下: 第二部分介绍基于CS的去噪模型, 第三部分引出本文算法并详述每个环节的原理, 第四部分分析本文算法的特性和原理, 第五部分通过实验仿真与其他经典算法进行比较, 最后是结论.

2 压缩感知的去噪原理

记观测的标量混沌序列为 $y(n)$, 原始混沌序列为 $x(n)$, 高斯过程噪声 $v(n)$ 具有零均值和方差 σ^2 , 一种具有广泛代表性的加性噪声混合模型为

$$y(n) = x(n) + v(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (1)$$

按照分帧(分段)处理的方式, 以长度 L 为单位, 则方程(1)改写为 $\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$, 其中 $\mathbf{y}_t = [y(t), \dots, y(t+L-1)]^T \in \mathbb{R}^L$, \mathbf{x}_t 和 \mathbf{v}_t 的记述也类似.

定义1 记 $\mathbf{s}_t \in \mathbb{R}^L$, 且 \mathbf{s}_t 的“稀疏”涵义是: $\text{spark}(\mathbf{s}_t) < L$, 其中函数 $\text{spark}(\cdot)$ 表示取向量的非零元素个数. 若 \mathbf{x}_t 能使用过完备矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M' \times N'}$ 稀疏表示为 \mathbf{s}_t , 则下述条件成立:

$$\|\mathbf{x}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_t\| \leq \zeta \rightarrow 0. \quad (2)$$

由此, 只要构造的矩阵 \mathbf{A} 能将 \mathbf{x}_t 稀疏展开, 方程(1)可以当作压缩感知领域的基追踪去噪问题 (basis pursuit denoising, BPDN) 处理:

$$(P_1^\xi) : \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}_t\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_t\|_2 \leq \xi. \quad (3)$$

压缩感知算法的提出对应着模拟-信息转换器的实现, 其BPDN问题中的采样矩阵 \mathbf{A} 在前端采样时已经确定, 而噪声项 $v(n)$ 则来源于转换器相乘

积分之后的量化误差. 若要将BPDN的原理推广到混沌信号去噪, 以下几个问题必须解决:

- 1) 如何选取每一帧信号的稀疏度 $\text{spark}(\mathbf{s}_t)$ (也可表示为 $\|\mathbf{s}_t\|_0$);
- 2) 如何设置一个合适的字典 \mathbf{A} ;
- 3) 在此应用背景下如何设计一个最优的恢复算法.

针对上述三个问题, 本文提出一种稀疏度动态确定、噪声信号往结构矩阵 (structured matrix, SM) 投影、以及最后使用零范数优化来重构信号的去噪方法.

3 本文方法

由于在盲处理的情况下过程噪声的能量仍然能通过最小全变分或均值滤波等方法粗略估计, 本文将去噪模型中的稀疏度建立在这个参量基础上, 并定义问题 (P_0^ζ) 为

$$(P_0^\zeta) : \min_{\mathbf{A}\mathbf{s}_t} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}_t\|_2$$

$$\text{subject to } \|\mathbf{s}_t\|_0 = f(\sigma_y^2, \sigma_n^2), \quad (4)$$

其中 $f(\sigma_y^2, \sigma_n^2) = \left\lfloor \frac{M}{\omega} \tanh\left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_n^2}\right) \right\rfloor + 1$ 表示有关输入信号能量 σ_y^2 和估计噪声能量 σ_n^2 的函数, ω 是常数, $2M+1$ 是向量 \mathbf{y} 的长度. 方程(4)将估计信号的稀疏度随着噪声的增强而缩小, 原因在于: 噪声越大, 由零范数追踪得到字典 \mathbf{A} 的原子(列)为误判的概率也越大, 所以只使用置信概率较高的原子来重构 \mathbf{x}_t 能够实现最大程度的噪声抑制.

