

欧拉圆盘不同能量耗散机理之间的关联

朱攀丞 边庆勇 李晋斌

Relations among different energy dissipations of Euler disk

Zhu Pan-Cheng Bian Qing-Yong Li Jin-Bin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 174501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.174501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.174501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I17>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

驾驶员预估效应下车流能耗演化机理研究

[Analysis of evolution mechanism of traffic energy dissipation by considering driver's forecast effect](#)

物理学报.2015, 64(15): 154503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154503>

振动颗粒混合物中的周期性分聚现象与能量耗散

[Energy dissipation and periodic segregation of vibrated binary granular mixtures](#)

物理学报.2015, 64(13): 134503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134503>

垂直振动激励下颗粒材料有效质量和耗散功率的研究

[Dynamic effective mass and power dissipation of the granular material under vertical vibration](#)

物理学报.2015, 64(4): 044501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.044501>

垂直振动激发下颗粒物质的能量耗散

[Energy dissipation of a granular system under vertical vibration](#)

物理学报.2013, 62(2): 024502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.024502>

欧拉圆盘不同能量耗散机理之间的关联*

朱攀丞¹⁾²⁾ 边庆勇¹⁾²⁾ 李晋斌^{1)†}

1) (南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

2) (南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016)

(2015年1月6日收到; 2015年4月13日收到修改稿)

本文研究了欧拉圆盘运动过程中盘厚度以及盘面与水平面夹角 α 两因素对能量耗散的影响. 得出圆盘厚度与直径之比 x 对能量变化中各项因子的影响: x 很小时, 质心在竖直方向上的动能变化和重力势能变化是系统能量耗散的主要因素; 当 $x > 0.4142$ 时, 圆盘绕与之平行的轴的转动动能变化成为主要因素, 并给出圆盘厚度可忽略的条件. 模拟了滚动摩擦、空气黏滞等不同能量耗散方式与 x, α 的关系, 导出各种耗散方式在圆盘运动的过程中的转变规律, 并指出 $x = 0.1733, \alpha > 18^\circ$ 时能量耗散形式为纯滚动摩擦, 这修正了文献[26]结论.

关键词: 欧拉圆盘, 能量耗散, 圆盘厚度, 夹角

PACS: 45.40.-f, 45.40.Aa, 45.40.Bb

DOI: 10.7498/aps.64.174501

1 引言

欧拉圆盘是一种研究水平面上旋转的圆盘动力系统的科学模型, 因为欧拉最早对它系统研究而得名. 一般来讲, 生活中的硬币或任何圆盘物体在类似桌子的平面上旋转的运动和欧拉盘的运动本质上相同. 圆盘在粗糙面上的运动机理涉及与滑动和滚动摩擦相关的复杂动力学. 该问题的研究有助于解决诸多与摩擦相关的工程问题, 如车辆轮胎动力学、高速铁路轮轨接触动力学以及在地震工程[1]等方面. 欧拉圆盘的运动看似简单但却非常有趣、复杂, 自欧拉以来几百年的科学家们一直对它有浓厚兴趣[2–5]. 2000年Moffatt的一篇文章[6], 再次掀起了对这一古老问题的研究热潮, Moffatt指出在圆盘与其下方稀薄空气层之间的摩擦是造成圆盘陡然静止的原因, 他将这种运动归结成有限时间的奇异性, 并进一步指出在某一特定时间, 黏滞扩散将趋于无穷. 同年, Engh等在空气中

与真空中对比实验的结果[7], 他们发现两种情形下最后的运动图像完全相同, 由此排除了空气摩擦使圆盘停止运动的可能, 并证明至少在运动的早期阶段, 滚动摩擦是能量消耗的主要原因. Liu等采用球盘系统来做欧拉圆盘的研究[8], 他们利用LZB方法[9–12]与3D照相技术记录了运动的整个过程, 发现运动形式既有滑动也有滚动, 而且滚动、滑动两种运动形式可互相转换. 并进一步通过对球盘系统的实验分析指出能量耗散机理遵循指数为 $2/3$ 的能量法则[13–15], 他们的实验证明能量损耗的主要原因是滚动摩擦, 而非桌面与盘面之间的稀薄空气摩擦. 同时, 通过对不同的材料制成的圆盘的运动过程分析, 发现了由于微小耗散对于运动的影响[16]. 对于此问题的研究也有助于解释其他的相关问题[17–20].

前人的工作关注不同能量耗散的形式对运动的影响, 而未给出这些耗散之间的联系及转变条件, 我们仔细研究圆盘的运动, 给出不同能量耗散形式的转变规律.

