

双量子点结构中 Majorana 费米子的噪声特性

周洋 郭健宏

Shot noise characteristics of Majorana fermions in transport through double quantum dots

Zhou Yang Guo Jian-Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 167302 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.167302

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.167302>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[Au 纳米颗粒和 CdTe 量子点复合体系发光增强和猝灭效应](#)

[Enhancement and quenching of photoluminescence from Au nanoparticles and CdTe quantum dot composite system](#)

物理学报.2015, 64(16): 167301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.167301>

[热处理温度对量子点粒度分布的影响](#)

[Influence of annealing temperature on the distribution of particle sizes of quantum dots doped glass](#)

物理学报.2015, 64(12): 127302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.127302>

[电子-声子相互作用对平行双量子点体系热电效应 \$\alpha\$ 的调控](#)

[Influences of electron-phonon interaction on the thermoelectric effect in a parallel double quantum dot system](#)

物理学报.2015, 64(7): 077301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.077301>

[扶手椅型石墨烯介观环中的持续电流](#)

[Persistent currents in mesoscopic graphene rings with armchair edges](#)

物理学报.2015, 64(1): 017302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.017302>

[分子激发中的表面等离激元增强效应](#)

[Surface plasmon enhancement effect in molecular excitation](#)

物理学报.2014, 63(9): 097301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.097301>

双量子点结构中Majorana费米子的噪声特性*

周洋 郭健宏†

(首都师范大学物理系, 北京 100048)

(2014年11月22日收到; 2015年4月17日收到修改稿)

Majorana 费米子是其自身的反粒子, 在拓扑量子计算中有着重要的应用. 利用粒子数表象下的量子主方程方法, 研究双量子点与 Majorana 费米子混合结构的电子输运特性, 特别是散粒噪声. 有无 Majorana 费米子耦合的电流与散粒噪声存在明显差别: 有 Majorana 费米子耦合时稳态电流差呈反对称, 噪声谱呈现相干振荡并且低频噪声显著增强. 量子点与 Majorana 费米子对称弱耦合时, 零频噪声由“峰”变为“谷”, 并且“边谷”展宽逐渐减小; 当对称强耦合时, 零频噪声的谷深增加, “边谷”向高频端移动. 改变系统与电极的耦合强度时, 零频噪声由谷变成峰. 因此, 稳态电流结合散粒噪声可以探测双量子点结构中 Majorana 费米子是否存在.

关键词: Majorana 费米子, 量子点, 散粒噪声

PACS: 73.21.-b, 73.23.-b

DOI: 10.7498/aps.64.167302

1 引言

Majorana 费米子 (MFs) 是其自身的反粒子, 这一奇特性有别于通常的 Dirac 费米子^[1]. 对于 Dirac 费米子, 粒子与反粒子成对出现且所带电荷相反, 如电子与正电子, 产生与湮没算符明显不同, 即 $f^\dagger \neq f$, 它们满足 Fermi-Dirac 统计, 并且具有 $U(1)$ 对称性; 而对于 MFs, 产生与湮没算符满足自厄米性, 即 $\gamma^\dagger = \gamma$, 说明 MFs 同时也是其自身的反粒子, 是一种呈电中性的特殊 Dirac 费米子. MFs 可用通常的 Dirac 费米子 f 表示为 $\gamma_1 = (f + f^\dagger)/\sqrt{2}$, $\gamma_2 = i(f - f^\dagger)/\sqrt{2}$. 类比复数的实部与虚部, γ_1 与 γ_2 也常称作“半个费米子”, 分别充当 f 的“实部”与“虚部”, 满足非阿贝尔交换统计性. 交换两个 MFs 可以实现量子门操作, 能够形成非局域的费米子态. 因此, 利用 MFs 进行量子计算不受局域电磁测量或局域噪声的影响, 因而不需要量子纠错. 正是这种非阿贝尔统计性和非局域的拓扑本质使得 MFs 在容错拓扑量子计算中有着重要的应用^[2,3].

近年来, 人们开始在固态系统中寻找满足 MFs 性质的准粒子^[4-10]. 在固体材料中, 产生 MFs 需要有确定带隙的无自旋拓扑 p-波超导体^[3], 用以诱导出电子之间的对相互作用. 由于自然界缺少 p-波超导体, 因此人们提出了一些可能存在 MFs 的异质混合材料, 比如手性 p-波超导体^[4]、拓扑绝缘体/超导体异质结构^[5]、冷原子费米子气^[6]、具有自旋-轨道耦合的半导体薄膜^[7]、与通常 s-波超导体接触的半导体纳米线^[8,9]、以及超导拓扑绝缘体等^[10]. 这些材料的性质都类似于无自旋拓扑 p-波超导体, 存在非平庸的拓扑超导相. 作为非平庸拓扑超导相的直接结果, MFs 能够以零能量模式 (状态) 出现于一维材料的边界^[3], 或是二维材料的涡旋中^[11]. 最近, 有理论方案提出, 在开放边界条件下不需要拓扑超导体也可产生 MFs^[12].