3.1 构造字典

所有的混沌流信号都可以用微分方程 $\dot{z} = F(z)$ 进行描述, 并且由于 $F(z)$ 是递归的表示方法, 因而从该系统产生的 $y(\alpha)$ 是 $(k+1)$ 阶可微的, $y(t)$ 关于 α 的泰勒展开公式为

$$y(n) = y(\alpha) + y'(\alpha)(n-\alpha) + \dots + \frac{y^{(k)}(\alpha)}{k!} (n-\alpha)^k + o((n-\alpha)^{k+1}). \quad (5)$$

进一步将每段待处理数据看作以原点为中心, 方程(5)可以使用麦克劳林级数表示为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} n^k. \quad (6)$$

基于上述表示, 矩阵 \mathbf{A} 的每个原子可以分别设为一个对应着稀疏系数的幂指数, 也即

$\mathbf{A}(1 : M', j) \triangleq \mathbf{a}_j = n^{j-1}$, 其中 $1 \leq j \leq N'$, $n = -\lceil \frac{M'-1}{2} \rceil : 1 : \lceil \frac{M'-1}{2} \rceil$. 由于具有单位范数的原子 $\mathbf{a}_j (\forall j)$ 可以简化后续恢复算法的步骤, 因此将其规范化为: $\mathbf{a}_j \leftarrow \frac{\mathbf{a}_j}{\|\mathbf{a}_j\|_2}$.

3.2 求解方程 (4)

对于问题 (P_0^c) , 尽管将 ℓ_0 范数约束转为 ℓ_1 范数约束会使得恢复精度具有更大的理论边界, 但 ℓ_1 对应的凸面松弛算法比 ℓ_0 对应的贪婪算法速度慢 $1/\Omega(\text{Iter}/K)$, 其中 Iter 是凸面松弛算法达到收敛状态的最少迭代次数. 另外, ℓ_1 范数追踪算法会引入更多的原子 (尽管这些原子的系数很小), 从而导致去噪算法的性能变差, 因为本文算法的思想是在噪声污染下只保留置信概率较大的原子. 基于以上分析, 贪婪算法更适合 (P_0^c) 问题的求解. 此处采用正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP) 算法^[19] 来解决每一帧数据的重构问题, 因为每一段的待处理数据长度都不大, OMP 选择原子的“单进不出”准则较为简便. 相较之下, 采用“多进多出”准则的分段正交匹配追踪 (stage-wise orthogonal matching pursuit, StOMP)^[20] 和正则正交匹配追踪 (regularized orthogonal matching pursuit, ROMP)^[21] 的优越性表现在处理大数据恢复问题, 比如 $K \geq 1004$, $N' \geq 1000$, $M' \geq O(\delta^{-2} K \log^4 N')$ 的情况, 其中 δ 表示等距约束常数.

将矩阵子集 \mathbf{A}_Γ 的伪逆记为 $\mathbf{A}_\Gamma^\dagger$, 其中 Γ 表示 \mathbf{A} 的索引集; 则求解 (P_0^c) 的 OMP 算法可以描述为^[19]:

- 1) 初始化: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, $\Gamma_0 = \emptyset$, $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$;
- 2) 查找: $i = \arg \max_j |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_j \rangle|$;
- 3) 更新: $\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \cup \{i\}$, $\mathbf{p}_k = \mathbf{A}_{\Gamma_k} \mathbf{A}_{\Gamma_k}^\dagger \mathbf{y}$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - \mathbf{p}_k$; 若 $\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\| < \xi \rightarrow 0$ 则跳出循环, 否则返回“查找”步骤;
- 4) 输出: $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{A}_{\Gamma_k} \mathbf{A}_{\Gamma_k}^\dagger \mathbf{y}$.

3.3 滑动窗函数

由于使用的压缩感知硬投影算法是基于分段的前提对局部数据进行重构, 邻近段的连接往往是不连续的. 理想的情况下, 使用稀疏多项式对投影结果进行全局二次拟合能够将分段接口平滑化, 然而, 由于每个分段都可能对应不同的稀疏系数, 因而其全局多项式的高频成分将使得设计的“平

滑化”失效. 在此, 本文使用窗函数 $F(y(n), M')$ 以 $M' = 2M + 1$ 为窗长度, 每次移动 M 步长度的方式对 $y(n)$ 分段处理.