* 国家自然科学基金(批准号: 11104143)和大学生创新训练计划项目(批准号: 2015CX00808)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jinbin@nuaa.edu.cn

2 欧拉圆盘动力学理论

实验室的欧拉圆盘如图 1 所示, 这里我们引入依赖于欧拉盘瞬时位形的运动坐标系, **1**, **2**, **3** 分别为三个轴向的单位矢量, 具体定义见图 1. 前人^[21-24]研究大都假定圆盘的厚度为零的理想情况, 但在圆盘的实际运动中厚度并不是一定可以忽略的. 我们研究半厚度为 b 的圆盘在水平面上运动, 当 $b = 0$ 时表明厚度不计.

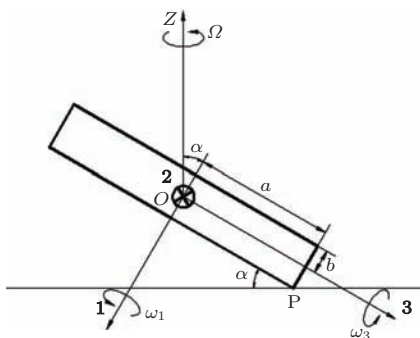


图 1 欧拉圆盘竖截面图 (O 为质心, P 为盘与地面接触点. 运动坐标系原点为质心 O 点, 其中 **1** 轴沿圆盘法线方向, **2** 轴垂直于纸面向内 (如 $\otimes$ 所示), **3** 轴与 **1** 轴、**2** 轴构成右手螺旋系, 即 $\mathbf{3} = \mathbf{1} \times \mathbf{2}$)

Fig. 1. The vertical section of the Euler disc, O is the center of mass, P is the contact point. The origin of the motion coordinate system is O, the symmetry axis of the disk is called axis **1**. The axis **2** is perpendicular to the paper and points into the paper (as $\otimes$ shows) and axis **3** is defined by $\mathbf{3} = \mathbf{1} \times \mathbf{2}$, which constitutes the right-handed reference frame with axis **1** and axis **2**.

2.1 理论方程

圆盘的质量为 m , 半径为 a , 圆盘相对于地面的角速度 ω 由两部分组成, 坐标轴 (**1**, **2**, **3**) 相对于地面的角速度分别记为 ω_{123} , 圆盘自身相对于自身对称轴 **1** 的角速率记为 ω_{rel} , 圆盘与水平面的夹角为 α 、关于竖直方向转轴 Z 的角速率 Ω . 因此^[25],

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{123} + \omega_{\text{rel}}\mathbf{1} = \Omega Z + \dot{\alpha}\mathbf{2} \\ &= -\Omega \cos \alpha \mathbf{1} + \dot{\alpha}\mathbf{2} - \Omega \sin \alpha \mathbf{3} + \omega_{\text{rel}}\mathbf{1}.\end{aligned}\quad (1)$$

圆盘相对于 **1** 轴、**2** 轴以及 **3** 轴的转动惯量分别设为 I_{11} , I_{22} 和 I_{33} , 具体表达式为

$$I_{11} = \frac{1}{2}ma^2, \quad I_{22} = I_{33} = m\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^2\right). \quad (2)$$

显而易见 I_{22} , I_{33} 随着厚度 b 增加而变大, 圆盘运动的角动量:

$$L_{\text{cm}} = \mathbf{I} \cdot \omega$$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{1}{2}ma^2, m\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^2\right), m\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^2\right) \right] \\ &\quad \times \omega,\end{aligned}\quad (3)$$

1, **2**, **3** 方向轴的角度对于时间 t 求导:

$$\frac{d\mathbf{1}}{dt} = \omega_{123} \times \mathbf{1} = -\Omega \sin \alpha \mathbf{2} - \dot{\alpha}\mathbf{3}, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{2}}{dt} = \omega_{123} \times \mathbf{2} = \Omega \sin \alpha \mathbf{1} - \Omega \cos \alpha \mathbf{3}, \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{3}}{dt} = \omega_{123} \times \mathbf{3} = \dot{\alpha}\mathbf{1} + \Omega \cos \alpha \cdot \mathbf{3}, \quad (6)$$

支持力对圆盘中心的力矩:

$$\mathbf{a} \cdot \frac{a - b \tan \alpha}{a} \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{cm}}}{dt}. \quad (7)$$

