

自由上浮气泡运动特性的光滑粒子流体动力学模拟

孙鹏楠 李云波 明付仁

Numerical simulation on the motion characteristics of freely rising bubbles using smoothed particle hydrodynamics method

Sun Peng-Nan Li Yun-Bo Ming Fu-Ren

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 174701 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.174701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.174701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphys.ac.cn/CN/Y2015/V64/I17>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

流体力学拉氏守恒滑移线算法设计

[Conservative sliding algorithms for hydrodynamics](#)

物理学报.2015, 64(19): 194701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194701>

干斜压大气拉格朗日原始方程组的半解析解法和非线性密度流数值试验

[Semi-analytical solution of the dry baroclinic Lagrange primitive equation and numerical experiment of a non-linear density current](#)

物理学报.2015, 64(19): 194702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194702>

疏水表面减阻的格子 Boltzmann 方法数值模拟

[Numerical investigation on drag reduction with hydrophobic surface by lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2015, 64(18): 184702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184702>

液滴在梯度微结构表面上的铺展动力学分析

[Spreading dynamics of liquid droplet on gradient micro-structured surfaces](#)

物理学报.2015, 64(15): 154705 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154705>

脉动流在分叉管中通栓效果的晶格玻尔兹曼方法研究

[Pulsation effect on thrombus in a bifurcation pipe by the lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2015, 64(14): 144701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.144701>

# 自由上浮气泡运动特性的光滑粒子 流体动力学模拟\*

孙鹏楠<sup>1)2)</sup> 李云波<sup>1)</sup> 明付仁<sup>1)†</sup>

1) (哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

2) (CNR-INSEAN, Marine Technology Research Institute, Rome 00128, Italy)

(2014年12月9日收到; 2015年3月30日收到修改稿)

基于虚功原理, 在 Hu X Y 等和 Grenier N 等的研究成果基础上推导了多相流光滑粒子流体动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 控制方程, 采用精度较高的黏性力和表面张力模型, 发展了一套适用于具有大密度比和大黏性比界面的多相流 SPH 方法. 首先, 通过施加人工位移修正, 适当背景压力和异相界面力, 使得计算全程粒子分布相对均匀, 改善了界面处的失稳现象, 防止了异相界面处粒子的非物理性穿透; 在此基础上, 利用方形流体团振荡模型对表面张力模型进行了验证, 数值结果与解析解甚为吻合; 然后采用上浮气泡经典数值算例对比研究了不同黏性力计算方法、不同核函数的适用性以及人工位移修正的效果; 最后, 对单个气泡的上浮、变形、撕裂以及垂向两个气泡的追赶、融合等现象进行了模拟, 初步揭示了气泡上浮过程中各种有趣物理现象的细节过程和动力学机理.

**关键词:** 多相流, 光滑粒子流体动力学, 表面张力, 上浮气泡

**PACS:** 47.11.-j, 47.61.Jd, 68.35.Ja, 78.20.Bh

**DOI:** 10.7498/aps.64.174701

## 1 引言

自由上浮气泡运动特性研究在海洋、能源、化学、医学等领域具有重要的科学和工程意义. 气泡在上浮过程中表现出许多复杂有趣的物理现象, 如上浮路径不稳定性<sup>[1]</sup>、形态变化<sup>[2]</sup>(如球形、椭球形、球帽形、椭球帽形、裙边形等)、融合<sup>[3]</sup>、撕裂<sup>[4]</sup>、排斥<sup>[5]</sup>等, 其中许多物理现象的细节过程及其力学机理尚未被完全揭示.

随着计算机技术的发展, 对上浮气泡的运动特性进行直接数值模拟已成为该项研究的主流手段, 但仍存在一些技术瓶颈未能得到完全解决, 主要在于气液交界面的捕捉, 以及界面撕裂和融合的处理. 研究者针对这些界面处理提出过多种数值方法, 其中最具代表性的有: 界面追踪 (interface tracking method, ITM) 法<sup>[6]</sup>、流体体积函数 (vol-

ume of fluid, VOF) 法<sup>[7,8]</sup>、水平集 (level set, LS) 法<sup>[9]</sup>、格子玻尔兹曼法 (lattice Boltzmann method, LBM)<sup>[5,10]</sup>、边界元法 (boundary element method, BEM)<sup>[11-13]</sup>等. 上述方法各有利弊, 其中 ITM 计算十分精确, 但是在发生界面撕裂或融合时需要进行复杂的网格重建, VOF 和 LS 依靠附加流体变量 (比热率、空隙度、质量分数等) 来区分气液相, 数值实现较为容易, 但是存在质量不守恒, 数值耗散等弊端. 相比而言, LBM 方法通过空间网格求解玻尔兹曼方程, 计算精度较高. LBM 的界面追踪原理与 VOF 和 LS 相似, 但在模拟多个气泡上浮时, 可能由于两个气泡之间的距离小于单元尺度, 而使气泡发生非物理性人工融合<sup>[8]</sup>. BEM 与前几种方法的原理不同, 它只将气泡表面进行离散, 维度降低一维, 因此计算效率高. BEM 便于施加无穷远边界条件, 模拟开阔边界下的气泡运动时无须将整个流

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51479041, 51179036) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [mingfuren@gmail.com](mailto:mingfuren@gmail.com)

体域进行离散, 因此效率高, 但是BEM考虑流体黏性效应和漩涡时存在困难, 对低雷诺数上浮气泡的模拟不适用. 另外, BEM的气泡表面由离散网格构成, 模拟气泡的撕裂或融合现象困难较多, 需要网格拓扑结构的重新生成<sup>[14]</sup>, 因此作者将目光转向无网格法.

近年来光滑粒子流体动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法在自由表面流动模拟中取得了较大进展, 能够模拟传统有网格算法较难处理的自由面翻卷破碎<sup>[15]</sup>、液舱晃荡<sup>[16]</sup>、流固耦合<sup>[17]</sup>等现象. 得益于其拉格朗日粒子特性, SPH方法在处理运动界面的撕裂和融合时具有先天优势<sup>[18]</sup>, 近年来逐渐在多相流模拟中受到青睐<sup>[19,20]</sup>, 因此不难联想到利用该方法对黏性液体中上浮气泡进行直接数值模拟<sup>[21,22]</sup>. 对于上浮气泡而言, 气液界面两侧存在较大的密度比和黏性比, 这两个比例参数对气液两相流的动力学特性存在重要影响<sup>[23]</sup>, 但是密度比太大使得模拟过程变得不稳定, 需要采用适当的数值处理技术<sup>[20,24]</sup>; 此外, 自由上浮气泡周围流场的雷诺数和邦德数量级均较小, 流体黏性力和表面张力对气泡运动特性的影响不可忽略, 因此需要在动量方程中添加精确的黏性力项和表面张力项; 在传统的自由表面流动模拟中, 为了避免出现局部粒子成对集聚现象而降低计算精度, 往往引入适当的人工黏性修正<sup>[15]</sup>, 但是在上浮气泡模拟中, 人工黏性的引入改变了雷诺数, 对上浮气泡运动特性影响很大, 因此本文引入人工位移修正技术解决此类问题<sup>[25]</sup>. SPH方法模拟上浮气泡的文献发表本身较少, 大多不考虑表面张力效应, 且只将上浮气泡的形态变化与实验进行简单的对比验证<sup>[15,20]</sup>. 文献<sup>[26]</sup>指出只验证气泡外形轮廓是不够的. 本文将描述气泡运动特性的具体物理参数 (如气泡位移, 上浮速度等) 随时间的变化曲线与其他数值结果或实验结果进行精细对比<sup>[26]</sup>, 以选择最优的数值模型和数值处理技术, 最大化地提高多相流SPH模型的精度.

本文的结构安排如下: 理论与数值模型部分首先基于虚功原理, 推导了多相流SPH控制方程, 随后简要介绍了黏性力、表面张力模型、人工位移修正技术、数值积分法、边界处理等; 数值结果与讨论部分首先采用方形流体团振荡模型检验了表面张力模型的精度, 随后利用上浮气泡经典算例对比研究了核函数的影响、人工位移修正技术的效果以及黏性力公式的选取, 接着分别模拟了高雷诺数下单

个气泡的上浮和撕裂过程及两个气泡的追赶、融合现象.

## 2 理论与数值模型

### 2.1 控制方程

本文采用拉格朗日形式的Navier-Stokes方程描述流体的运动, 质量守恒方程如下<sup>[19]</sup>:

$$D\rho/Dt + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

其中,  $\rho$  为流体微团的密度,  $\mathbf{u}$  为运动速度,  $t$  为时间,  $D$  表示物质导数. 流体微团在各向同性压力梯度  $\nabla p$ 、黏性力  $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 、重力  $\rho\mathbf{g}$ 、表面张力  $\mathbf{F}^S$  的共同作用下运动. 根据牛顿第二定律, 动量守恒方程如下<sup>[19]</sup>:

$$-\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho\mathbf{g} + \mathbf{F}^S = 0, \quad (2)$$

上式中,  $\mathbf{V}$  为流体应力张量中的黏性力部分,  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  的展开形式如下<sup>[27]</sup>:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = (\lambda + \eta)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \eta\nabla^2\mathbf{u}, \quad (3)$$

其中,  $\lambda$  为体积黏性系数,  $\eta$  为动力黏性系数, 一般取  $\lambda = -2\eta/3$ . 当流体被认为近似不可压, (3) 式右端第一项几乎为0, 因此常常被忽略, 可见于文献<sup>[19]</sup>. 根据连续表面张力 (continuum surface force, CSF) 模型<sup>[28]</sup>, 认为表面张力是体力, 表达式如下:

$$\mathbf{F}^S = -\beta\kappa\hat{\mathbf{n}}\delta \quad (4)$$

其中,  $\beta, \kappa, \hat{\mathbf{n}}$ , 分别表示表面张力系数, 异相界面曲率和界面的单位外法向,  $\delta$  是狄拉克函数, 表征表面张力在异相界面两侧的分布情况.