3.4 算法小结

基于上面段落的表述, 本文所提算法的执行流程为:

- 1) 选取分段长度 $M' = 2M + 1$, 对输入数据 $y(n)$ 进行分段处理;
- 2) 计算稀疏度 $K = f(\sigma_y^2, \sigma_n^2)$, 构造矩阵 \mathbf{A} , 随之用 OMP 算法对方程 (4) 进行求解, 每次滑动 M 步长度, 得出每段的估计信号 $\hat{s}(n)$;
- 3) 输出滤波之后的时间序列 \hat{s} .

4 算法分析

在本文基于压缩感知的去噪算法中, 基于多项式构造的硬投影矩阵 \mathbf{A} 最为关键, 此处对其特性进行分析.

定理 1 记 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M' \times N'}$ 的局部相关系数为 $\mu_{ij} \triangleq |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|$. 对于本文设定的多项式矩阵, 若 $\mathbf{a}_i \in \text{Nei}(\mathbf{a}_j)$, (也即两列相邻), 则相关系数为 $\mu_{ij} = 0$, 否则 $\mu_{ij} \leq 1$.

证明 不失一般性, 此处将可数测量空间在勒贝格测量空间 (Lebesgue measure space) 进行表示. 当 $\mathbf{a}_i \in \text{Nei}(\mathbf{a}_j)$, 相关系数可表示为

$$\mu_{i(i+1)} = \int_{-\frac{M'}{2}}^{\frac{M'}{2}} \frac{x^i x^{i+1}}{\beta_i \beta_{i+1}} dx, \quad (7)$$

其中常数

$$\beta_i = \left(\int_{-\frac{M'}{2}}^{\frac{M'}{2}} x^{2i} dx \right)^{1/2},$$

$$\beta_{i+1} = \left(\int_{-\frac{M'}{2}}^{\frac{M'}{2}} x^{2(i+1)} dx \right)^{1/2}.$$

由于 $x^i x^{i+1}$ 为奇函数, 从而可得方程 (7) 在对称区间的积分值为 0. 当 $\mathbf{a}_i \notin \text{Nei}(\mathbf{a}_j)$, 由 Holder 不等式可得

$$\begin{aligned} & \mu_{i(i+2k)} \\ &= \int_{-\frac{M'}{2}}^{\frac{M'}{2}} \frac{x^i x^{i+2k}}{\beta_i \beta_{i+2k}} dx \\ &\leq \frac{1}{\beta_i \beta_{i+2k}} \int_{-\frac{M'}{2}}^{\frac{M'}{2}} |x^i x^{i+2k}| dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\beta_i \beta_{i+2k}} \left(\int_{-\frac{M'}{2}}^{\frac{M'}{2}} (x^i)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{-\frac{M'}{2}}^{\frac{M'}{2}} (x^{i+2k})^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (8)$$

其中 $1/p + 1/q = 1$. 显然, 令 $p = q = 2$ 可得 $\mu_{i(i+2k)} \leq 1$. 进一步地, 若 $i \neq i + 2k$, 则 $\mu_{i(i+2k)} < 1$.

基于以上确定的矩阵, 略去下标将接收信号表示为 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{v}$, 此处进一步论述为何要随着噪声的增强而减少在 \mathbf{A} 中选择原子的个数. 在 OMP 算法表示下, 第 k 步的残差向量可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \mathbf{y} - \mathbf{p}_k \\ &= \mathbf{y} - \mathbf{A}_{\Gamma_k} \mathbf{A}_{\Gamma_k}^\dagger \mathbf{y} \\ &\triangleq (\mathbf{I} - \mathbf{W}_k) \mathbf{A}\mathbf{s} + (\mathbf{I} - \mathbf{W}_k) \mathbf{v} \\ &\triangleq \mathbf{q}_k + \mathbf{v}_k, \end{aligned} \quad (9)$$