令 $\omega_1 = \omega_{\text{rel}}\Omega \cos \alpha$. 结合方程 (4)–(6) 按照 **1**, **2**, **3** 方向化简, 对于稳定运动: $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = \dot{\Omega} = \dot{\omega}_1 = 0$, 我们将稳定状态下相应物理量记作 α_0 , Ω_0 , ω_{10} , 则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\Omega_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \frac{3}{2}\omega_{10}\Omega_0 \sin \alpha_0 \\ &= \frac{g \cos \alpha_0}{a},\end{aligned}\quad (8)$$

$$\omega = -\frac{b}{a}\Omega \sin \alpha \mathbf{1} - \Omega \sin \alpha \mathbf{3}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\Omega_0^2 &= \left(\frac{g}{a}\right) \left[\cos \alpha_0 - \left(\frac{b}{a}\right) \sin \alpha_0 \right] \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right) \sin^2 \alpha_0 \right\}^{-1}.\end{aligned}\quad (10a)$$

不计厚度情况下 (10a) 可写作

$$\Omega_{00}^2 = \frac{4g}{a \sin \alpha_0}. \quad (10b)$$

2.2 圆盘运动方程 $\alpha = \alpha(t)$, $\Omega = \Omega(t)$ 与圆盘停止时间 t_0 , 最大角速率 Ω_{max}

由 $h = b \cos \alpha + a \sin \alpha \approx b + a\alpha$, 结合方程 (1)、方程 (9)、方程 (10a) 可知圆盘旋转时总能量:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\omega^2 + mgh \\ &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mg(a - b\alpha)\left(\frac{b}{a} + 1\right)^2\alpha^2 \\ &\quad + mg(b + a\alpha).\end{aligned}\quad (11)$$

考虑方程 (8), 由 $\sin \alpha \approx \alpha$ 可得

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{ma^2g\dot{\alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{mag\dot{\alpha}}{2}\left(\frac{b}{a} + 1\right)^2$$

$$+mag\dot{\alpha}. \quad (12)$$

地面对圆盘的支撑力 $F_z \approx 0$:

$$m\ddot{\alpha}(\sqrt{a^2 + b^2}) = mg. \quad (13)$$

假设水平面有许多小的突起, 突起的平均间距是 δ , 则平均高度设为 $h = \varepsilon\delta$ (ε 为常数) [25]. 每当圆盘越过一个突起时, 假设圆盘的能量耗散是 $mgh = mg\varepsilon\delta$, 旋转的圆盘越过一个突起的时间为 $t = \delta/\Omega a$ (角度很小的时候), 所以由于滚动摩擦的能量耗散速率

$$P = -\frac{mg\varepsilon\delta}{\delta} = -\varepsilon mag\Omega. \quad (14)$$

广义一般式

$$P = -mg\varepsilon a\Omega^\beta. \quad (15)$$

不同的耗散机理, β 相应的取值不同, 例如, 空气摩擦 $\beta = 3$, Moffatt 空气黏滞力模型 $\beta = 4$, Moffatt 修正模型中 $\beta = 2.5$.

联立 (12) 和 (15) 式积分可得 $\alpha = \alpha(t)$ 的关系式:

$$\alpha = \left[\frac{\varepsilon(\beta+2)}{\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2 + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2} \right]^{\frac{2}{\beta+2}} \times \left(\frac{g}{\frac{a}{4} + \frac{b^2}{3a}} \right)^{\frac{\beta}{\beta+2}} (t_0 - t)^{\frac{2}{\beta+2}}. \quad (16)$$

这里 t_0 为运动停止的时间, 忽略厚度 ($b = 0$) 时,

$$\alpha = \left[\frac{\varepsilon(\beta+2)}{5} \right]^{\frac{2}{\beta+2}} \cdot \left(\frac{4g}{a} \right)^{\frac{\beta}{\beta+2}} (t_0 - t)^{\frac{2}{\beta+2}}. \quad (17)$$

得到 $\Omega(t)$ 的表达式:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \left[\frac{20g}{a\varepsilon(\beta+2)(t_0-t)} \right]^{\frac{1}{\beta+2}} \\ &\equiv \left(\frac{C}{t_0-t} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\max} &= \left[\frac{(\beta+2)^2}{8\beta} \right]^{\frac{1}{2(\beta+1)}} C^{\frac{1}{\beta+1}}, \\ t_{\max} &= t_0 - \left[\frac{8\beta}{(\beta+2)^2} \right]^{\frac{\beta+2}{2(\beta+1)}} C^{\frac{-1}{\beta+1}}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $C = 20g/a\varepsilon(\beta+2)$, $\Omega_{\max}$ 为 Ω 的最大值, $t_{\max}$ 为运动达到 $\Omega_{\max}$ 时对应的时间.