此时Navier-Stokes方程是非闭合的, 可将流体视为正压流体, 通过状态方程建立压力  $p$  和密度  $\rho$  之间的关系, 将质量守恒方程和动量守恒方程解耦. 本文采用的状态方程如下:

$$\begin{aligned} p_a &= p_0 \left[ \left( \frac{\rho_a}{\rho_0^a} \right)^{\gamma_a} - 1 \right] + p_{\text{background}}, \\ p_b &= p_0 \left[ \left( \frac{\rho_b}{\rho_0^b} \right)^{\gamma_b} - 1 \right] + p_{\text{background}}, \\ c_b &\geq 10u_{\text{max}}^b, p_{\text{background}} = 30c_b^2, \\ p_0 &= \frac{c_a^2\rho_0^a}{\gamma_a} = \frac{c_b^2\rho_0^b}{\gamma_b}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中, 标识a指代密度较小的流体相, 标识b指代密度较大的流体相,  $c_a$  和  $c_b$  表示两种流体的人工音速,  $\rho_0^a$  和  $\rho_0^b$  表示两种流体的参考密度, 即压力

为  $p_{\text{background}}$  时的密度,  $p_{\text{background}}$  为两种流体所处流场的背景压力. 对于流体相 b, 通过将  $c_b$  取为大于 b 流体中最大速度  $u_{\text{max}}^b$  的 10 倍, 将  $\rho_b$  的变化控制在 1% 以内, 一般取  $\gamma_b = 7$  [29]; 对于流体 a, 因为  $\rho_a$  的绝对值相比  $\rho_b$  较小, 需调节  $\gamma_a$  和  $c_a$  的大小, 将  $\rho_a$  的变化控制在合理范围内, 类似于文献 [15], 取  $\gamma_a = 1.4$ ,  $\gamma_b = 7$ , 接着通过 (5) 式中  $c_a^2 \rho_0^a / \gamma_a = c_b^2 \rho_0^b / \gamma_b$  即可确定出  $c_a$ . (5) 式中对两种流体的状态方程均引入背景压力  $p_{\text{background}}$ , 流场内压力差不变, 因此压力梯度不会改变,  $p_{\text{background}}$  对流场的流动特性不会产生明显影响, 而当将流场进行离散后, 背景压力  $p_{\text{background}}$  在数值计算的角度可带来巨大好处, 即可以改善低邦德数多相流中两相界面处的数值不稳定性, 原因有如下两点: 1) 当引入背景压力后, 粒子的加速度离散公式中会增加一项  $-\sum_j (V_i^2 + V_j^2) p_{\text{background}} \nabla_i W_{ij} / V_i$ , 当流场中粒子分布不均匀时, 该项绝对值不为零, 且方向指向粒子稀疏的方向 [30], 因此背景压力  $p_{\text{background}}$  的引入有助于使流场中粒子分布趋于均匀, 从而提高模拟精度; 2) 在两相界面处, 由于表面张力的存在, 容易使该处粒子产生负压, 负压易导致张力不稳定性现象 [31], 使得粒子成对集聚, 降低模拟精度甚至使模拟结果失真, 而引入背景压力后, 所有粒子的压力均提高  $p_{\text{background}}$ , 有利于防止出现负压. 值得一提的是过大的背景压力可能会对粒子的位置产生过量修正而削弱了真实压力梯度和黏性力的影响, 这相当于引入了额外的数值耗散, 因此本文只在邦德数较小情况下施加背景压力, 背景压力的大小推荐取为  $p_{\text{background}} = 30c_b^2$ .

## 2.2 多相流 SPH 方法的离散化控制方程

截至目前, 从发表的文献看, 适用于多相流模拟的 SPH 离散化控制方程有多种, 可见于文献 [15, 19, 20, 32]. 本文采用 Hu 等 [19] 提出的基于体积近似思想的 SPH 模型, 它所采用的插值函数为

$$\chi_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_j W_{ij}} = \frac{W_{ij}}{\sigma(\mathbf{r}_i)}, \quad (6)$$

其中,  $i$  为任意粒子编号,  $j$  为  $i$  粒子紧支域内的所有粒子编号,  $\mathbf{r}_i$  为粒子  $i$  的位置矢量,  $\sigma(\mathbf{r}_i) = \sum_j W_{ij}$ ,  $W_{ij} = W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$  为核函数, 核函数的选取直接影响到数值模拟精度、计算量以及稳定性, 其中精度与核函数的光滑性有关, 计算量主

要与核函数的截止半径有关, 稳定性主要与核函数二阶导数的正负有关, 详细参考文献 [33]. 在传统 SPH 中, 用的较多的是分段 3 次样条核函数. Jin 和 Ding [34] 对十余种核函数做了比较研究, 得出结论是 5 次样条核函数和高斯核函数无论在精度还是稳定性方面都表现最优. 由于这两种核函数的截止半径为 3 倍的光滑长度, 紧支域内粒子数较多, 因此离散误差较小. 本文于 3.2.1 节对比了三次样条核函数与高斯核函数的计算结果, 结论是高斯核函数结果精度较高, 故本文推荐采用改进后的高斯核函数如下 [35]:

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^2} \begin{cases} \frac{e^{-(r/h)^2} - C_0}{1 - C_1}, & r \leq 3h, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (7)$$

$$C_0 = e^{-9}; \quad C_1 = 10C_0,$$

其中,  $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , 表示质点  $\mathbf{r}_i$  和  $\mathbf{r}_j$  之间的距离,  $h$  为光滑长度,  $h = 1.23\Delta x$ ,  $\Delta x$  是初始粒子间距, 参数  $C_0$  和  $C_1$  的引入是为了保证改进高斯核函数的紧支性和归一性.

$\chi_{ij}$  又称为 Shepherd 核函数 [36], 在空间具有与 MLS 插值函数相似的分布, 能够精确满足归一性. 粒子  $i$  的体积  $V_i$  可由周围粒子  $j$  插值得出, 如下式所示:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle_i &= \sum_j \chi_{ij} V_j = \sum_j \frac{W_{ij}}{\sigma(\mathbf{r}_i)} V_j \\ &= \frac{\sum_j W_{ij} V_j}{\sigma(\mathbf{r}_i)} \approx \frac{1}{\sigma(\mathbf{r}_i)}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $\langle V \rangle_i$  表示  $V_i$  的估算值. 根据  $\rho_i = m_i / V_i$  得粒子密度的估算公式:

$$\langle \rho \rangle_i = m_i \sigma_i = m_i \sum_j W_{ij}, \quad (9)$$

其中由于粒子  $i$  的质量  $m_i$  在计算过程中始终保持不变, 因此系统总质量守恒. 根据能量守恒原理, 当连续介质内部产生一个虚位移  $\delta \mathbf{w}$ , 外力所做的功应该与内力功平衡 [27], 表达式如下:

$$\begin{aligned} &\overbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{w} dS - \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{w} dV}^{\delta W^E} \\ &= \overbrace{\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D}(\delta \mathbf{w}) dV}^{\delta W^I}, \end{aligned} \quad (10)$$

式中, 等号左侧  $\delta W^E$  表示外力功, 等号右侧  $\delta W^I$  表示内力功.  $\mathbf{T}$  是应力张量,  $\mathbf{D}$  为应变率张量,  $\rho \mathbf{F}$  为

体积力,  $\hat{\mathbf{n}}$  为边界单位法向,  $dS$  和  $dV$  分别表示面微元和体微元. 当只计各向同性压力时, 上式可简化如下:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\int_{\partial\Omega} (-p)\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{w}dS}^{\delta W_{\partial\Omega}^E} - \overbrace{\int_{\Omega} (-\nabla p) \cdot \delta\mathbf{w}dV}^{\delta W_{\Omega}^E} \\ &= \overbrace{\int_{\Omega} -p\nabla \cdot (\delta\mathbf{w})dV}^{\delta W_{\Omega}^I}. \end{aligned} \quad (11)$$

认为整个连续介质系统被固定边界所包围, 而在固定边界处虚位移  $\delta\mathbf{w} = 0$ , 因此 (11) 式中  $\delta W_{\partial\Omega}^E$  项为 0, 则 (11) 式可写成

$$\int_{\Omega} (\nabla p) \cdot \delta\mathbf{w}dV = \int_{\Omega} -p\nabla \cdot \delta\mathbf{w}dV. \quad (12)$$

或者也可写成离散形式:

$$\sum_i \langle \nabla p \rangle_i \cdot \delta\mathbf{w}_i V_i = \sum_i -p_i \langle \nabla \cdot \delta\mathbf{w} \rangle_i V_i, \quad (13)$$

式中,  $i$  取 1 到  $N$ ,  $N$  为粒子总数, 使用上式便可根据  $\nabla \cdot (\delta\mathbf{w})$  的离散形式推得相应的  $\nabla p$ , 反之亦然, 使整个系统满足能量守恒. 基于密度近似 (9) 式可推导  $\nabla \cdot (\delta\mathbf{w})$  的离散化公式, 详细推导过程参考附录 A, 最后  $\langle \nabla \cdot \delta\mathbf{w} \rangle_i$  的离散表达式如下:

$$\langle \nabla \cdot \delta\mathbf{w} \rangle_i = -V_i \sum_j (\delta\mathbf{w}_i - \delta\mathbf{w}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (13) 式展开得

$$\begin{aligned} & \sum_i \langle \nabla p \rangle_i \cdot \delta\mathbf{w}_i V_i \\ &= \sum_i \delta\mathbf{w}_i \cdot \sum_j p_i V_i^2 \nabla_i W_{ij} \\ & \quad - \sum_i p_i V_i^2 \sum_j \delta\mathbf{w}_j \cdot \nabla_i W_{ij}. \end{aligned} \quad (15)$$