目前, 基于半导体纳米线与超导体的混合系统在实验上相对地更容易调制和操控^[13]. 其中, 与 s-波超导体制备在一起的具有强自旋-轨道作用的半导体纳米线引起了人们极大的兴趣^[14-16]. 实验上, 探测 MFs 的典型办法是利用电子输运, 在零偏

* 北京市教委科研基金 (批准号: KM201210028008) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gjhaso@163.com

压附近出现反常的电导峰被认为是 MFs 存在的可能证据 [14–16]. 其他的理论探测方案包括直接测量 MFs 的非阿贝尔统计性 [17]、反常 4π 周期约瑟夫森效应 [3]、电荷振荡测量 [18], 以及直接测量隧穿过耦合 MFs 状态的电子噪声谱 [19]. 所有这些实验方法分别探测的是 MFs 的不同物理表现, 包括其任意子的统计性、半费米子特性、以及粒子-空穴的自厄米性. 但是, 由于 MFs 对电磁测量不敏感, 以及拓扑超导体相位的脆弱性, 使得实验上难以揭示其存在. 目前为止, 还缺乏令人信服的足够证据表明 MFs 存在于相应的固态系统中. 因此, 除了电导外, 还需要其他实验进一步补充和验证 MFs 的存在.

最近, 理论上提出将量子点 (QD) 与 MFs 耦合并构成回路, 利用隧穿过量子点的电子探测 MFs [20–22]. MFs 对通过量子点的运输电流影响显著, 没有 MFs 耦合的隧穿电流和存在耦合的电流与噪声谱差别明显. Liu 等 [20] 发现, 相比于无 MFs 耦合情况, 与单量子点耦合的 MFs 使零偏压处的电导峰减小 $1/2$. 利用该模型, Cao 等 [21] 证明了该模型中电流与噪声可以甄别是否存在 MFs. Shang 等 [22] 研究了 MFs 与双量子点耦合的 Aharonov–Bohm 干涉仪中的电导. 目前, 各种方案大多局限于探讨零偏压附近的反常电导峰 [20,22], 缺少对电流关联即散粒噪声作为表征手段的探索, 特别是对 MFs 与多量子点耦合结构的研究.

本文结合电流与散粒噪声的方法研究双量子点结构中 MFs 的特性及动力学行为. 众所周知, 噪声测量比电流包含有更多的信息, 可以揭示电荷运输的本质. 实验装置如图 1 所示, 两个量子点分别与拓扑超导体两端的 MFs 耦合, 构成 QD-MFs-QD 结构, 其中仅 QD₁ 与两个金属电极构成测量回路. 从文献 [23] 的主方程出发, 采用与前文不同的粒子数表象下的跃迁函数作为工具, 我们发现, 电流结合散粒噪声可以揭示双量子点与拓扑超导体混合结构中存在 MFs.

2 模型与理论方法

2.1 模型

考虑两个量子点与半导体纳米线耦合的装置如图 1 所示. 具有强 Rashba 自旋-轨道相互作用的半导体纳米线与 s-波超导体相接触, 当施加较强的磁场, 满足 $E_Z^2 > \Delta^2 + \mu^2$ 时, 纳米线将形成拓扑超导态, 称之为拓扑超导纳米线, 在其两端产生电

子-空穴准粒子激发, 即 MFs, 亦称 Majorana 束缚态 (MBS), 分别表示为 γ_1, γ_2 ; E_Z 是 Zeeman 能量, 与外磁场强度 B 成正比; Δ 为纳米线中由于超导接触效应而引起的电子 Cooper 对作用; μ 为纳米线的化学势. 两个 Majorana 费米子 γ_1, γ_2 分别与近邻的 QD₁ 和 QD₂ 耦合. 每个量子点都处于强库仑阻塞区, 因此每个点上只占据一个电子. 整个系统的哈密顿量可写作 $H = H_s + H_1 + H_t$. 其中, $H_1 = \sum_{\alpha=L,R} \sum_k \varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k}^\dagger c_{\alpha k}$ 描述左、右两个无相互作用的金属电极; $H_t = \sum_{\alpha=L,R} \sum_k t_{\alpha k} d_1 c_{\alpha k}^\dagger + \text{H.c.}$

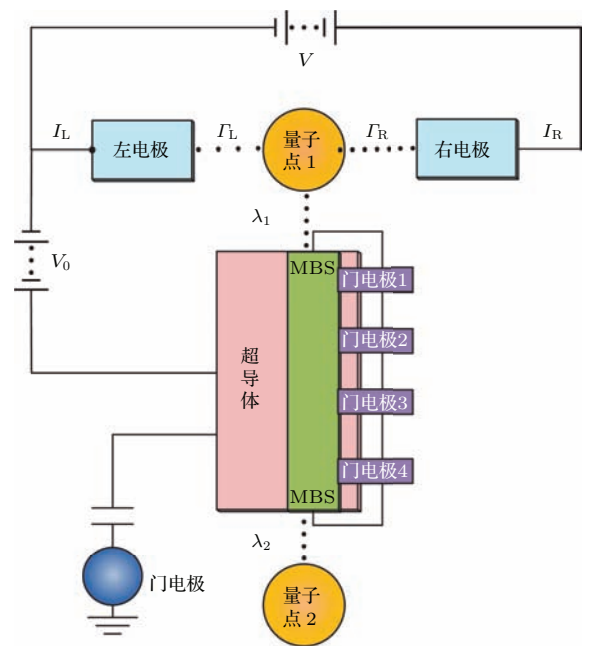


图 1 (网刊彩色) 双量子点与 Majorana 费米子耦合结构. 量子点分别与两个 Majorana 费米子耦合, 且点 1 与左、右电极构成测量回路, 其电荷运输可以探测 Majorana 费米子, 拓扑超导纳米线通过容量为 C 的电容器接地; 选取超导体的化学势作为能量参考零点, 左右电极的化学势则可以分别取作 $\mu_L = e(V_0 + V/2)$ 与 $\mu_R = e(V_0 - V/2)$ (e 为电荷电量)