3 数值模拟及其物理分析

3.1 圆盘能量变化形式数值模拟及其物理分析

由 (12) 式知, 圆盘的能量变化形式由质心在竖直方向上的动能变化 ($ma^2g\dot{\alpha}/\sqrt{a^2+b^2}$)、重力势能变化 ($mag\dot{\alpha}$) 和圆盘绕 **3** 轴的转动动能变化 ($0.5mag\dot{\alpha}(b/a+1)^2$) 组成. 不考虑上述三项能量变化中的公因子 $mag\dot{\alpha}$, 可以得到 $y_v = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $y_h = 1$, $y_w = 0.5(b/a+1)^2$, 如图 2 所示.

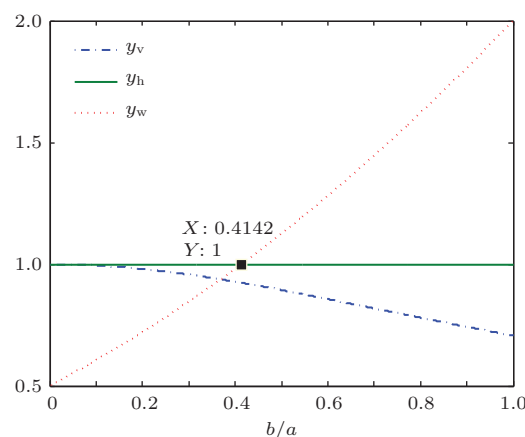


图 2 y_v, y_h, y_w 图像

Fig. 2. The figure of y_v, y_h, y_w .

从图 2 知, 固定圆盘质量不变, x 很小时, 质心在竖直方向上的动能变化和重力势能变化是系统能量变化的主要因素; 随着 x 的增大, 从 y_v 表达式可以看出地面与 OP 连线的夹角增大导致质心在竖直方向上的动能变化影响减小, 从 (2) 式知圆盘绕 **3** 轴的转动惯量随着厚度增加而变大, 这导致圆盘绕 **3** 轴的转动动能变化影响逐步增大, 当 $x > 0.4142$ 时, 圆盘绕 **3** 轴的转动动能变化成为系统能量变化的主要因素.

3.2 Ω_0^2/Ω_{00}^2 数值模拟及其物理分析

为了研究圆盘半厚度 b 圆盘理论运动的影响, 我们可以研究 $x = b/a$ 的值对圆盘理论运动的影响, 由 (10a), (10b) 两式之比可得

$$y(x, \alpha) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{00}^2}$$

$$= \frac{3(\cos \alpha - x \sin \alpha)}{(3 + 4x^2) \cos \alpha - 6x \sin \alpha}. \quad (20)$$

$y = 1$ 表示圆盘有无厚度运动情况完全相同. 相应 α 取 15° , 12° , 10° 的厚度影响曲线如图 3(a), (b) 所示.

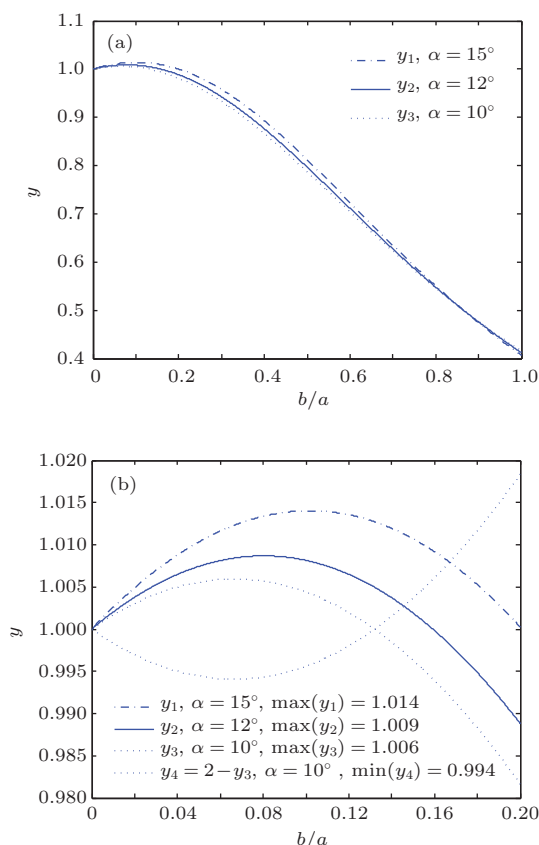


图3 (a) $\Omega_0^2 / \Omega_{00}^2$ 分别在 α 为 15° , 12° , 10° 时的曲线; (b) 图为 (a) 图的局部放大以及 y_3 关于 $y = 1$ 对称的曲线 y_4

Fig. 3. (a) The curve of $\Omega_0^2 / \Omega_{00}^2$ when α is equal to 15° , 12° , 10° ; (b) shows the curve of partial enlargement and y_4 is symmetrical to y_3 about the line $y = 1$.