根据核函数的对称性有  $\nabla_i W_{ij} = -\nabla_j W_{ij}$ , 交换 (15) 式右侧第二项的求和顺序如下:

$$\begin{aligned} & - \sum_i p_i V_i^2 \sum_j \delta\mathbf{w}_j \cdot \nabla_i W_{ij} \\ &= \sum_i p_i V_i^2 \sum_j \delta\mathbf{w}_j \cdot \nabla_j W_{ij} \\ &= \sum_i \delta\mathbf{w}_i \cdot \sum_j p_j V_j^2 \nabla_i W_{ij}. \end{aligned} \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (15) 式, 由于  $\delta\mathbf{w}_i$  的任意性可化简得

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{1}{V_i} \sum_j (p_i V_i^2 + p_j V_j^2) \nabla_i W_{ij}. \quad (17)$$

将 (17) 式代入动量守恒方程 (2) 得

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} &= \frac{1}{\rho_i} \left( -\frac{1}{V_i} \sum_j (p_i V_i^2 + p_j V_j^2) \nabla_i W_{ij} \right. \\ & \quad \left. + \langle \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle_i + \mathbf{F}_i^S \right) + \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (18)$$

### 2.3 黏性力

黏性力对上浮气泡的运动特性影响很大. 本文给出两种黏性力公式, 第一种由 Monaghan 和 Gingold [37] 给出, 该公式中粒子间作用力沿着粒子连线方向, 因此能同时保证线动量和角动量的守恒:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle_i &= \sum_j 2\xi \eta_{ij} \frac{(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \varepsilon h^2} \\ & \quad \times \nabla_i W_{ij} V_j, \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $\xi = d + 2$ ,  $d$  为维度.  $\varepsilon$  取 0.01, 用来防止两个粒子距离太近时分母接近 0. 当模拟多相流问题时, 在异相界面处动力黏性系数取  $\eta_{ij} = 2\eta_i \eta_j / (\eta_i + \eta_j)$ ,  $\eta_i$  和  $\eta_j$  分别为两种介质对应的动力黏性系数, 因此多相流黏性力表达式如下:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle_i &= \sum_j \xi \frac{4\eta_i \eta_j}{\eta_i + \eta_j} \frac{(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \varepsilon h^2} \\ & \quad \times \nabla_i W_{ij} V_j. \end{aligned} \quad (20)$$

另一种黏性力表达式由 Morris 等 [38] 提出, Hu 等将其扩展到多相流 [19], 得出与离散动量方程匹配的形式如下:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle_i &= \sum_j \frac{2\eta_i \eta_j}{\eta_i + \eta_j} (V_i^2 + V_j^2) \\ & \quad \times \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \varepsilon h^2} \frac{1}{V_i}. \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式的缺点是不能精确保证角动量守恒. 对速度场采用泰勒展开 [19], 可得 (20) 式收敛于  $\eta_{ij} [\nabla^2 \mathbf{u} + 2\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]$ , 而 (21) 式收敛于  $\eta_{ij} \nabla^2 \mathbf{u}$ , 可见当流场存在微弱的可压缩性时, (20) 式偏离牛顿流体黏性力的准确值  $\eta_{ij} [\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})/3]$  更多. 本文 3.2 节将采用经典的上浮气泡数值算例对 (20) 式和 (21) 式的模拟结果进行对比研究, 结论是 (21) 式的结果更准确, 因此在上浮气泡模拟中, 黏性力计算首选 (21) 式.

### 2.4 表面张力

由于多相流中不同介质之间范德华力的差异, 异相交界面存在表面张力. 上浮气泡的尺度较小,

为毫米级, 因此气泡表面的曲率很大, 表面张力不可忽略. 同时也正是由于表面张力的作用, 使得上浮气泡能够维持一定的终极形状<sup>[2]</sup>. 本文基于CSF表面张力模型<sup>[28]</sup>, 视表面张力为体积力, 采用(4)式进行计算. 表面张力施加如图1所示, 定义异相界面两侧 $3h$ 范围内为过渡区域, 过渡区域内存在张力, 以狄拉克函数 $\delta$ 为权重在界面两侧分布. 由于多相界面两侧流体密度的差异, 狄拉克函数 $\delta$ 应以介质密度为权重进行重新分配, 以确保界面满足连续性条件<sup>[39]</sup>. 界面的曲率可通过界面单位外法向 $\hat{\mathbf{n}}$ 的散度进行求解<sup>[28]</sup>. 为计算 $\hat{\mathbf{n}}$ , 首先定义异种流体的色标函数<sup>[39]</sup>, 对于已配对的粒子 $i$ 和粒子 $j$ , 色标函数定义如下式:

$$c_i^j = \begin{cases} \frac{2\rho_i}{\rho_i + \rho_j}, & \text{如果粒子 } j \text{ 与粒子 } i \text{ 异相,} \\ 0, & \text{如果粒子 } j \text{ 与粒子 } i \text{ 同相.} \end{cases} \quad (22)$$

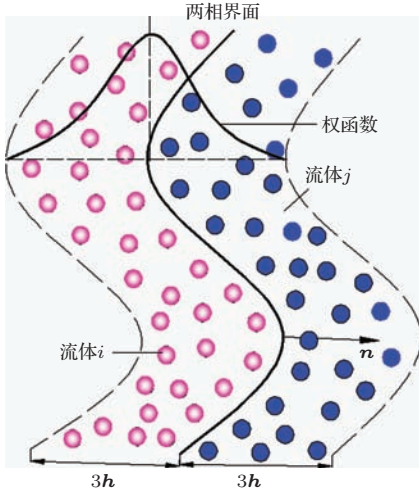


图1 (网刊彩色) 表面张力施加示意图

Fig. 1. (color online) Sketch of the implementation of surface tension force.

通过粒子的色标 $c_i^j$ 的梯度, 便可以得出界面处的外法向 $\mathbf{n}$ , 界面处单位外法向 $\hat{\mathbf{n}}$ 通过下式得出:

$$\langle \hat{\mathbf{n}} \rangle_i = \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|} = \frac{\nabla c_i}{|\nabla c_i|}, \quad (23)$$

其中求解 $\langle \nabla c \rangle_i$ 的SPH离散方程如下<sup>[19]</sup>:

$$\langle \nabla c \rangle_i = \frac{1}{V_i} \sum_j (V_i^2 + V_j^2) \frac{c_i^i + c_i^j}{2} \nabla_i W_{ij}. \quad (24)$$

$\langle \nabla c \rangle_i$ 的模可用于代替(4)式中的狄拉克函数 $\delta$ , 且能够确保气液交界面两侧粒子的加速度连续<sup>[39]</sup>, 因而保证了异相界面两侧的速度连续性. 由于在气液交界面两侧只有过渡区域内的粒子拥有单位外法向 $\hat{\mathbf{n}}$ , 为提高精度, 需要采用修正的散度计算公

式, 推导过程详见文献<sup>[18, 39]</sup>. 两相界面曲率的计算采用下式:

$$\langle \kappa \rangle_i = - \langle \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_i = - d \frac{\sum_j (\hat{\mathbf{n}}_i - \hat{\mathbf{n}}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j}{\sum_j |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| |\nabla_i W_{ij}| V_j}, \quad (25)$$

式中 $d$ 为维度, 将(23)式和(25)式代入(4)式便可得表面张力计算公式如下:

$$\mathbf{F}_i^S = \beta \langle \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_i \langle \nabla c \rangle_i. \quad (26)$$

为了防止异相界面处粒子的非物理性穿透, 与文献<sup>[29]</sup>相似, 在界面过渡区域施加了微弱的界面力 $\mathbf{F}^{\text{interface}}$ , 添加界面力后的动量方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = & \frac{1}{\rho_i} \left( - \frac{1}{V_i} \sum_j (p_i V_i^2 + p_j V_j^2) \nabla_i W_{ij} \right. \\ & \left. + \langle \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle_i + \mathbf{F}_i^S + \mathbf{F}_i^{\text{interface}} \right) + \mathbf{g}, \\ \mathbf{F}_i^{\text{interface}} = & - \frac{0.08}{V_i} \sum_j (|p_i| V_i^2 + |p_j| V_j^2) \\ & \times \nabla_i W_{ij}. \end{aligned} \quad (27)$$

界面力在界面两侧的过渡区域方向相反, 起到将两种介质隔离的作用. 3.1节将通过方形流体团振荡模型证明界面力的添加对表面张力模型计算精度的影响可忽略.

## 2.5 人工位移修正技术

流场内流体粒子的分布对模拟结果的精度有很大影响. 粒子分布越均匀, 精度越高<sup>[18]</sup>. 当模拟极高或者极低雷诺数的多相流问题时, 往往会出现高雷诺数下的粒子成对聚集或者低雷诺数下的粒子沿流线分布现象, 严重降低了模拟的精度, 甚至使计算失稳. 本节应用了一种粒子位移修正技术确保流场中粒子始终分布均匀<sup>[25]</sup>. 首先计算粒子与所有支持域内粒子 $j$ 的平均距离:

$$r_i^{\text{ave}} = \sum_j (r_{ij} / N_i), \quad (28)$$

式中,  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ ,  $N_i$ 为粒子紧支域内的粒子数量. 粒子 $i$ 的位移修正量如下:

$$\Delta \mathbf{r}_i = \omega \sum_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} (r_i^{\text{ave}})^2 u_{\text{max}} \Delta t, \quad (29)$$

其中,  $\omega$ 为可调参数, 在本文所有算例中,  $\omega = 0.01$ ,  $u_{\text{max}}$ 为流场中的最大速度,  $\Delta t$ 为时间步长.