按照文献 [19] 分析 OMP 算法的思路, 将纯净数据投影到 \mathbf{A} 的真实支撑集记为 \mathbf{A}_{Γ} , 则由方程 (9) 中的 $\mathbf{q}_k, \mathbf{v}_k$ 可引出最大内积系数的定义. 令 \mathbf{q}_k 与真实支撑集的最大内积系数的绝对值为 $Q_{t,1} \triangleq \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{\Gamma}} |\mathbf{a}^T \mathbf{q}_k|$, 与干扰支撑集的最大内积系数为 $Q_{t,2} \triangleq \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_{\Gamma}} |\mathbf{a}^T \mathbf{q}_k|$, 噪声项与支撑集的内积系数为 $J_t \triangleq \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} |\mathbf{a}^T \mathbf{v}_k|$. 由于能够选择到正确支撑原子的充分条件为 (将 $\mathbf{r}_k = \mathbf{q}_k + \mathbf{v}_k$ 代入并使用绝对值不等式可得) [19]

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{\Gamma}} |\mathbf{a}^T \mathbf{r}_k| &\geq Q_{t,1} - J_t > Q_{t,2} + J_t \\ &\geq \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_{\Gamma}} |\mathbf{a}^T \mathbf{r}_k|. \end{aligned} \quad (10)$$

由此可知能被正确选择的原子须满足 $Q_{t,1} - Q_{t,2} > 2J_t$ 关系. 不失一般性, 将 \mathbf{s} 里面 N' 个系数的模按大小关系记为 $|s_1| \geq |s_2| \geq \dots \geq |s_{N'}|$, 这时有 $|s_1| \dots |s_l|$ 都能使得 $Q_{t,1} - Q_{t,2} > 2J_t$. 由于 $J_t = \sqrt{N'} \sigma^2 \cos \theta$, 显然 σ^2 的增大将会减少能选出的正确原子的数量. 这时叠加了不正确的原子集来重构的信号将更大地偏离原始信号, 所以本文在噪声强度增大时减少选择原子的数目, 从而尽量保证选出的都是“正确”的原子.

5 仿真与比较

混沌信号的去噪不仅要反映在信噪比的提高, 也要体现在对混沌信号的特征参数的最大程度还

原, 而这也是混沌信号的去噪不同于语音和图像信源去噪之处. 在本节的第一部分, 本文算法首先从信噪比的角度与小波阈值法 [6,7] 和局部曲线拟合法进行比较 [8,9]. 具体地, 小波阈值法是将输入的 $y(n)$ 按照控制的层数 J 进行小波分解:

$$y(1:N) = Y A_J + Y D_J + Y D_{J-1} + \dots + Y D_1, \quad (11)$$

其中 $Y A$ 和 $Y D$ 分别表示粗纹理和细纹理, $Y A_J$ 的频域长度为 $N/2^J$, 而 $Y D_J$ 的长度则为 $N/2^J$. 由于硬阈值法和软阈值法的差别仅表现在是否对阈值之外的系数进行收缩, 此处简述软阈值法, 其过滤波函数 $F(y(n), T)$ 为

$$F(y(n), T) = \text{sgn}(y(n)) \max\{0, |y(n)| - T\}, \quad (12)$$

该函数的阈值 T 的选取法则为 $T = \frac{\text{med}(|Y D_J|)}{0.6745} \sqrt{\ln N}$, 其中 $\text{med}(|Y D_J|)$ 表示第 J 层纹理的系数绝对值的中值. 在得到过滤的 $\hat{Y} D_J, \hat{Y} D_{J-1} \dots \hat{Y} D_1$ 之后, 将它们与 $Y A_J$ 串联进行小波重构即可得到估计的去噪信号. 与本文算法进行比较的局部曲线拟合法则分为两步 [9], 第一步是对每个片段进行 l 阶多项式拟合, 第二步则是使用下述公式将不同片段的重合区域数据进行平滑连接 (实际上通过步长为 Δ 的移动, 大部分数据都将处于重合区域):

$$\begin{aligned} \hat{y}(i) &= \alpha_1 \hat{y}^{\kappa_1}(i + \Delta) + \alpha_2 \hat{y}^{\kappa_2}(i), \\ i &= 1, \dots, \Delta + 1, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 \hat{y}^{κ_1} 和 \hat{y}^{κ_2} 表示拟合之后的两个片段, 而 α_1, α_2 是反映到本段中心点距离的权重系数, 片段长度为 $2\Delta + 1$.