方程 (20) 的极大值点在

$$x \equiv x_p = \cot \alpha - \sqrt{\cot^2 \alpha - 0.75}$$

时取得, 则

$$y_{\max} = \frac{3(\cos \alpha - x_p \sin \alpha)}{(3 + 4x_p^2) \cos \alpha - 6x_p \sin \alpha}.$$

作出曲线 y_4 是为了更直观的从图像中得到我们的结论. 从图 3(a), (b) 中我们能够看到, α 取定值的情况下, 厚度影响曲线先上升后下降, 且上升的值相对较小, 即曲线的最大值与 $y = 1$ 的相对误差可忽略, 纵坐标仍为一. 那么, 当曲线下降

时, 在前面提到的相对误差范围内, 曲线值的变化同样可以被忽略, 曲线值仍为一. 所以我们规定圆盘半厚度 b 对圆盘运动无影响的取值范围为: $2 - y_{\max} < y(b/a) < y_{\max}$, 即

$$\begin{aligned} x < \left\{ 6 \sin \alpha (2 - y_{\max}) - 3 \sin \alpha \right. \\ &+ \left. \{ [3 \sin \alpha - 6 \sin \alpha (2 - y_{\max})]^2 \right. \\ &- \left. 16 \cos \alpha (2 - y_{\max}) \right. \\ &\times \left. (3 \cos \alpha - 3 y_{\max} \cos \alpha) \}^{1/2} \right\} \\ &\times [8 \cos \alpha (2 - y_{\max})]^{-1} \\ &= f(\alpha). \end{aligned}$$

当 α 大于或等于 10° 时, 由图 3(b) 可知随着 α 的增大, 厚度可忽略的范围越来越大, 即 x 的最大无影响值越来越大. 当 $\alpha = 10^\circ$ 时, x 的最大无影响值约为 0.1598, y 值为 0.994, 与 $y = 1$ 的相对误差不超过 0.006, 即 $\alpha \geq 10^\circ$ 时, $b/a < 0.16$ 为判定圆盘厚度 $2b$ 不影响圆盘简化为无厚度的圆盘进行研究的条件, 这与 Petrie 等的研究^[26]: $b/a \approx 0.17$ 的结论几乎相同. 由此我们可以得知 b/a 在何范围内时, 在研究圆盘运动的过程中可以不考虑厚度的影响, 从而达到简化运动方程的目的, 更易于进行运动分析.

表1 图3(b) 各极值点坐标点

Table 1. Figure 3(b) extreme points coordinates.

	α	x	$y_{\min}$	$y_{\max}$
y_1	15°	0.1019		1.014
y_2	12°	0.0804		1.009
y_3	10°	0.0665		1.006
y_4		0.0665	0.994	

从该数值模拟结果中可看出在 α 越来越小时, 厚度可忽略的范围越来越小, 即 x 的最大无影响值越来越小, 我们由此可以推测在研究 α 趋近于 0° 时, 圆盘的厚度无法忽略, 即在相应的理论推导中, 我们必须考虑厚度对于圆盘运动的影响. 反之, 我们认为当 α 越来越大时, 厚度可忽略的范围越来越大, 即 x 的最大无影响值越大. 但我们必须考虑到, 随着 α 的增大, 曲线的最大值与 $y = 1$ 的相对误差也越来越大.