### 2.6 数值积分和边界条件

由于本文的SPH模型是一种显式算法, 在时间域内向前积分推进时采用中点公式. 首先计算时间步长  $\Delta t$ , 由表面张力造成的时间步限制为<sup>[40]</sup>

$$\Delta t \leq \text{CFL}_{\text{st}} \min_i \left( \frac{\rho_i h^3}{2\pi\beta} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

由黏性耗散造成的时间步限制为<sup>[38]</sup>

$$\Delta t \leq \text{CFL}_{\eta} \min_i \left( \frac{\rho_i h^2}{\eta_i} \right). \quad (31)$$

由人工音速造成的时间步限制为<sup>[19]</sup>

$$\Delta t \leq \text{CFL}_c \min_i \left( \frac{h}{c_i + |\mathbf{u}_i|} \right). \quad (32)$$

(30), (31), (32) 式中, 系数  $\text{CFL}_{\text{st}} = 0.5$ ,  $\text{CFL}_{\eta} = 0.125$ ,  $\text{CFL}_c = 1.0$ . 时间步  $\Delta t$  取上述三式中最小值能够确保计算过程稳定和精确. 时间步  $\Delta t$  确定后, 首先进行一次最近粒子搜索, 计算  $\rho_1^0, D\mathbf{u}^0/Dt, \Delta\mathbf{r}^0$ , 则粒子的位置  $\mathbf{r}^0$ , 速度  $\mathbf{u}^0$  前进  $\Delta t/2$  后如下:

$$\mathbf{u}^{1/2} = \mathbf{u}^0 + \frac{1}{2} \frac{D\mathbf{u}^0}{Dt} \Delta t, \quad (33)$$

$$\mathbf{r}^{1/2} = \mathbf{r}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{1/2} \Delta t + \Delta\mathbf{r}^0. \quad (34)$$

再进行一次最近粒子搜索, 分别计算  $\rho^{1/2}, D\mathbf{u}^{1/2}/Dt, \Delta\mathbf{r}^{1/2}$ , 接着粒子速度和位置在  $\mathbf{u}^0$  和  $\mathbf{r}^0$  的基础上前进  $\Delta t$  如下:

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^0 + \frac{D\mathbf{u}^{1/2}}{Dt} \Delta t, \quad (35)$$

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}^0 + \mathbf{u}^1 \Delta t + \Delta\mathbf{r}^{1/2}. \quad (36)$$

$\Delta t$  时刻粒子位置  $\mathbf{r}^1$  和速度  $\mathbf{u}^1$  得出后, 进行一次最近粒子搜索, 计算  $\rho^1, D\mathbf{u}^1/Dt, \Delta\mathbf{r}^1$ . 此时的  $\rho^1, D\mathbf{u}^1/Dt, \Delta\mathbf{r}^1$  即为下一个时间步起始的  $\rho^0, D\mathbf{u}^0/Dt, \Delta\mathbf{r}^0$ .

本文数值算例的固壁边界都为规则矩形, 因此边界条件采用镜像虚粒子方法, 详细参考文献<sup>[15]</sup>. 本文的计算程序采用 Fortran 语言编写, 基于 OpenMP 并行架构在 Intel(R) Core(TM) i7-3770 处理器上进行 8 线程并行计算, 具体并行计算方法参考文献<sup>[41]</sup>.

## 3 数值结果与讨论

### 3.1 表面张力模型验证

对于小尺度的两相流, 界面处表面张力对流动特性的影响尤为显著. 类似于文献<sup>[39]</sup>, 如图 2 (a)

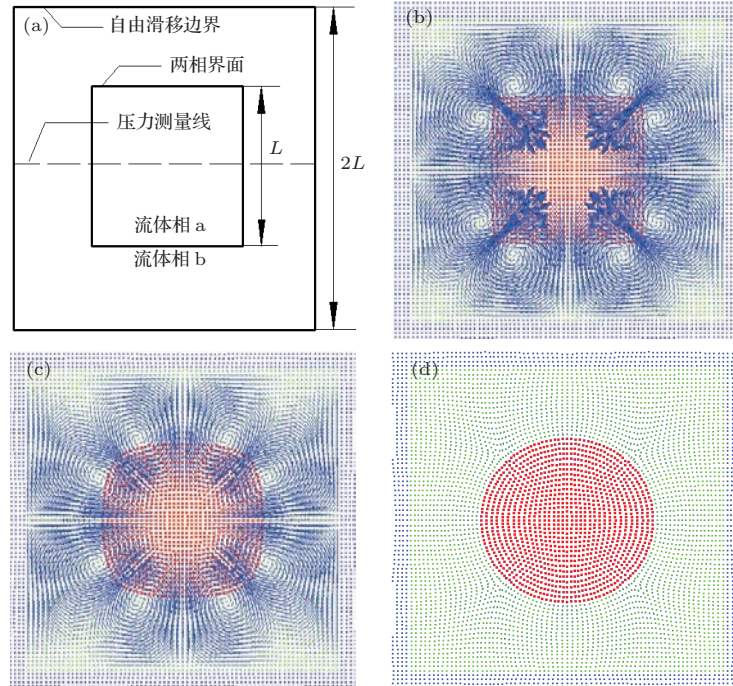


图 2 (网刊彩色) (a) 表面张力验证模型初始化简图; 不同时刻: (b)  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 0.058$ ; (c)  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 0.286$ ; (d)  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 1.0$  时, 流体团 a 的形状及周围流场速度矢量分布

Fig. 2. (color online) (a) The sketch of the initial condition for the surface tension validation model; the configuration of the oscillating fluid a and the velocity vectors inside the surrounding fluid b at different time: (b)  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 0.058$ ; (c)  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 0.286$ ; (d)  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 1.0$ .

所示, 本节研究了一块边长为  $L$  的正方形流体团 a, 由于表面张力的作用, 在另一种边长为  $2L$  的同密度同黏性流体 b 中振荡变形的过程. 通过测量由于表面张力导致的内外压力差, 与解析解作比较, 检验表面张力模型的精度以及相关数值技术对模拟结果的影响.

本节以正方形流体团 a 的初始边长  $L$ , 参考压力  $P_0 = 1 \text{ Pa}$  和流体 b 的密度  $\rho_b$  为特征物理量, 将其他物理参数无量纲化. 两种流体的密度比  $\rho_a/\rho_b = 1$ , 动力黏性系数比  $\eta_a/\eta_b = 1$ . 流体 b 的动力黏性系数设为  $\eta_b/(L\sqrt{\rho_b P_0}) = 0.5$ , 两相界面的表面张力系数设为  $\beta/(LP_0) = 1$ . 流体 b 的边界条件设为可滑移, 黏性力的计算采用 (21) 式, 数值计算中重力加速度设为 0. 根据 Laplace 定律, 流场达到稳定后, 内外压力差的解析解为  $(p_a - p_b)/P_0 = (\beta/R_L)/P_0 = \beta\sqrt{\pi}/(LP_0) = 1.772$ , 其中  $R_L$  为流体团 a 变圆后的半径. 图 2 (b)—(d) 给出了  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 0.058$ ,

$t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 0.286$ ,  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 1.0$  三个时刻, 流体团 a 的形状及周围流场的速度矢量分布. 当  $t\sqrt{P_0/\rho_b}/L = 1.0$  时, 流场中速度矢量趋于零, 流场几乎达到稳态, 流体团 a 在表面张力作用下趋近圆形.

为研究人工位移修正对表面张力模型计算结果的影响, 分别计算了施加和未施加人工位移修正的情况. 流场内压力云图如图 3 (a), (b) 所示, 可以看出施加位移修正后, 流体团 a 内的压力分布更加均匀, 而未施加位移修正的情况下, 在流体团 a 的 4 个角点处存在 4 个压力奇点. 这是由于不施加位移修正时, 流体团 a 变圆后 4 个角点处粒子十分拥挤, 导致密度近似不准确, 压力很大, 而位移修正项可在每个时间步对粒子进行均匀化调整, 避免出现局部粒子过密. 图 4 (a) 中给出了沿图 2 (a) 中虚线位置的相对压力  $(p - p_b^{\text{mean}})/P_0$  的分布, 其中  $p_b^{\text{mean}}$  为流体 b 中压力的平均值, 与稳态后的解析解作对比, 可见无论是否施加位移修正, SPH 模拟结果均

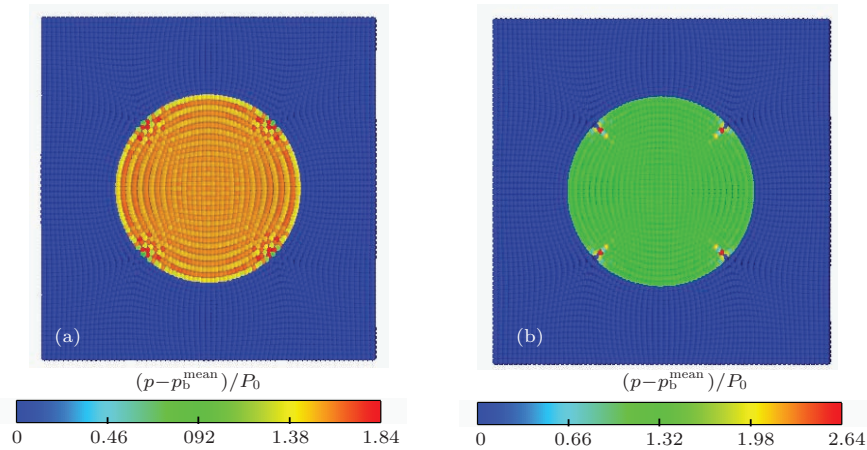


图 3 (网刊彩色) 使用 (a) 和未使用 (b) 人工位移修正流场内压力分布情况

Fig. 3. (color online) The pressure distribution in the flow field: (a) using the artificial displacement; (b) without using the artificial displacement.