5.1 对信噪比的提高

非线性时间序列数据从下述 Lorenz 系统方程产生:

$$\begin{aligned} d\psi_1/dt &= -a(\psi_1 - \psi_2), \\ d\psi_2/dt &= -\psi_1\psi_3 + c\psi_1 - \psi_2, \\ d\psi_3/dt &= \psi_1\psi_2 - b\psi_3, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $a = 28, b = 8/3, c = 10$. 从该系统采样的数据通过四阶龙格-库塔法得出, 采样步长为 0.01, 并且以 ψ_1 作为输入时间序列 $x(n)$, 样本长度为 $N = 8000$.

基于下述信噪比的定义:

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{\sum_n x^2(n)}{\sum_n v^2(n)},$$

在对 $x(n)$ 按 0—20 dB 的信噪比添加噪声后, 本文算法将从对信噪比的提升的角度与小波硬阈值、小波软阈值以及局部曲线拟合法比较. 本文方法用到的参数为: 窗函数的移动长度为 $M = 20$, 常数 $\omega = 2.5$, 矩阵 A 的大小为 41×61 ; 小波方法使用 $J = 4$ 层的分解; 局部曲线拟合法使用的多项式阶数为 $l = 3$, $(\text{const} + x + x^2 + x^3)$, 分块长度为 $2\Delta + 1 = 17$. 图 1 给出了在输入信噪比 0—20 dB 时不同算法得到的输出信噪比. 具体地, 本文算法在输入信噪比处于 0 dB 至 20 dB 区间都比局部曲线拟合法提高了 0.9—1.94 dB. 在 9 dB 左右, 本文方法的提升量开始超过小波阈值法, 在 SNR = 20 dB 时, 小波方法的提升量已经不明显, 而本文的压缩感知去噪方法仍然有约 10 dB 的提升量. 本质上, 本文算法是局部曲线拟合法的扩展, 因为它通过建立过完备的压缩感知采样矩阵 A 使得算法能够在

混沌信号的不同片段使用不同的支撑 $\text{Span}(A)$, 因此图 1 中本文算法一致优于局部曲线拟合法.

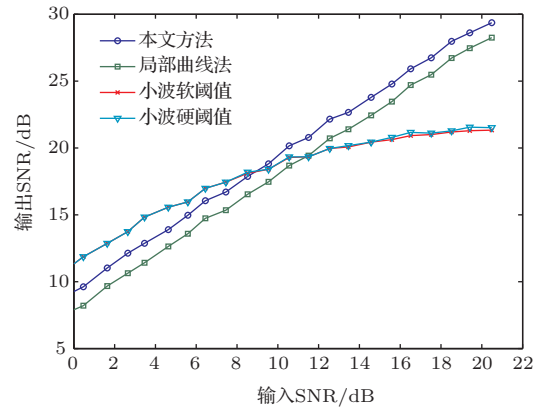


图 1 (网刊彩色) 对 Lorenz 信源信噪比提升程度的比较
Fig. 1. (color online) A comparison about the improved SNR on the Lorenz signal.