3.3 β 值数值计算及其物理分析

由方程(12), (15), (16)可得

$$y_5 = \left[\frac{\Omega_0}{\Omega_{00}} \right]^{\beta+2} = \frac{\sqrt{1 + (b/a)^2} + 2 + (1 + b/a)^2}{5} \times \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2} = \frac{3 \left[\frac{2}{5\sqrt{1+x^2}} + \frac{2 + (1+x)^2}{5} \right]}{3 + 4x^2}. \quad (21)$$

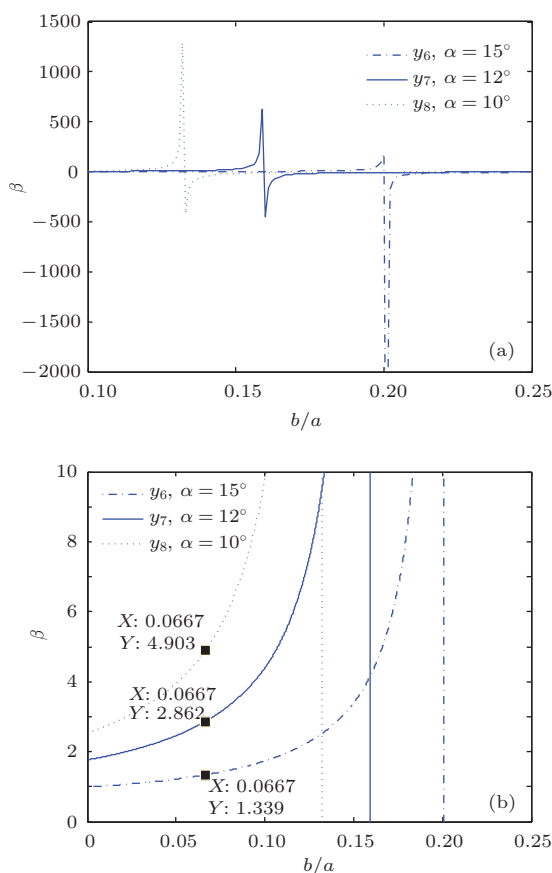


图4 方程(20)与(21)联立, α 取 $15^\circ, 12^\circ, 10^\circ$ 时的图像及其纵轴局部放大图

Fig. 4. Correlate the equations (20) and (21), make α take values equal to $15^\circ, 12^\circ, 10^\circ$. Their images are as shown in figure (a). Figure (b) is the image of partial enlargement.

方程(20)与(21)联立, 求解 β . 由3.2知: $\alpha \geq 10^\circ$, $b/a < 0.16$ 为判定圆盘厚度 $2b$ 相对不影响圆盘简化为无厚度的圆盘进行研究的条件, 则 $0 < x < 0.16$, 又由图3(b)知: 当 $y_3 = y_4 = 1$ 时, $x = 0.1323$. 那么

1) 当 $\Omega_0^2/\Omega_{00}^2 < 1$, 即 $0.1323 < x < 0.16$ 时, $y_5 > 1$, 则 β 为负值, 无意义.

2) 当 $\Omega_0^2/\Omega_{00}^2 > 1$ 时, 即 $0 < x < 0.1323$ 时, 我们分别数值模拟计算了 β 在 α 与 x 为定值时的值, 结果如图4(a), (b), 图5所示.

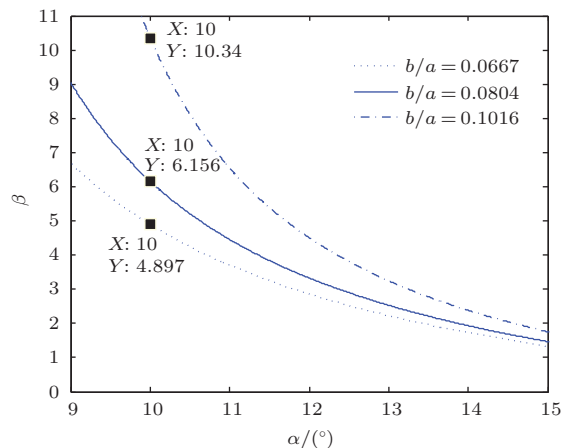


图5 方程(20)与(21)联立, x 分别取0.0667, 0.0804, 0.1016的图像

Fig. 5. Correlate the equations (20) and (21), make x take values equal to 0.0667, 0.0804, 0.1016. The image is as shown.

由我们的结果可知, β 值随 x 和 α 的变化而变化, 在圆盘半厚度与半径之比 x 确定的情况下, β 随 α 的减小而增大; 在 α 为定值的情况下, β 随 x 的增大而增大. 所以我们得出结论: 圆盘的能量耗散方式和圆盘半厚度与半径之比 x 以及圆盘在运动过程中的 α 有关, 其中能量的耗散方式包含了滚动摩擦、空气黏滞力及其他形式, 各种耗散方式在圆盘运动的过程中所占比例会有明显的不同, 且会有混合能量耗散方式的情况.