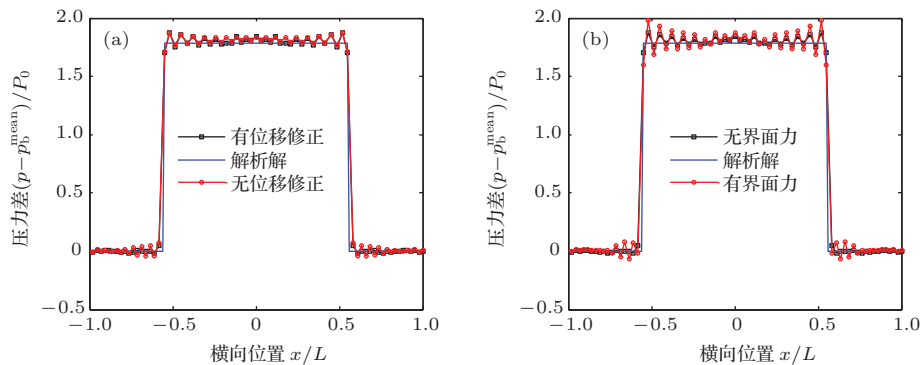


图 4 流场内压力值沿横向的分布 (a) 使用和未使用人工位移修正; (b) 使用和未使用界面力

Fig. 4. Pressure varies along the horizontal ordinate: (a) using and without using the artificial displacement; (b) using and without using the interface force.



与解析解符合良好, 证明人工位移修正的引入对表面张力模型的精度没有消极影响.

为探究界面力对表面张力模型计算精度的影响, 本节给出施加和未施加界面力情况下, 流场内压力沿横向的分布的情况, 如图 4(b) 所示, 可见施加界面力后, 在两相界面处产生了微弱的压力振荡, 但是振幅控制在 15% 以内, 总体的压力分布仍与解析解相符合, 界面力对表面张力的影响可忽略.

### 3.2 上浮气泡数值验证

对数值模型进行验证时, 单独将模拟结果的外形与实验结果或其他数值结果对比是不够的, 还需

要进行具体特征物理量的变化曲线的对比 [26]. 由于实验条件的不可控性, 以及实验数据测量的困难, 本节将 SPH 模拟结果与其他经典数值结果进行对比. 文献 [26] 中提供的两个初始静态二维气泡上浮的算例, 分别由三个不同的研究小组采用 Eulerian 算法, Lagrangian 算法以及 Lagrangian-Eulerian 算法给出了十分相近的结果, 本节采用 SPH 方法对此进行模拟. 气泡上浮的 SPH 初始模型见图 5, 物理参数见表 1, 其中雷诺数

$$Re = 2\rho_b R \sqrt{2gR}/\eta_b,$$

邦德数

$$Bo = 4g\rho_b R^2/\beta.$$

表 1 上浮气泡数值验证模型中的物理参数

Table 1. Physical parameters used in the numerical validation models for rising bubbles.

算例	$\rho_b/(\text{kg}/\text{m}^3)$	$\rho_a/(\text{kg}/\text{m}^3)$	$\eta_b/\text{Pa}\cdot\text{s}$	$\eta_a/\text{Pa}\cdot\text{s}$	$g/(\text{m}/\text{s}^2)$	$\beta/(\text{N}/\text{m})$	$Re$	$Bo$
1	1000	100	10	1	0.98	24.5	35	10
2	1000	1	10	0.1	0.98	1.96	35	125

#### 3.2.1 算例 1

对表 1 中的算例 1, 气泡半径  $R = 0.25 \text{ m}$ , 流体域高度  $H = 8R$ , 宽度  $W = 4R$ , 气泡中心距底面高度  $H' = 2R$ , 采用了  $75 \times 150$  个粒子进行模拟. 黏性力分别采用 Monaghan((20) 式) 和 Hu((21) 式) 的公式进行计算, 结果发现两者计算结果十分接近, 本节给出的是 Hu 黏性力公式的计算结果. 对比图 6(a), (b) 可以看出, 当不采用人工位移修正项时, 由于流场中黏性力较大, 流场内的粒子分布十分不均匀, 粒子趋于沿流线分布, 气泡表面十分不光滑, 采用人工位移修正后效果大为改善. 对比图 6(a), (c) 可以看出, 分段三次样条核函数的使用导致气泡粒子的分布出现成对集聚现象, 原因是三次样条核函数光滑性不好, 紧支域内近似粒子数量少, 精度不高, 计算易出现失稳. 图 7 中将 SPH 模拟结果与文献 [26] 中的基于最优网格的 FEM 结果进行对比, 可以看出无论是否施加位移修正, 气泡重心位置随时间的变化均与文献 [26] 结果十分符合, 但是当不施加人工位移修正时, 气泡的上浮速度存在明显振荡. 本文分析这是由于粒子分布不均匀导致了核近似精度降低引起的. 可见, 对于低雷

诺数 ( $Re = 35$ ) 的上浮气泡模拟, 人工位移修正是必不可少的, 核函数的选取亦十分关键, 改进高斯核函数的计算结果精度较高. 本算例中黏性力的差异体现得不明显, 请看算例 2.

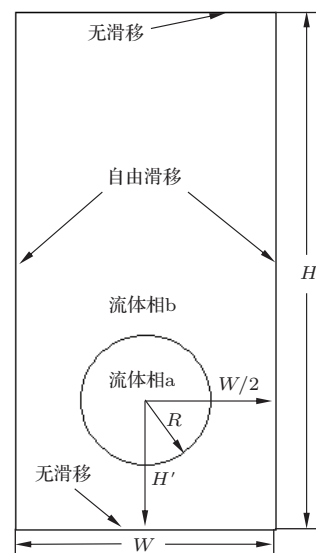


图 5 上浮气泡模拟初始化简图

Fig. 5. Sketch of the initial condition for the simulation of rising bubbles.

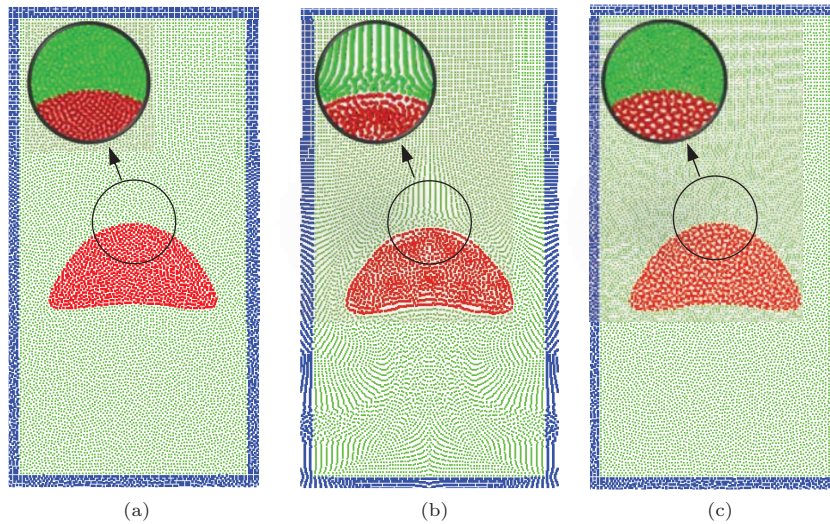


图6 (网刊彩色) 算例1中  $t = 1.8$  s时气泡形状及周围流场情况的对比 (a) 施加人工位移修正项, 采用改进高斯核函数; (b) 未施加人工位移修正, 采用改进高斯核函数; (c) 施加人工位移修正项, 采用分段三次样条核函数

Fig. 6. (color online) Comparisons between the bubble shapes and the surrounding flow field in case 1 : (a) applying the artificial displacement and using the improved Gaussian kernel; (b) without applying the artificial displacement and using the improved Gaussian kernel; (c) applying the artificial displacement and using the cubic spline kernel.

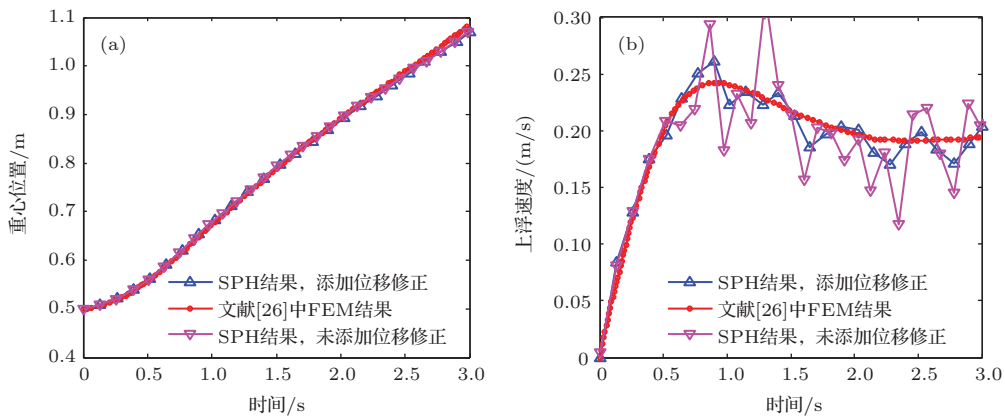


图7 (a) 算例1气泡重心位置随时间的变化曲线; (b) 算例1气泡上浮速度随时间的变化曲线

Fig. 7. (a) Time evolution of the gravity center of the bubble in case 1; (b) time evolution of the rising velocity of the bubble in case 1.