Fig. 1. (color online) Schematic setup of double quantum dots coupled to Majorana fermions. The quantum dots are tunnel coupled to Majorana fermions which are located at the two ends of the nanowire. The QD₁ is connected to the electrodes, which forms a closed circuit. The electron transport through the setup can detect a Majorana fermion. The nanowire is grounded indirectly via a capacitor with capacity C . Choosing the chemical potential of the superconductor as the zero-energy reference, the chemical potentials of the left and right leads locate then at $\mu_L = e(V_0 + V/2)$ and $\mu_R = e(V_0 - V/2)$, respectively (with e the electron charge).

描述 QD₁ 与左、右电极间的电子隧穿, 隧穿强度为 $t_{\alpha k}$; H_s 描述双量子点与 MFs 耦合的中间子系统^[20-24]:

$$H_s = \sum_{i=1,2} \varepsilon_i \mathbf{d}_i^\dagger \mathbf{d}_i + i\varepsilon_M \gamma_1 \gamma_2 + \lambda_1 (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1^\dagger) \gamma_1 + i\lambda_2 (\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2^\dagger) \gamma_2, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{c}_{\alpha k}^\dagger (\mathbf{c}_{\alpha k})$ 与 $\mathbf{d}_i^\dagger (\mathbf{d}_i)$ 分别表示电极与 QD_{*i*} (*i* = 1, 2) 的电子产生(湮没)算符, 相应的能量为 $\varepsilon_{\alpha k}$ 与 ε_i . (1) 式中第二项表示纳米线两端 MFs 之间的耦合作用, 耦合能为 $\varepsilon_M \sim \exp(-l/\xi)$, l 为纳米线的有效长度, ξ 是超导相干长度; 最后两项描述 QD_{*i*} 与近邻 MFs γ_i (*i* = 1, 2) 的耦合作用, 耦合强度分别为 λ_i .

引入非局域 Dirac 费米子 f : $\gamma_1 = (f + f^\dagger)/\sqrt{2}$, $\gamma_2 = i(f - f^\dagger)/\sqrt{2}$, 满足反对易关系 $\{f, f^\dagger\} = 1$. 则哈密顿量 H_s 可改写为

$$H_s = \sum_{i=1,2} \varepsilon_i \mathbf{d}_i^\dagger \mathbf{d}_i + \varepsilon_M \left(f^\dagger f - \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1^\dagger) (f + f^\dagger) - \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} (\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2^\dagger) (f - f^\dagger). \quad (2)$$

由(2)式可见, 量子点与拓扑超导体之间的隧穿包含“反常”项 ($\propto d_i f, f^\dagger d_i^\dagger$), 说明超导体可以吸收来自 d_i 态和 f 态的一对电子, 或是劈裂一个 Cooper 对并释放出两个电子分别占据 d_i 态和 f 态, 导致电子数不守恒. 一般地, 这两项描述 Cooper 对产生与湮没时应该包含超导相位 ϕ . 本文考虑纳米线直接接地, 即电容器的容量趋近无穷大时, 利用 BCS 波函数可以将 ϕ 吸收进 QD 与 MFs 算符中^[25]. 那么, 在 Dirac 费米子表象中, 量子点与 MFs 的状态可表示为 $|n_1, n_2, n_f\rangle$, 其中 n_1, n_2 与 n_f 取值为 0 或 1, 分别表示两个量子点与 Majorana 束缚态上占据的电子数, 因此 $\{|n_1, n_2, n_f\rangle\}$ 张成八维 Hilbert 空间, 其中 $\{|1, 1, 1\rangle, |1, 0, 0\rangle, |0, 1, 0\rangle, |0, 0, 1\rangle\}$ 构成奇宇称子空间, $\{|1, 1, 0\rangle, |1, 0, 1\rangle, |0, 1, 1\rangle, |0, 0, 0\rangle\}$ 构成偶宇称子空间.

2.2 理论方法

本文利用粒子数表象中的主方程描述体系的动力学行为. 将电极视为“环境”, 中间 QD-MFs-QD 子系统用约化密度矩阵 $\rho(t)$ 描述. 一般而言, 描述与“环境”耦合的体系的动力学主方程是非马