特别的对于实验室圆盘参数 $a = 3.75$ cm, $b = 0.65$ cm, 即 $x = 0.1733$ 时, 如图6所示.

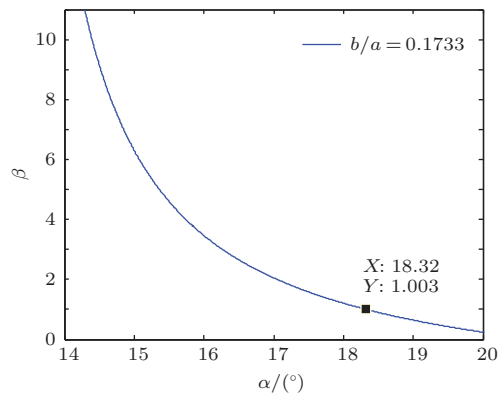


图6 x 取0.1733的图像

Fig. 6. The figure is shown when x is equal to 0.1733.

从(14), (15)式可知, 当 $\beta = 1$ 时, 圆盘的能量耗散方式为滚动摩擦. 所以我们的理论给出 $\alpha > 18^\circ$ 时为滚动摩擦, Engh等实验的结果^[7]排除了空气黏滞影响, Petrie等指出^[26] $\alpha > 10^\circ$ 时为滚动摩擦, 我们的理论对这一结论作了进一步修订.

4 结论与讨论

本文从理论和数值模拟两方面讨论了欧拉圆盘的部分运动和能量耗散机理. 在理论部分, 通过推导考虑圆盘厚度的运动公式, 得到了圆盘旋转的部分相关公式, 给出圆盘厚度与直径之比 x 对能量变化中各项因子的影响: 在圆盘质量不变的情况下, x 很小时, 质心在竖直方向上的动能变化和重力势能变化是系统能量变化的主要因素; 当 $x > 0.4142$ 时, 圆盘绕 $\mathbf{3}$ 轴的转动动能变化成为系统能量变化的主要因素. 并得到了圆盘厚度可忽略的条件为: $x < f(\alpha)$, 这为相关的理论、实验研究提供了参考与依据. 在数值模拟部分, 我们得到了当 $\alpha \geq 10^\circ$ 时, $b/a < 0.16$ 是判定圆盘厚度 $2b$ 不影响圆盘简化为无厚度的圆盘进行研究的条件. 我们的结论与Petrie等的研究^[26] $b/a \approx 0.17$ 几乎相同. 最后通过进一步的理论推导与数值模拟, 我们得到圆盘的能量耗散方式是和圆盘半厚度与半径之比以及圆盘在运动过程中的 α 有关, 其中能量的耗散方式包含了滚动摩擦、空气黏滞力及其他形式, 我们还认为各耗散方式在圆盘运动的过程中各所占比例会有明显的不同以及会有混合能量耗散方式的情况发生. 并进一步指出 $x = 0.1733$, $\alpha > 18^\circ$ 时能量耗散形式为纯滚动摩擦, 这是对文献^[26]结论的修正.

此外, 我们认为在圆盘即将停止运动时, 圆盘的能量形式将由滑动摩擦主导, 因为当圆盘静止时, 圆盘的其中一面完全与水平面接触, 那在即将停止运动前的一瞬, 圆盘将与水平面完全接触, 但尚未停止运动, 即圆盘的 $\mathbf{1}$ 轴与 $\mathbf{Z}$ 轴重合, 在这种情况下, 圆盘的能量耗散方式是滑动摩擦, 这能用来解释圆盘为何会突然停止运动的现象. 对于当圆盘即将停止运动“瞬间”前后的能量耗散机理, 我们提供了一种研究思路, 即我们需要考虑圆盘的形变

影响, 以及我们需要通过更精密的仪器^[27]来记录圆盘的最后运动过程, 结合理论推导, 以此来分析运动圆盘最后的能量耗散机理.