### 3.2.2 算例2

对表1中的算例2, 气泡半径  $R = 0.25$  m, 流体域高度  $H = 8R$ , 宽度  $W = 4R$ , 气泡中心距底面高度  $H' = 2R$ . 本节采用  $100 \times 200$  个粒子进行模拟, 黏性力分别采用 Monaghan 和 Hu 的公式进行计算, 计算中施加了位移修正项以确保粒子在流场内均匀分布. 当  $t = 3$  s时, 气泡形状如图8所示, 可以看出 Monaghan 黏性力计算结果中, 气泡下方几乎没有小气泡分离脱落, 这与文献[26]中的数值结果不相符合, 而 Hu 黏性力结果与文献[26]结果相似. 采用 Hu 黏性力计算的气泡形状与文献[26]中基于最优网格结果的对比如图9所示, 两者符合较好. 图10中将 SPH 结果与文献[26]中给出的气泡重心

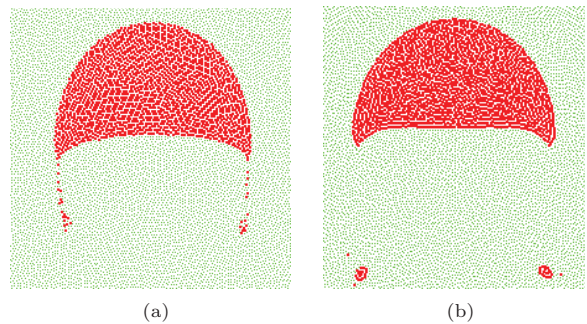


图8 (网刊彩色) 算例2中  $t = 3$  s时的气泡形状 (a) Monaghan 黏性力; (b) Hu 黏性力

Fig. 8. (color online) The bubble shape at  $t = 3$  s in case 2 : (a) using the viscous force of Monaghan; (b) using the viscous force of Hu.

和速度变化曲线进行对比,可以看出两种黏性力计算方法下,气泡重心位置均较为符合.对于气泡的上浮速度,两种黏性力结果均存在振荡,但是仔细观察图 10 (b)可以看出, Hu 的黏性力的计算结

果振荡更小,且变化趋势也与文献 [26] 结果更加符合.本节结果表明黏性力公式的选取对上浮气泡的模拟亦十分关键, Hu 的黏性力能给出更加准确的结果.

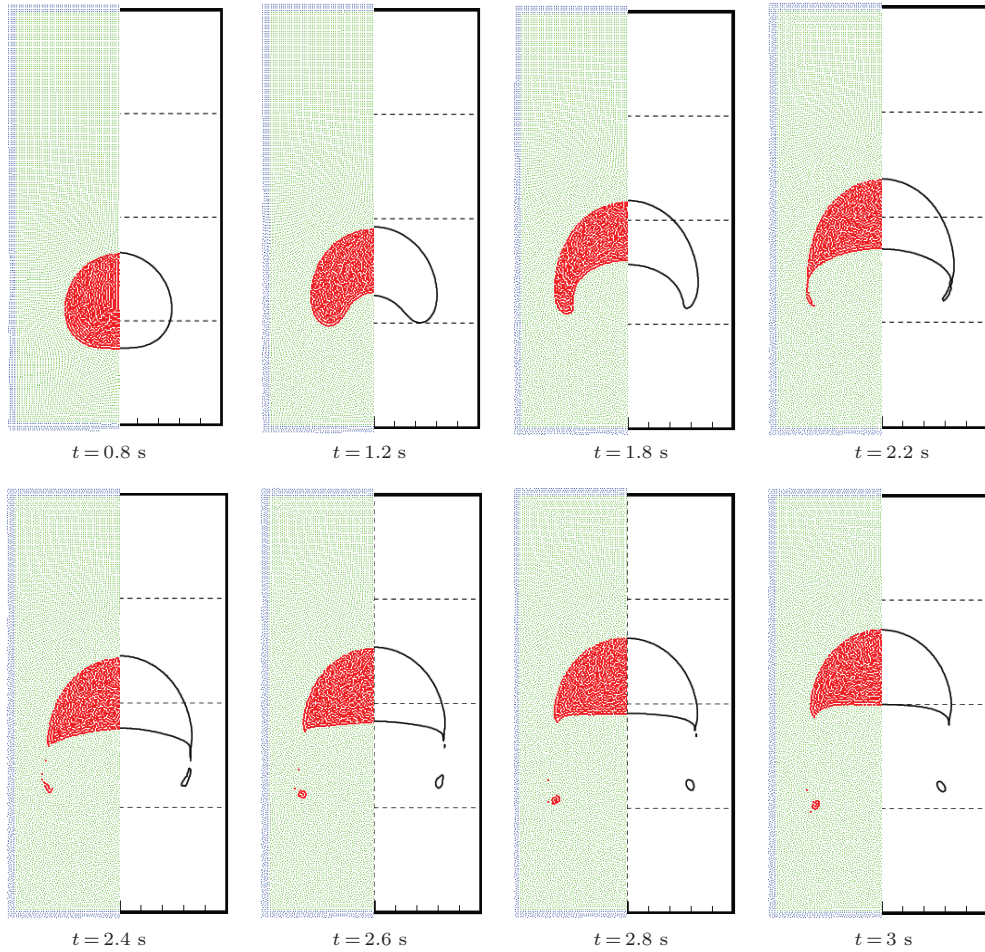


图 9 (网刊彩色) 不同时刻算例 2 气泡形状与 FEM 结果 [26] 的对比: 左侧为 SPH 结果; 右侧为 FEM 结果 [26]  
 Fig. 9. (color online) Comparisons between the SPH results (left) and the FEM results [26] (right) for the bubbles in case 2.

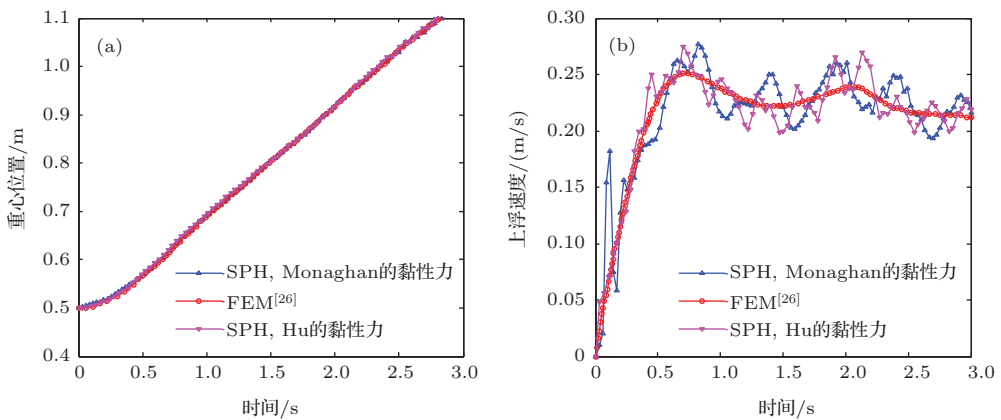


图 10 (a) 算例 2 气泡重心位置随时间的变化曲线; (b) 算例 2 气泡上浮速度随时间的变化曲线  
 Fig. 10. (a) Time evolution of the gravity center of the bubble in case 2; (b) time evolution of the rising velocity of the bubble in case 2.

### 3.3 单个气泡撕裂现象的SPH模拟

文献[4]对低黏性液体中气泡的初始运动展开过实验和理论研究, 研究对象为初始静止在纯水中的圆形二维气泡, 雷诺数  $Re = 35843$ , 与3.2节中  $Re = 35$  相比, 该算例的挑战在于流体的黏性力太小, 计算不稳定. 传统SPH方法模拟高雷诺数流动时均需要引入额外的人工黏性项来确保粒子分布均匀, 提高模拟精度和稳定性[15], 但是对于上浮气泡的模拟, 黏性力的改变对气泡上浮过程中形状变化和运动特性的影响很大, 详见文献[2].

本节采用水的真实动力黏性系数, 结合人工位移修正技术, 在不施加额外人工黏性的情况下,

模拟了文献[4]的实验条件. 流体域初始化设置与图5相似, 气泡半径  $R = 0.0254$  m, 流体域高度  $H = 12R$ , 宽度  $W = 10R$ , 气泡中心距底面高度  $H' = 4R$ , 采用  $200 \times 240$  个粒子进行计算, 黏性力采用Hu的公式, 水的动力黏度  $\eta_b = 0.001$  Pa·s, 水密度为  $\rho_b = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, 表面张力系数  $\beta = 0.0728$  N/m, 重力加速度  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>, 气液黏性比  $\eta_a/\eta_b = 0.0177$ , 密度比  $\rho_a/\rho_b = 0.001$ . 不同时刻气泡上浮的位置和形状如图11(a)–(f)所示, 可以看出, 无论是气泡上浮的高度还是气泡的形状, SPH模拟结果均与实验现象相似. 为更加清晰地将实验结果与数值结果进行对比, 图12(a),

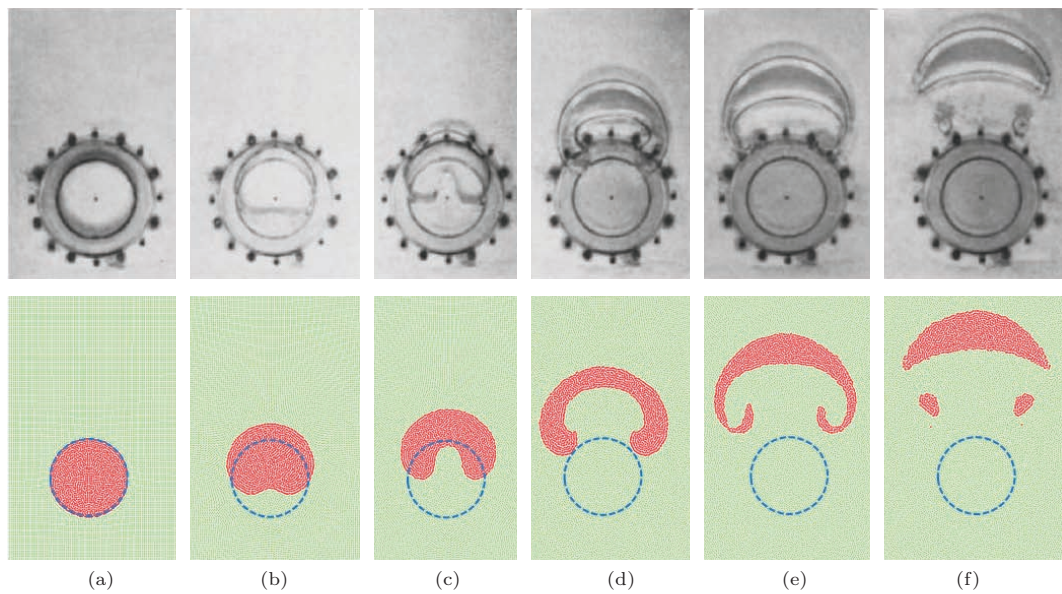


图11 (网刊彩色) (a)  $t = 0.0107$  s; (b)  $t = 0.0574$  s; (c)  $t = 0.0898$  s; (d)  $t = 0.1724$  s; (e)  $t = 0.2125$  s; (f)  $t = 0.2625$  s的气泡形状; 上方为实验结果[4]; 下方为SPH模拟结果

Fig. 11. (color online) The bubble shapes at different time: (a)  $t = 0.0107$  s; (b)  $t = 0.0574$  s; (c)  $t = 0.0898$  s; (d)  $t = 0.1724$  s; (e)  $t = 0.2125$  s; (f)  $t = 0.2625$  s; on the top are the experimental results[4] and on the bottom are the SPH results.