可夫型的. 当考虑大电压极限, 即 $|\mu_{L(R)} - \varepsilon_i|$ 远大于量子点能级 ε_i 的展宽时, 量子点能级 ε_i 将处于电压窗口 $|\mu_L - \mu_R|$ 中, 电子单向隧穿, 温度对电子输运的影响可以忽略, 则约化密度算符 $\rho(t)$ 满足 Lindblad 形式的主方程. 根据左电极发射出的电子数 n_L 和右电极收集到的电子数 n_R , 将系统状态划分成多重粒子数空间, 则可以得到大电压极限时粒子数表象中的主方程^[23]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{(n_L, n_R)}(t) &= \mathcal{L} \rho^{(n_L, n_R)} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \rho^{(n_L, n_R)}, \\ \mathcal{R} \rho^{(n_L, n_R)} &= \Gamma_L (\mathbf{d} \mathbf{d}^\dagger \rho^{(n_L, n_R)} + \rho^{(n_L, n_R)} \mathbf{d} \mathbf{d}^\dagger \\ &\quad - 2 \mathbf{d}^\dagger \rho^{(n_L+1, n_R)} \mathbf{d}) + \Gamma_R (\mathbf{d}^\dagger \mathbf{d} \rho^{(n_L, n_R)} \\ &\quad + \rho^{(n_L, n_R)} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{d} \\ &\quad - 2 \mathbf{d} \rho^{(n_L, n_R-1)} \mathbf{d}^\dagger), \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式中 $\rho^{(n_L, n_R)}$ 满足 $\sum_{n_L, n_R=0}^{\infty} \rho^{(n_L, n_R)}(t) = \rho(t)$.

刘维尔超算符 \mathcal{L} 定义为 $\mathcal{L} \rho^{(n_L, n_R)} \equiv -i[H_s, \rho^{(n_L, n_R)}]$, 描述系统的相干演化; $\mathcal{R} \rho^{(n_L, n_R)}$ 描述系统受金属电极影响的耗散行为. 隧穿率 $\Gamma_\alpha(\omega) = 2\pi \sum_k |t_{\alpha, k}|^2 \delta(\omega - \varepsilon_{\alpha k}) \equiv \Gamma_\alpha$. (3) 式

对 (n_L, n_R) 求和后可得到相应的 Lindblad 形式的主方程: $\dot{\rho} = \mathcal{L} \rho + \Gamma_L \mathcal{D}[\mathbf{d}^\dagger] \rho + \Gamma_R \mathcal{D}[\mathbf{d}] \rho$, 其中 $\mathcal{D}[A] \rho \equiv A \rho A^\dagger - \frac{1}{2} \{A^\dagger A, \rho\}$.

拓扑超导纳米线的存在类似于一个电极, 导致回路电流一般不守恒, 即左、右电极的电流不等. 引入两个独立的计数变量 χ_α ($\alpha = L, R$), 分别统计从左电极隧穿进 QD₁ 和离开 QD₁ 而隧穿进右电极的电子. 利用二维傅里叶变换 $\rho(\chi_L, \chi_R, t) \equiv \sum_{n_L, n_R} \rho^{(n_L, n_R)}(t) e^{in_L \chi_L} e^{in_R \chi_R}$ 将方程(3)写作

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\chi_L, \chi_R, t) &= \mathcal{W}(\chi_L, \chi_R) \rho(\chi_L, \chi_R, t) \\ &= [\mathcal{L} + \mathcal{W}(\chi_L) + \mathcal{W}(\chi_R)] \rho(\chi_L, \chi_R, t), \end{aligned} \quad (4)$$

式中,

$$\mathcal{W}(\chi_L) \rho = \Gamma_L \mathcal{D}[\mathbf{d}^\dagger] \rho + (e^{-i\chi_L} - 1) \mathcal{J}_{+\rho}, \quad (5a)$$

$$\mathcal{W}(\chi_R) \rho = \Gamma_R \mathcal{D}[\mathbf{d}] \rho + (e^{i\chi_R} - 1) \mathcal{J}_{-\rho}, \quad (5b)$$

其中, $\mathcal{J}_{+\rho} \equiv \Gamma_L \mathbf{d}^\dagger \rho \mathbf{d}$ 与 $\mathcal{J}_{-\rho} \equiv \Gamma_R \mathbf{d} \rho \mathbf{d}^\dagger$ 分别表示电子从左电极隧穿进 QD₁ 和电子从 QD₁ 隧穿进右电极的“跳跃算符”. (4) 式中各超算符的具体形式在 $|n_1, n_2, n_f\rangle$ 表象中可以容易地得到. 利用(4)

式我们可以方便地计算输运电流与相应的散粒噪声谱. 为此, 引入累积生成函数 $S(\chi_L, \chi_R, t)$,

$$e^{S(\chi_L, \chi_R, t)} \equiv \sum_{n_L, n_R} P(n_L, n_R, t) e^{in_L \chi_L} e^{in_R \chi_R} \\ = \text{Tr} \left\{ e^{\mathcal{W}(\chi_L, \chi_R)t} \rho^{\text{st}} \right\}, \quad (6)$$

其中, 透射电子分布函数 $P(n_L, n_R, t) = \text{Tr}[\rho^{(n_L, n_R)}(t)]$, Tr 表示对中间子系统求平均; ρ^{st} 表示系统的稳态密度矩阵, 满足 $\mathcal{W}(\chi_L, \chi_R)|_{\chi_L=0, \chi_R=0} \rho^{\text{st}} = 0$. 为求解上式, 引入其拉普拉斯变换:

$$e^{S(\chi_L, \chi_R, z)} = \text{Tr} \left\{ \frac{1}{z\mathbf{I} - \mathcal{W}(\chi_L, \chi_R)} \rho^{\text{st}} \right\}, \quad (7)$$

其中, \mathbf{I} 表示单位矩阵. 对上式取相应计数变量 χ_i 的微商, 容易得到稳态电流以及散粒噪声谱等.