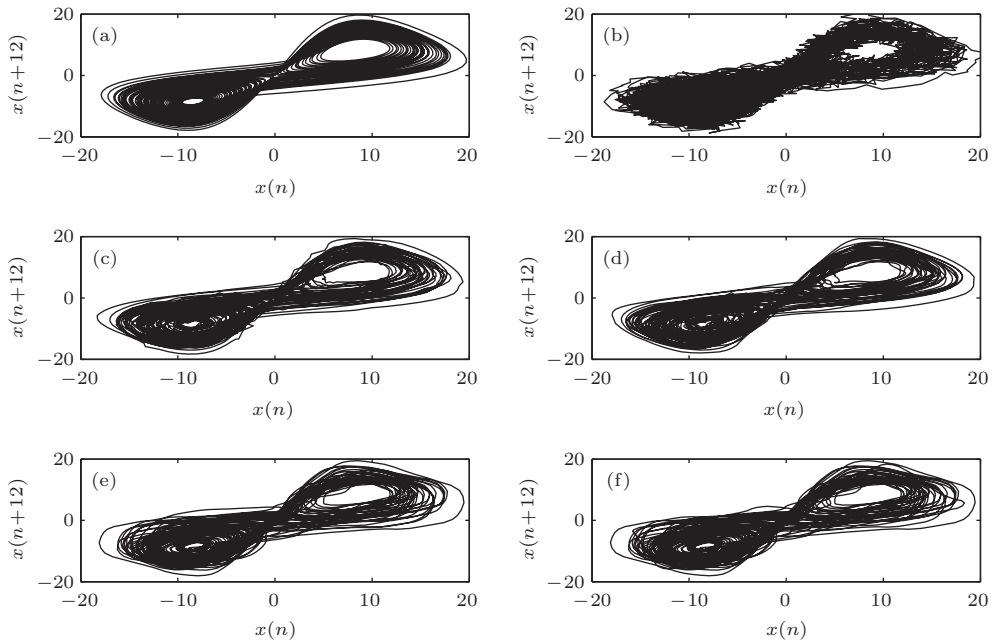


图 2 (网刊彩色) 不同方法重构的吸引子流型的比较

Fig. 2. (color online) A comparison about the reconstructed attractors from different algorithms.

为了更直观地体现这些差别, 图 2 给出了输入 SNR 在 20 dB 时各种方法重构的吸引子流型, 其中图 2(a) 是原始纯净数据, 图 2(b) 是噪声污染后的数据, 图 2(c)—(f) 分别是本文方法、局部拟合法、小波软阈值和硬阈值法恢复的数据. 从图中可以看出, 本文方法和局部曲线拟合法重构的流型在围绕吸引子转移时都已经比较光滑 (尽管局部拟合法从该图最边缘曲线处比本文方法更光滑, 但本文算法从信噪比的角度要比其提升了约 1 dB), 而小波方

法在不少区域都表现出较为粗糙的转移.

为了反映提出的算法对不同的连续混沌信号的普适性, 此处进一步比较从如下 Rössler 系统方程产生的时间序列:

$$\begin{aligned} d\vartheta_1/dt &= -(\vartheta_2 + \vartheta_3), \\ d\vartheta_2/dt &= \vartheta_1 + a\vartheta_2, \\ d\vartheta_3/dt &= b + \vartheta_3(\vartheta_1 - c), \end{aligned} \quad (15)$$

采用的参数为 $a = 0.2, b = 0.2, c = 5$. 同理, 从该

系统采样的数据也由四阶龙格-库塔法得出, 采样步长为0.06, ϑ_1 作为输入时间序列 $x(n)$, 样本长度为6400. 按照上例采用的算法参数, 可得到不同算法提升的信噪比数据如图3所示. 图3表现的特性与图1基本一致, 差别在于小波硬阈值法在15 dB之后比小波软阈值法有约1 dB的提升, 这表明在图像处理领域普遍采用的软阈值法在处理混沌信号时不一定比硬阈值法的效果好.

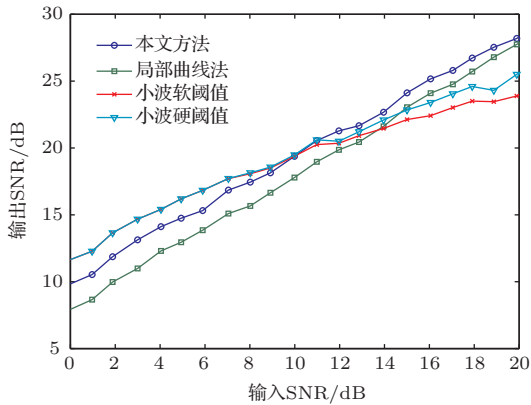


图3 (网刊彩色) 对 Rössler 信源信噪比提升程度的比较
Fig. 3. (color online) A comparison about the improved SNR on the Rössler signal.