参考文献

- [1] Zhang H J, Brogliato B 2011 *INRIA Research Report* 7580
- [2] Routh E J 1905 *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of Rigid Bodies*, 6th ed (Cambridge: Cambridge University Press) pp196
- [3] Milne E A 1948 *Vectorial Mechanics* 338
- [4] Fowles G R, Cassiday G L 1999 *Analytical Mechanics*, 6th ed (Cambridge: Cambridge University Press) pp383
- [5] Olsson M G 1972 *Am. J. Phys.* **40** 1543
- [6] Moffatt H K 2000 *Nature* **404** 833
- [7] van der Engh G, Nelson P, Roach J 2000 *Nature* **408** 540
- [8] Zhang H J, Liu C 2012 Program and Abstract Book of the sixth Asian Conference on Multibody Dynamics Shanghai, August 26–30, 2012 p129
- [9] Liu C, Zhao Z, Brogliato B 2008 *Proc. R. Soc. A* **464** 3193
- [10] Liu C, Zhao Z, Brogliato B 2009 *Proc. R. Soc. A* **465** 1
- [11] Zhao Z, Liu C, Brogliato B 2009 *Proc. R. Soc. A* **465** 2267
- [12] Liu C, Zhang H, Zhao Z, Brogliato B 2013 *Proc. R. Soc. A* **469** 20120741
- [13] Ma D, Liu C, Zhao Z, Zhang H J 2014 *Proc. R. Soc. A* **470** 20140191
- [14] Zhao Z, Liu C, Ma D 2014 *Proc. R. Soc. A* **470** 20140007
- [15] Le Saux C, Leine R, Glocker C 2005 *Sci.* **15** 27
- [16] Borisov A V, Mamaev I S, Karavaev Y L 2015 *Nonlinear Dynamics* **79** 2287
- [17] Wang J, Liu C, Zhao Z 2014 *Multibody System Dynamics* **32** 217
- [18] Wang J, Liu C, Jia Y, Ma D 2014 *The European Physical Journal E* **37** 1
- [19] Wang J, Liu C, Ma D 2014 *Proc. R. Soc. A* **470** 20140439
- [20] Zhang H, Brogliato B, Liu C 2014 *Multibody System Dynamics* **32** 1
- [21] Stanislavsky A A, Weron K 2011 *Physica D* **156** 247
- [22] Srinivasan M, Ruina A 2008 *Phys. Rev. E* **78** 066609
- [23] Weidman P, Malhotra C 2005 *Phys. Rev. Lett* **95** 264303
- [24] Leine R I 2009 *Arch. Appl. Mech.* **79** 1063
- [25] McDonald A J, McDonald K T 2001 arXiv:0008227 [physics]
- [26] Petrie D, Hunt J L, Gray C G 2002 *American Journal of Physics* **70** 1025
- [27] Zhong H, Lee C, Su Z, Chen S, Zhou M, Wu J 2013 *J. Fluid Mech.* **716** 228

Relations among different energy dissipations of Euler disk^{*}

Zhu Pan-Cheng¹⁾²⁾ Bian Qing-Yong¹⁾²⁾ Li Jin-Bin^{1)†}

1) (College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

2) (College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(Received 6 January 2015; revised manuscript received 13 April 2015)

Abstract

The energy dissipation of a disc spinning on a horizontal plane is studied, as the angle α of the coin made with the horizontal plane decreases, while the angular velocity Ω of the point of contact increases. Effect of the ratio x between the thickness and diameter of an Euler disc and the α on the energy dissipation is studied. We find, by using numerical simulation, that when x is small enough, the lose of the kinetic energy and the gravitational potential energy of the mass center is dominant in energy dissipations; when $x > 0.4142$, the rotational kinetic energy dissipation of the disc around the axis that is parallel to the disc surface, is the leading factor. The requirements in which thickness can be neglected are also obtained, and they can give some hints to the relevant theories and experiments. Our results show that when $\alpha \geq 10^\circ$ and $b/a < 0.16$ the thickness of the disc can be ignored; this conclusion fits Petrie's experimental^[26] data very well. We also discuss the main energy dissipation distributed among different forms: variation of rolling friction and viscous shear of the air with x and α , also show their transition in the process of the motion. Furthermore, we find that the pure rolling friction is the unique dissipation as $x = 0.1733$ and $\alpha > 18^\circ$, which improves the results obtained before. We speculate that the dominant dissipation is the gliding friction in the final stage of the motion, because when the disc is motionless, one face of the disc lies absolutely in contact with the horizontal surface just before the disc halts. One can assume that they are in contact completely but the disc does not halt, thus axis **1** and axis **Z** are almost in the same direction. In this case, the energy dissipation of the Euler disc is due to the gliding friction. To some extent, this accounts for the disc final halt.

Keywords: Euler disc, energy dissipation, thickness of the disc, angle

PACS: 45.40.-f, 45.40.Aa, 45.40.Bb

DOI: 10.7498/aps.64.174501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11104143) and the Undergraduate Training Programs for Innovation (Grant No. 2015CX00808).

† Corresponding author. E-mail: jinbin@nuaa.edu.cn