2.3 电流与散粒噪声

首先, 利用“跳跃算符” \mathcal{J}_{\pm} 可得到流经相应电极 α ($\alpha = L, R$) 的稳态电流为

$$\langle I_{\alpha}(t) \rangle \\ = \frac{d\langle n_{\alpha}(t) \rangle}{dt} \\ = -i \text{Tr} \left\{ \pm i [\partial \mathcal{W}(\chi_L, \chi_R) / \partial \chi_{\alpha}] \rho^{\text{st}} \right\} \Big|_{\chi_L=0, \chi_R=0}, \quad (8)$$

其中, $n_{\alpha}(t)$ 为 t 时刻左电极 ($\alpha = L$) 发射或右电极 ($\alpha = R$) 收集的电子数算符. 类似于矢量, 可将双量子点与 MFs 耦合系统的约化密度矩阵 $\rho(t)$ 的演化方程写成矢量方程的形式, 则稳态密度矩阵 ρ^{st} 可写作列矢量 $|\phi_0\rangle$, 其相应的左矢可写作行矢量 $\langle\langle \tilde{\phi}_0 |$, 要求满足 $\text{Tr} \rho^{\text{st}} = \langle\langle \tilde{\phi}_0 | \phi_0 \rangle\rangle = 1$, 因此左矢 $\langle\langle \tilde{\phi}_0 | = (1, 1, \dots, 0, 0, \dots)$, 并且元素 1, 0 分别作用在稳态密度矩阵 ρ^{st} 的对角元与非对角元上, 以满足 $\text{Tr} \rho^{\text{st}} = \langle\langle \tilde{\phi}_0 | \phi_0 \rangle\rangle = 1$. 对任意的超算符 \mathcal{A} , 定义其稳态平均值为 $\langle\langle \mathcal{A} \rangle\rangle = \text{Tr} \{ \mathcal{A} \rho^{\text{st}} \} \equiv \langle\langle \tilde{\phi}_0 | \mathcal{A} | \phi_0 \rangle\rangle$. 则 (8) 式可以简洁地表达为

$$\langle I_{\alpha}(t) \rangle = \langle\langle \tilde{\phi}_0 | \mathcal{J}_{\pm} | \phi_0 \rangle\rangle. \quad (9)$$

其次, 利用 MacDonald 噪声公式^[26,27]

$$S_{\alpha}(\omega) = 2e^2 \omega \int_0^{\infty} dt \sin(\omega t) \\ \times \frac{d}{dt} [\langle n_{\alpha}^2(t) \rangle - \langle n_{\alpha}(t) \rangle^2] \quad (10)$$

以及二阶累积, 可以证明 (10) 式中第二项 $\langle n_{\alpha}(t) \rangle = I_{\alpha} t$ 由稳态电流 (8) 式给定, 并且恰好

与 (10) 式第一项 $\langle n_{\alpha}^2(t) \rangle$ 展开中的一部分相抵消. 因此对 (10) 式中第一项进行拉普拉斯变换后, 即可得到散粒噪声

$$S_{\alpha}(\omega) = 2e^2 \Re \left\{ \langle\langle \tilde{\phi}_0 | (\mathcal{J}_{\pm} - 2 \mathcal{J}_{\pm} \frac{1}{i\omega \mathbf{I} + \mathcal{W}(\chi_L, \chi_R)} \Big|_{\chi_L=0, \chi_R=0} \times \mathcal{J}_{\pm}) | \phi_0 \rangle\rangle \right\}, \quad (11)$$

其中, 符号 \Re 表示对后面的代数多项式取实部. (4), (9) 以及 (11) 式构成本文的主要结果.

3 数值模拟与讨论

利用 (4), (9) 以及 (11) 式我们可以方便地研究系统的电流与散粒噪声. 以下讨论中取 $e = 1$.

3.1 电 流

首先, 我们讨论稳态电流. 由于左、右电极的电流不守恒, 定义左、右电极的电流差为

$$\Delta I = I_R^{\text{st}} - I_L^{\text{st}}. \quad (12)$$

图 2 显示不同的量子点能级占据时电流差 ΔI 随隧穿率 Γ_{α} 的变化, 以及没有 MFs 耦合时的双量子点与三量子点情况. 图中清晰地揭示了 MFs 对电流的影响. 当改变门电压从而调谐系统与电极的耦合强度 Γ_R/Γ_L 时, 电流对系统中有无 MFs 的响应是不同的: 没有 MFs 时, 双点与三点结构中由于共振隧穿使得两极电流守恒, 电流差不随 Γ_R/Γ_L 变化; 而存在 MFs 时, 仅当系统与电极对称耦合 ($\Gamma_R = \Gamma_L$) 时 $I_L^{\text{st}} = I_R^{\text{st}}$, 除此之外 $I_L^{\text{st}} \neq I_R^{\text{st}}$, 电流不守恒, 电流差相对于对称耦合点 $\Gamma_R/\Gamma_L = 1$ 呈反对称变化, 并且在不同的量子点能级占据时都存在极大值. 有 MFs 耦合时两极电流不守恒的原因是因为拓扑超导体可以吸收或释放一对电子. 在 Dirac 费米子表象中, 量子点能级 ε_i 与 f 态能级 ε_M 构成三能级系统, 当 ε_i 与 ε_M 共振时可以被左电极发射出的电子连续占据, 然后 d_i 态与 f 态的电子以 Cooper 对形式被超导体吸收. 反之, 超导体中的 Cooper 对分裂成两个电子, 分别占据 d_i 态和 f 态. 这两个过程导致超导体支路电流不为零. 当 ε_2 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_M$ 大失谐时, 电子难以占据 QD_2 , 使电流差增大, 差的最大值向对称耦合点 $\Gamma_R/\Gamma_L = 1$ 移动; 当 ε_1 与 $\varepsilon_2, \varepsilon_M$ 大失谐时, 电子难以占据 QD_1 , 导致电流差明显减小, 差的最大值远离对称耦合点 $\Gamma_R/\Gamma_L = 1$.