5.2 对增殖系数的还原

本文使用文献[22]提出的增殖系数 (proliferation exponent, PE) 来分析重构信号的混沌特性, 因为尽管李亚谱诺夫指数[23]更能从定义混沌的层面反映信号的混沌性质, 但其对连续混沌信号的计算方法是从定义式的雅可比矩阵出发, 并不适用于对大量样本数据的计算, 而增殖系数在输入样本数据足够大时能够在很大程度上反映原始信号的混沌特性[22]. 用到的增殖系数定义为: $PE_\alpha = \frac{\mathbb{D}(V_s(t))}{\mathbb{E}^2(V_s(t))}$, 其中 $V_s(t)$ 是文献[22]定义的相空间距离函数, α 是控制因子.

具体地, 此处利用0.05的采样间隔产生长度为4000的Lorenz时间序列, 并采用与上例一样的算法参数来进行噪声消除. 在选取控制因子 α 的数值方面, 需要注意的是, 由于 α 的选取要考虑到混沌序列的采样步长, 也即最优的 α 值是基于采样步长而设的一个最能反映信号混沌特性的参数, 所以采样不同 α 数值的仿真结果可能会略有差异. 在仿真中令 $\alpha = 6$, 并进一步计算用不同算法恢复的增殖系数. 由图4看到, 本文算法恢复的PE在整个区间段都约为0.55, 最接由原始数据计算的PE值

(0.47), 而其他方法得到的PE值都有更大偏差, 分别为0.6, 0.72, 0.72.

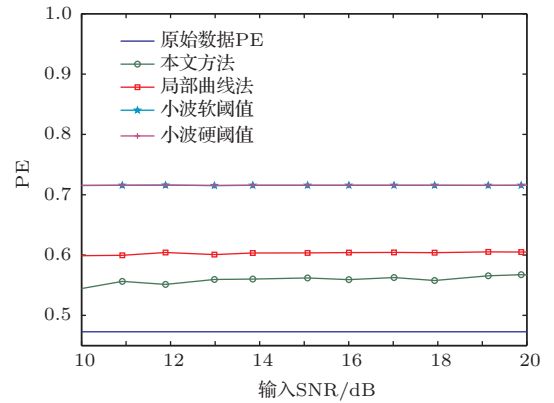


图4 (网刊彩色) 使用不同方法去噪之后的增殖系数
Fig. 4. (color online) A comparison about the exported proliferation exponents by using different algorithms.

6 结 论

从压缩感知理论出发, 本文提出了一种稀疏度动态确定的硬投影去噪方法. 由于对输入信号分帧处理, 每帧信号都可以看作是字典原子的线性组合. 本文方法的特别之处在于构造的过完备投影矩阵具有充足的频域成分, 从而能够在每个片段的支撑基的选择上更充分地考虑到混沌信号的不确定性. 仿真实验表明: 本文算法比同类型的局部曲线拟合法有一致的信噪比提高; 从通过增殖系数来分析混沌特性的角度看, 本文算法也比经典的小波阈值法以及局部曲线拟合法有更接近原始值的增殖系数.

参考文献

- [1] Wang S Y, Feng J C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170508 (in Chinese) [王世元, 冯久超 2012 物理学报 **61** 170508]
- [2] Feng J C 2012 *Chaotic Signals and Information Processing* (Beijing: Tsinghua Univ. Press) pp32-35 (in Chinese) [冯久超 2012 混沌信号与信息处理 (清华大学出版社) 第32-35页]
- [3] Lü S X, Feng J C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 230503 (in Chinese) [吕善翔, 冯久超 2013 物理学报 **62** 230503]
- [4] Feng J C 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1851
- [5] Feng J C, Tse C K 2001 *Phys. Rev. E* **63** 026202
- [6] Constantine W L B, Reinhall P G 2001 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **11** 483
- [7] Han M, Liu Y H, Xi J H, Guo W 2007 *IEEE Signal Process. Lett.* **14** 62
- [8] Gao J B, Sultan H, Hu J, Tung W W 2010 *IEEE Signal Process. Lett.* **17** 237