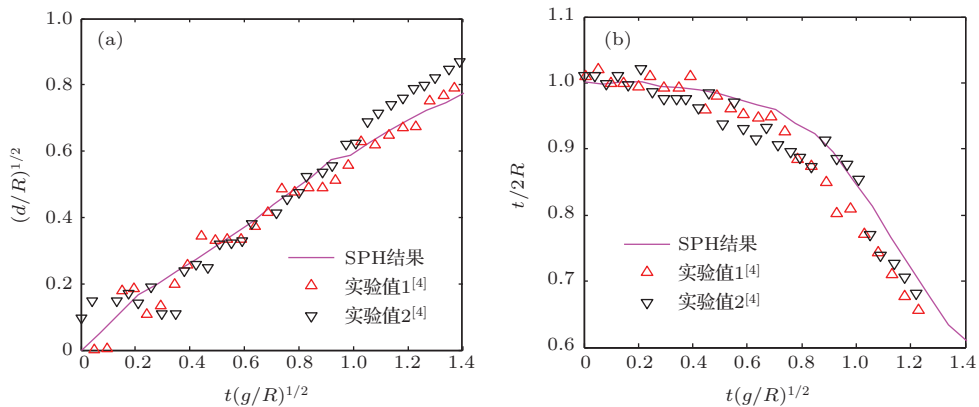


图12 (a) 气泡顶部位移随时间变化曲线; (b) 气泡对称轴处厚度随时间变化曲线

Fig. 12. (a) Time evolution of the position on the top of the bubble; (b) time evolution of the thickness at the axis of symmetry of the bubble.

图 12(b) 分别给出了气泡顶部位移和气泡对称轴处厚度随时间的变化曲线, 结果表明 SPH 方法给出的气泡上浮和变形情况与实验数据 [4] 符合良好, 可见人工位移修正技术的使用克服了传统 SPH 方法在模拟低黏性流动时遇到的粒子成对聚集现象, 给出了较为准确的结果.

3.2 和 3.3 节的模拟结果表明本文的多相流 SPH 模型不受雷诺数的限制, 对较低雷诺数 ( $Re = 35$ ) 和较高雷诺数 ( $Re = 35843$ ) 的气泡上浮现象均可进行准确模拟, 不仅物理现象相似, 且相关物理参数亦能符合较好.

### 3.4 两个气泡融合现象的 SPH 模拟

SPH 方法的拉格朗日特性使其具有模拟大变形和复杂边界的优势 [18], 而无需额外的数值处理

和人工干预. 本节充分利用 SPH 方法的这一优势模拟了纯水中同一垂线上两个气泡之间的追赶、融合现象 [42]. 流体域初始化简图与图 5 相似, 只是在图 5 中的气泡中心垂直向上距离  $y_s$  处增加一个同样尺度的气泡, 研究两个气泡的相互作用过程. 模型参数如下: 气泡半径  $R = 0.002$  m, 两气泡中心间距  $y_s = 0.005$  m, 流体域高度  $H = 20R$ , 宽度  $W = 10R$ , 下方气泡中心距底面高度  $H' = 0.007$  m, SPH 模拟采用  $200 \times 400$  个粒子, 黏性力采用 Hu 的计算公式, 水密度为  $\rho_b = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, 动力黏性系数  $\eta_b = 0.001$  Pa·s, 表面张力系数  $\beta = 0.0728$  N/m, 重力加速度  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>, 气液黏性比  $\eta_a/\eta_b = 0.0177$ , 气液密度比  $\rho_a/\rho_b = 0.001$ . 此时气泡的邦德数  $Bo = 4g\rho_b R^2/\beta = 2.15$ , 邦德数很小, 因此状态方程 (5) 中必须施加背景压力以确保水汽界面的稳定和光顺.

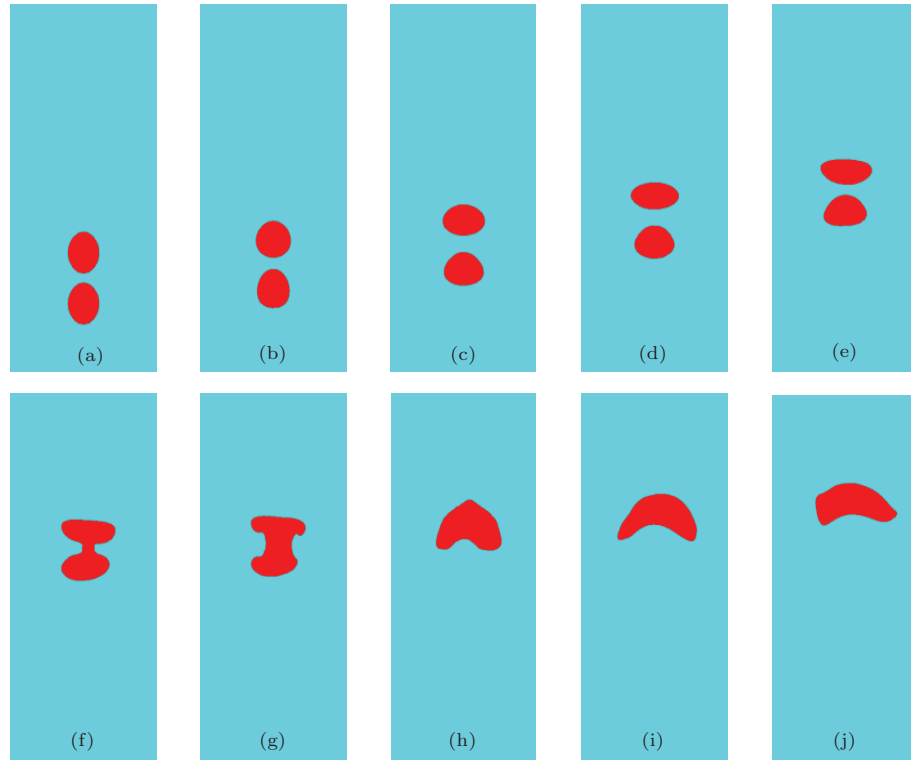


图 13 (网刊彩色) (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 14.4$  ms; (c)  $t = 28.8$  ms; (d)  $t = 43.2$  ms; (e)  $t = 57.6$  ms; (f)  $t = 72.1$  ms; (g)  $t = 72.1$  ms; (h)  $t = 83.2$  ms; (i)  $t = 91.2$  ms; (j)  $t = 103.2$  ms 时两气泡追赶和融合的模拟结果

Fig. 13. (color online) The numerical results of the bubble chasing and merging at different time: (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 14.4$  ms; (c)  $t = 28.8$  ms; (d)  $t = 43.2$  ms; (e)  $t = 57.6$  ms; (f)  $t = 72.1$  ms; (g)  $t = 72.1$  ms; (h)  $t = 83.2$  ms; (i)  $t = 91.2$  ms; (j)  $t = 103.2$  ms.

不同时刻两气泡的上浮状态如图 13 所示. 上浮过程中, 两个气泡在上下表面压力差和表面张力的共同作用下, 逐渐变成椭圆形, 如图 13(a)—(d) 所示. 值得注意的是, 上方的气泡由于上浮时液体

的阻力大而变得更加扁平, 下方的气泡的上表面由于受到上方的吸引而呈现出三角形, 如图 13(e) 所示. 随后下方的气泡逐渐追赶上方的气泡, 直到两个气泡相接触, 中间形成一个气体通道, 如图 13(f)

所示. 由于气体通道两侧的曲率很大, 表面张力起到将气体通道迅速扩张的作用, 如图 13(g) 所示, 再加上底部较大的水压力和流体惯性, 连通气泡的底部迅速产生向上的速度, 使两气泡迅速完成融合, 如图 13(h) 所示. 融合后的大气泡在周围复杂流场和表面张力的共同作用下逐渐变形, 上浮, 如图 13(i), (j) 所示. 由于融合后的气泡含气量是原先的两倍, 表面张力难以使保持气泡椭圆形, 气泡已成扁平状, 上浮阻力增大, 上浮速度减小. 从本节模拟结果可见, 采用 SPH 方法模拟两气泡的融合现象时无需任何人工干预, 这体现了拉格朗日算法处理大变形和动边界的优势.

## 4 结 论

本文基于改进高斯核函数构造的 Shepherd 插值函数, 利用虚功原理, 在前人研究成果的基础上, 发展了一套适用于具有大密度比和大黏性比界面的多相流 SPH 方法. 通过一系列数值模型, 定量研究了不同数值技术的效果和适用性, 总结了几个主要技术要点如下:

1) 采用人工位移修正项, 能有效解决传统 SPH 方法在模拟极高和极低雷诺数流动时普遍存在的粒子成对集聚或者沿流线分布现象.