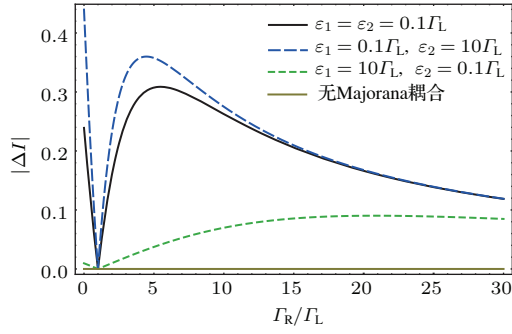


图2 (网刊彩色) 稳态时发射极与收集极的电流差 $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{2}\Gamma_L$

Fig. 2. (color online) Difference between the steady-state source and drain currents, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{2}\Gamma_L$.

3.2 散粒噪声

电流涨落即散粒噪声可以进一步揭示 Majorana 费米子的输运特征, 以及对系统动力学的影响. 图3显示存在 MFs 时的散粒噪声谱, 同时也给出无 MFs 耦合时双点与三点结构的噪声. 首先, 噪声谱中各个“谷”以 $\omega = 0$ 为中心对称分布, 说明电子在量子点与纳米线之间“相干振荡”, 这证明在纳米线两端存在能量分立的 Majorana 束缚态, 并与其他高激发连续能态之间存在能隙, 因此才能保持该束缚态与近邻量子点耦合, 使噪声谱同无 MFs 耦合时的双点与三点共振模型的噪声类似, 均呈现“相干振荡”. 这完全不同于量子点与连续能态的纳米线耦合, 那里不会出现“相干振荡”. 其次, 尽管有或没有 MFs 时“相干振荡”的噪声谱类似, 并且 $\omega = 2\lambda_i$ 处的“谷”在频谱上出现的位置也相同,

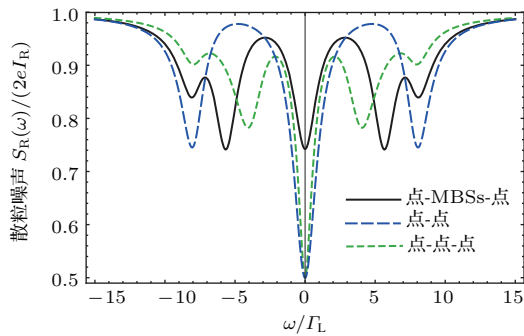


图3 (网刊彩色) 电子在量子点与拓扑超导体之间的相干振荡以及零频噪声的增大揭示了 Majorana 费米子的存在, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4\Gamma_L$, $\Gamma_L = \Gamma_R$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

Fig. 3. (color online) The coherent oscillations of electrons between the nanowire and the quantum dots, together with a pronounced zero-frequency noise enhancement, can reveal the existence of Majorana, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4\Gamma_L$, $\Gamma_L = \Gamma_R$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

但是 MFs 的存在导致零频与低频噪声显著增强. 因此, 电子在量子点与拓扑超导体之间的相干振荡以及零频噪声的显著增强可以证明系统中存在 MFs.

进一步, 我们研究在不同耦合情况下 MFs 对系统动力学的影响. 首先, 考虑双量子点与拓扑超导体弱耦合 ($\lambda_i \leq \Gamma_\alpha$) 时的散粒噪声, 见图4. 没有 QD₂ 耦合时, 噪声谱呈现“谷-峰-谷”的振荡, $\omega = 0$ 处存在较大的峰值, 而 $\omega \approx \pm\sqrt{2}\lambda_1$ 处存在较小的谷值. 当 QD₂ 逐渐与 MFs 弱耦合时, 电子在两个量子点和拓扑超导纳米线之间相干振荡, 导致零频噪声“峰”降低并逐渐变成“谷”, 直至对称弱耦合 ($\lambda_i = \Gamma_\alpha$) 时达到极小值, 同时 $\omega \approx \pm\sqrt{2}\lambda_1$ 处的谷值噪声逐渐增大, 谷的展宽逐渐减小.