- [9] Tung W W, Gao J B, Hu J, Yang L 2011 *Phys. Rev. E* **83** 046210
- [10] Wang W B, Zhang X D, Wang X L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 050201 (in Chinese) [王文波, 张晓东, 汪祥莉 2013 物理学报 **62** 050201]
- [11] Candes E, Romberg J, Tao T 2006 *Commun. Pure Appl. Math.* **59** 1207
- [12] Lustig M, Donoho D, Pauly J 2007 *Magn. Reson. Med.* **58** 1182
- [13] Lustig M, Donoho D, Santos J, Pauly J 2008 *IEEE Signal Process. Mag.* **25** 72
- [14] Candes E, Wakin M 2008 *IEEE Signal Process. Mag.* **25** 21
- [15] Candes E 2008 *C. R. Math.* **346** 589
- [16] Chen S, Donoho D, Saunders M 1998 *SIAM J. Sci. Comput.* **20** 33
- [17] Donoho D, Huo X 2001 *IEEE Trans. Inf. Theory* **47** 2845
- [18] Figueiredo M, Nowak R, Wright S 2007 *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.* **1** 586
- [19] Cai T T, Wang L 2011 *IEEE Trans. Inf. Theory* **57** 4680
- [20] Donoho D, Drori I, Starck J L 2012 *IEEE Trans. Inf. Theory* **58** 1094
- [21] Needell D, Vershynin R 2009 *Found. Comput. Math.* **9** 317
- [22] Lü S X, Wang Z S, Hu Z H, Feng J C 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010506
- [23] Holger K, Thomas S 2004 *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge: Cambridge University Press) pp65–74

Chaotic signal denoising in a compressed sensing perspective*

Li Guang-Ming^{1)†} Lü Shan-Xiang²⁾

1) (School of Computer Science, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China)

2) (School of Electronic and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(Received 25 March 2015; revised manuscript received 23 May 2015)

Abstract

Nonlinear time series denoising is the premise for extracting useful information from an observable, for the applications in analyzing natural chaotic signals or achieving chaotic signal synchronizations. A good chaotic signal denoising algorithm processes not only a high signal-to-noise ratio (SNR), but also a good unpredictability of a signal. Starting from the compressed sensing perspective, in this work we provide a novel filtering algorithm for chaotic flows. The first step is to estimate the strength of the noise variance, which is not explicitly provided by any blind algorithm. Then the second step is to construct a deterministic projection matrix, whose columns are polynomials of different orders, which are sampled from the Maclaurin series. Since the noise variance is provided from the first step, then a sparsity level with regard to this signal can be fully constructed, and this sparsity value in conjunction with the orthogonal matching pursuit algorithm is used to recover the original signal. Our method can be regarded as an extension to the local curve fitting algorithm, where the extension lies in allowing the algorithm to choose a wider range of polynomial orders, not just those of low orders. In the analysis of our algorithm, the correlation coefficient of the proposed projection matrix is given, and the reason for shrinking the sparsity when the noise variance increases is also presented, which emphasizes that there is a larger probability of error column selection with larger noise variance. In the simulation, we compare the denoising performance of our algorithm with those of the wavelet shrinking algorithm and the local curve fitting algorithm. In terms of SNR improvement for the Lorenz signal, the proposed algorithm outperforms the local curve fitting method in an input SNR range from 0 dB to 20 dB. And this superiority also exists if the input SNR is larger than 9 dB when compared with the wavelet methods. A similar performance also exists concerning the Rössler chaotic system. The last simulation shows that the chaotic properties of the originals are largely recovered by using our algorithm, where the quantity for “chaotic degree” is described by using the proliferation exponent.

Keywords: chaotic signal, denoising, compressed sensing, sparsity

PACS: 05.45.-a, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.64.160502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61170216, 61372082).

† Corresponding author. E-mail: lgngmng@163.com