2) 在表面张力模型中施加界面力能有效防止多相界面处粒子的非物理性穿透. 界面力对表面张力模型的精度影响很小, 可忽略.

3) Hu 的黏性力计算公式虽不能精确满足角动量守恒, 但是在模拟上浮气泡时给出的气泡形状, 物理参数变化更加准确. 当进行短时间的模拟时, 优先选用 Hu 的公式.

4) 改进的高斯核函数相比分段三次样条核函数, 由于支持域内粒子数多, 函数更加光滑而给出更加精确稳定的结果. 模拟多相流问题时, 优先选用改进高斯核函数.

5) 状态方程中背景压力项能够很好地改善低邦德数上浮气泡模拟时水气界面的不稳定性问题.

## 附录 A

为了推导  $\nabla \cdot (\delta w)$  的离散形式, 将 (9) 式两侧同时对时间  $t$  求导得<sup>[43]</sup>

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle_i = m_i \sum_j \frac{DW_{ij}}{Dt} \quad (\text{A1})$$

将核函数对时间求导有

$$\begin{aligned} \frac{DW_{ij}}{Dt} &= \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{Dr_{ij}}{Dt} \\ &= \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

根据核函数及其导数的定义有

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}. \quad (\text{A3})$$

将 (A3) 式变形后代入 (A2) 式得

$$\frac{DW_{ij}}{Dt} = (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (\text{A4})$$

将 (A4) 式代入 (A1) 式得

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle_i = m_i \sum_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (\text{A5})$$

将拉格朗日形式的质量守恒方程 (1) 代入 (A5) 式变换得

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i = -V_i \sum_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (\text{A6})$$

将 (A6) 中  $\mathbf{u}$  用  $\delta \mathbf{w}$  代替可得

$$\langle \nabla \cdot \delta \mathbf{w} \rangle_i = -V_i \sum_j (\delta w_i - \delta w_j) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (\text{A7})$$

感谢哈尔滨工程大学(境)外联合培养博士研究生项目、CNR-INSEAN 粒子法及其在海洋工程中的应用项目(批准号: No. 3263, 21 October 2014)对本文第一作者的资助.

## 参考文献

- [1] Shew W L, Pinton J F 2006 *J. Stat. Mech. -Theory E* **2006** 01
- [2] Zhang A M, Cui P, Cui J, Wang Q X 2015 *J. Fluid Mech.* **776** 137
- [3] Zhang A M, Sun P, Ming F 2015 *Comput. Method Appl. M.* **294** 189
- [4] Zhang A M, Li S, Cui J 2015 *Phys. Fluids* **27** 062102
- [5] Yu Z, Yang H, Fan L S 2011 *Chem. Eng. Sci.* **66** 3441
- [6] Hua J S, Stene J F, Lin P 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 3358
- [7] Wang H, Zhang Z Y, Yang Y M, Zhang H S 2010 *Chinese Phys. B* **19** 026801
- [8] Annaland M, Deen N G, Kuipers J A M 2005 *Chem. Eng. Sci.* **60** 2999
- [9] Croce R, Griebel M, Schweitzer M A 2010 *Int. J. Numer. Meth. Fl.* **62** 963
- [10] Mahdi D, Mohammad T R, Hamidreza M 2015 *Chinese Phys. B* **24** 024303
- [11] Zhang A M, Wang S P, Wu G X 2013 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **37** 1179
- [12] Zhang A M, Liu Y L 2015 *J. Comput. Phys.* **294** 208
- [13] Zhang A M, Wang S P, Huang C, Wang B 2013 *Eur. J. Mech. B-Fluid* **42** 69

- [14] Li S, Sun L Q, Zhang A M 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 184701 (in Chinese) [李帅, 孙龙泉, 张阿漫 2014 物理学报 **63** 184701]
- [15] Colagrossi A, Landrini M 2003 *J. Comput. Phys.* **191** 448
- [16] Chen Z, Zong Z, Li H T, Li J 2013 *Ocean Eng.* **59** 129
- [17] Sun P, Ming F, Zhang A 2015 *Ocean Eng.* **98** 32
- [18] Liu G R, Liu M B 2003 *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method* (Singapore: World Scientific)
- [19] Hu X Y, Adams N A 2006 *J. Comput. Phys.* **213** 844
- [20] Grenier N, Antuono M, Colagrossi A, Le Touzé D, Alessandrini B 2009 *J. Comput. Phys.* **228** 8380
- [21] Sun P, Ming F, Zhang A, Yao X 2014 *Proceedings of the 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering* San Francisco June 8–14 2014
- [22] Szwec K, Pozorski J, Minier J P 2013 *Int. J. Multiphas. Flow* **50** 98
- [23] Ji B, Luo X W, Wu Y L, Peng X X, Duan Y L 2013 *Int. J. Multiphas. Flow* **51** 33
- [24] Grenier N, Le Touzé D, Colagrossi A, Antuono M, Colicchio G 2013 *Ocean Eng.* **69** 88
- [25] Zainali A, Tofighi N, Shadloo M S, Yildiz M 2013 *Comput. Method Appl. M.* **254** 99
- [26] Hysing S, Turek S, Kuzmin D, Parolini N, Burman E, Ganesan S, Tobiska L 2009 *Int. J. Numer. Meth. Fl.* **60** 1259
- [27] Colagrossi A, Antuono M, Souto-Iglesias A, Le Touzé D 2011 *Phys. Rev. E* **84** 026705
- [28] Brackbill J U, Kothe D B, Zemach C 1992 *J. Comput. Phys.* **100** 335
- [29] Monaghan J J 1994 *J. Comput. Phys.* **110** 399
- [30] Colagrossi A, Bouscasse B, Antuono M, Marrone S 2012 *Comput. Phys. Commun.* **183** 1641
- [31] Marrone S, Colagrossi A, Antuono M, Colicchio G, Graziani G 2013 *J. Comput. Phys.* **245** 456
- [32] Chen Z, Zong Z, Liu M B, Zou L, Li H T, Shu C 2015 *J. Comput. Phys.* **283** 169
- [33] Yang X F, Liu M B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 224701 (in Chinese) [杨秀峰, 刘谋斌 2012 物理学报 **61** 224701]
- [34] Jin H B, Ding X 2005 *J. Comput. Phys.* **202** 699
- [35] Molteni D, Colagrossi A 2009 *Comput. Phys. Commun.* **180** 861
- [36] Shepard D 1968 *Proceedings of the 23rd ACM national conference: ACM* 517
- [37] Monaghan J, Gingold R 1983 *J. Comput. Phys.* **52** 374
- [38] Morris J P, Fox P J, Zhu Y 1997 *J. Comput. Phys.* **136** 214
- [39] Adami S, Hu X Y, Adams N A 2010 *J. Comput. Phys.* **229** 5011
- [40] Grenier N, Le Touzé D, Colagrossi A, Antuono M, Colicchio G 2013 *Ocean Eng.* **69** 88
- [41] Zhang A M, Cao X Y, Ming F R, Zhang Z F 2013 *Appl. Ocean Res.* **42** 24
- [42] Chen R, Tian W, Su G, Qiu S, Ishiwatari Y, Oka Y 2011 *Chem. Eng. Sci.* **66** 5055
- [43] Marrone S 2012 *Ph. D. Dissertation* (Rome: University Of Rome)

# Numerical simulation on the motion characteristics of freely rising bubbles using smoothed particle hydrodynamics method\*

Sun Peng-Nan<sup>1)2)</sup> Li Yun-Bo<sup>1)</sup> Ming Fu-Ren<sup>1)†</sup>

1) (College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

2) (CNR-INSEAN, Marine Technology Research Institute, Rome 00128, Italy)

( Received 9 December 2014; revised manuscript received 30 March 2015 )

## Abstract

Based on the principle of virtual works, a multiphase smoothed particle hydrodynamics (SPH) model is further developed from the foundation of Hu X Y et al. (2006) and Grenier N et al. (2009). In the present model, the surface tension force implementation suitable for the multiphase flows with a large density ratio is applied, and this allows a good continuity at the multiphase interface. Artificial displacement correction is applied to keep the particles distributing uniformly in the whole flow field, and therefore any artificial viscous term is never needed; this is very important in the numerical simulation of viscous flows since the introduction of artificial viscosity changes the Reynolds number. Background pressure and interface sharpness force are added in the equation of state and the equation of momentum respectively to ensure the multiphase interface stability and smoothness; this is essential in the simulation of multiphase flows with large density difference at the multiphase interface. Two types of viscosity expressions suitable for multiphase flows are introduced and analyzed; the conclusion is that the formula proposed by Morris et al. (1997) and its similarly derived forms can give more accurate results. In the numerical validations, an oscillating droplet test is applied first to confirm the accuracy of the surface tension model and good results are achieved. This demonstrates that the artificial displacement and the interface sharp force will make negligible effects to the surface tension implementation. After that, two classic quantitative benchmarks of rising bubbles are simulated and the results of SPH agree well with the reference data. Moreover, in the two numerical benchmarks, the effect of the artificial displacement, the choice of the viscosity expression, and the type of the kernel function are compared and finally an optimal combination of these numerical aspects is recommended. Based on the above numerical investigations, the splitting process of an initially circular bubble is simulated and the numerical results agree well with the experimental data. In the last numerical case, the process of chasing and merging between two rising bubbles in vertical direction is simulated, based on which the mechanisms of these interesting interactions between two rising bubbles are analyzed. It is demonstrated in the present work that further improved multiphase SPH model may provide a potential method for the research of bubble dynamics.

**Keywords:** multiphase flow, smoothed particle hydrodynamics, surface tension, rising bubble

**PACS:** 47.11.-j, 47.61.Jd, 68.35.Ja, 78.20.Bh

**DOI:** 10.7498/aps.64.174701

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51479041, 51179036).

† Corresponding author. E-mail: [mingfuren@gmail.com](mailto:mingfuren@gmail.com)