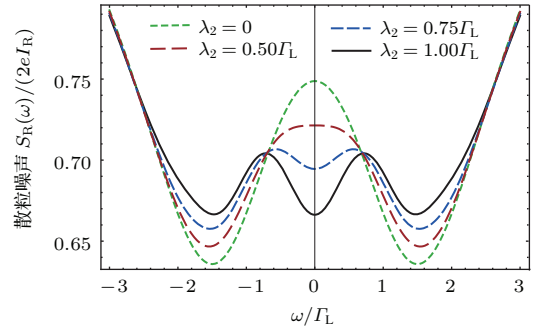


图4 (网刊彩色) 双量子点与拓扑超导体弱耦合时的散粒噪声, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda_1 = \Gamma_L = \Gamma_R$

Fig. 4. (color online) Shot noise when the double quantum dots weakly coupled to the nanowire, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda_1 = \Gamma_L = \Gamma_R$.

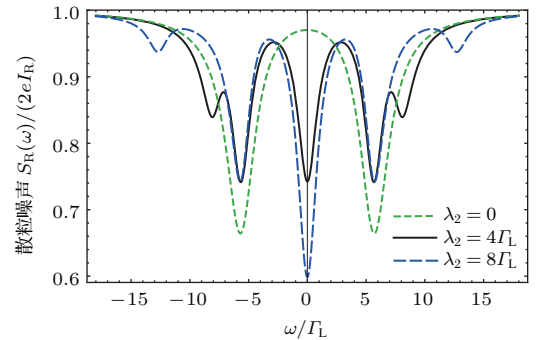


图5 (网刊彩色) 双量子点与拓扑超导体强耦合时的散粒噪声, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda_1 = 4\Gamma_L$, $\Gamma_L = \Gamma_R$

Fig. 5. (color online) Shot noise when the double quantum dots strongly coupled to the nanowire. $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda_1 = 4\Gamma_L$, $\Gamma_L = \Gamma_R$.

其次, 考虑双量子点与拓扑超导体强耦合 ($\lambda_i \gg \Gamma_\alpha$) 时的散粒噪声, 见图5. 没有 QD₂ 耦合时, 系统噪声谱类似于弱耦合情况(图4), 仍呈现“谷-峰-谷”, 只是零频噪声的峰值较弱耦合时明

显增强, 而 $\omega \approx \pm\sqrt{2}\lambda_1$ 处的噪声谷值略有增大. 当 QD_2 与 MFs 开始耦合, 特别是当 $\lambda_2 \gg \lambda_1$ 时, 由于 QD_2 与拓扑超导纳米线耦合较强, 导致零频噪声显著降低, $\omega \approx \pm\sqrt{2}\lambda_1$ 处的噪声谷保持不变, 但是最外围的“边谷”由于 QD_2 与 MFs 耦合增强而向高频端移动.

最后, 考虑系统与电极耦合强度 Γ_α 对散粒噪声的影响. 图 6 显示, 随着耦合强度 Γ_R 的逐渐增大, 虽然噪声谱仍呈现振荡, 但是由于 $\Gamma_L < \Gamma_R$, 电子容易从中间系统隧穿进入右电极, 导致噪声逐渐降低, 并且零频噪声的“谷”逐渐变成“峰”. 反之, 当 $\Gamma_L > \Gamma_R$ 时, 电子难以从中间系统隧穿进入右电极, 从而在双量子点与拓扑超导纳米线之间“相干振荡”, 导致噪声增强.

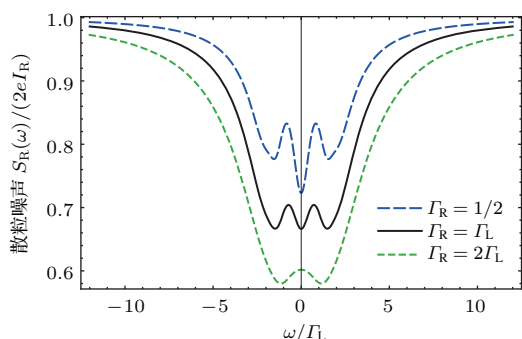


图 6 (网刊彩色) 双量子点与 Majorana 费米子混合结构在不同电极耦合强度下的散粒噪声, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \Gamma_L$

Fig. 6. (color online) Shot noise at different tunneling rates between the QD_1 and the leads, $\varepsilon_M = 0.1\Gamma_L$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \Gamma_L$.

利用噪声来测量拓扑超导体中的 MBS 在文献 [19] 中即已提出, 文献 [20] 提出的电导表征 MFs 存在的模型也与本文类似. 其中, 文献 [19] 采用非平衡格林函数的方法, 研究了没有量子点耦合, 直接隧穿过两个 MFs 的电流关联谱, 特别是零频散粒噪声 (Fano 因子); 这与本文有量子点耦合结构不同, 本文既探讨了零频噪声, 也研究了有限频率的噪声情况. 另一方面, 文献 [20] 的模型只有单量子点耦合, 并且仅仅讨论了线性响应下的电导特征; 本文研究的是双量子点与 MFs 耦合, 并利用粒子数表象下的电子跃迁函数, 进一步探讨了有限频率的电流噪声谱.

4 结 论

本文利用粒子数表象下的主方程研究了双量子点与拓扑超导纳米线混合结构中的电荷输运, 以

及 Majorana 费米子的噪声特性. Majorana 费米子导致两极电流不守恒, 电流差呈非对称性. 噪声谱的“相干振荡”与低频噪声的显著增强能够证明 Majorana 费米子是否存在. 散粒噪声随量子点与拓扑超导纳米线, 以及量子点与电极耦合强度的变化进一步揭示了 Majorana 费米子对系统输运性质的影响. 因此, 电流结合散粒噪声有助于表征量子点结构中 Majorana 费米子的存在与否.

参考文献

- [1] Wilczek F 2009 *Nat. Phys.* **5** 614
- [2] Nayak C, Simon S H, Stern A, Freedman M, Das Sarma S 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083
- [3] Kitaev A Y 2001 *Phys.-Uspekhi* **44** 131
- [4] Das Sarma S, Nayak C, Tewari S 2006 *Phys. Rev. B* **73** 220502(R)
- [5] Fu L, Kane C L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 096407
- [6] Zhang C W, Tewari S, Lutchyn R M, Das Sarma S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 160401
- [7] Sau J D, Lutchyn R M, Tewari S, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 040502
- [8] Lutchyn R M, Sau J D, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 077001
- [9] Oreg Y, Refael G, Oppen F V 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 177002
- [10] Sasaki S, Kriener M, Segawa K, Yada K, Tanaka Y, Sato M, Ando Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 217001
- [11] Volovik G E 1999 *JETP Lett.* **70** 609
- [12] San-Jose P, Cayao J, Prada E, Aguado R 2014 arXiv:1409.7306v2 [cond-mat]
- [13] Franz M 2013 *Nature Nanotech.* **8** 149
- [14] Mourik V, Zuo K, Frolov S M, Plissard S R, Bakkers E P A M, Kouwenhoven L P 2012 *Science* **336** 1003
- [15] Das A, Ronen Y, Most Y, Oreg Y, Heiblum M, Shtrikman H 2012 *Nature Phys.* **8** 887
- [16] Deng M T, Yu C L, Huang G Y, Larsson M, Caroff P, Xu H Q 2012 *Nano Lett.* **12** 6414
- [17] Alicea J, Oreg Y, Refael G, von Oppen F, Fisher M P A 2011 *Nature Phys.* **7** 412
- [18] Lin C H, Sau J D, Das Sarma S 2012 *Phys. Rev. B* **86** 224511
- [19] Bolech C J, Demler E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 237002
- [20] Liu D E, Baranger H U 2011 *Phys. Rev. B* **84** 201308(R)
- [21] Cao Y, Wang P, Xiong G, Gong M, Li X Q 2012 *Phys. Rev. B* **86** 115311
- [22] Shang E M, Pan Y M, Shao L B, Wang B G 2014 *Chin. Phys. B* **23** 057201
- [23] Wang S K, Jiao H J, Li F, Li X Q 2007 *Phys. Rev. B* **76** 125416
- [24] Li Y X, Bai Z M 2013 *J. Appl. Phys.* **114** 033703
- [25] Hütten R, Zazunov A, Braunecker B, Levy Yeyati A, Egger R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 166403
- [26] Li X Q, Cui P, Yan Y J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 066803
- [27] Luo J Y, Li X Q, Yan Y J 2007 *Phys. Rev. B* **76** 085325

Shot noise characteristics of Majorana fermions in transport through double quantum dots^{*}

Zhou Yang Guo Jian-Hong[†]

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

(Received 22 November 2014; revised manuscript received 17 April 2015)

Abstract

Majorana fermions are their own antiparticles, which play an important role in fault-tolerant topological quantum computation. Recently, the search for Majorana fermions in condensed matter physics, is attracting a great deal of attention as quasiparticles emerge. In this paper we consider a specific model consisting of double quantum dots and a tunnel-coupled semiconductor nanowire on an s-wave superconductor, since the nanowire may support Majorana fermions under appropriate conditions. We study the electron transport through the double quantum dots by using the particle-number resolved master equation. We pay particular attention to the effects of Majorana's dynamics on the current fluctuation (shot noise). It is shown that the current and the shot noise measurement can be used to distinguish Majorana fermions from the usual resonant-tunneling levels. When there exist Majorana fermions coupling to the double quantum dots, a difference between the steady-state source and drain currents depends on the asymmetry of electron tunneling rates. The asymmetric behaviors of the currents can reveal the essential features of the Majorana fermion. Moreover, the dynamics of Majorana coherent oscillations between the semiconductor nanowire and the double quantum dots is revealed in the shot noise, via spectral dips together with a pronounced zero-frequency noise enhancement effect. We find, on the one hand, that the peak of the zero-frequency noise becomes a dip in the case of weak coupling between double quantum dots and the nanowire; on the other hand, for the strong coupling the dip of the zero-frequency noise becomes even further deep with "side dips" towards high frequency regimes. Furthermore, the dip of the zero-frequency noise disappears and a zero-frequency noise "peak" gradually develops when the dot-electrode coupling is tuned by gate voltage. As a result, the combination of the current and the shot noise through double quantum dots allows one to probe the presence of Majorana fermions.

Keywords: Majorana fermions, quantum dot, shot noise

PACS: 73.21.-b, 73.23.-b

DOI: [10.7498/aps.64.167302](https://doi.org/10.7498/aps.64.167302)

^{*} Project supported by the Scientific Research Foundation of Beijing Education Commission, China (Grant No. KM201210028008).

[†] Corresponding author. E-mail: gjhaso@163.com