

平行电磁场中里德伯氢原子的自相似结构研究

李洪云 尹妍妍 王青 王立飞

Self-similarity of Rydberg hydrogen atom in parallel electric and magnetic fields

Li Hong-Yun Yin Yan-Yan Wang Qing Wang Li-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 180502 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.180502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.180502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种识别关联维数无标度区间的新方法

[A novel method to identify the scaling region of correlation dimension](#)

物理学报.2015, 64(13): 130504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130504>

海杂波 FRFT 域的分形特征分析及小目标检测方法

[Fractal property of sea clutter FRFT spectrum for small target detection](#)

物理学报.2015, 64(11): 110502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.110502>

基于多重分形去趋势波动分析法的交通流多重分形无标度区间自动识别方法

[Multi-fractal detrended fluctuation analysis algorithm based identification method of scale-less range for multi-fractal characteristics of traffic flow](#)

物理学报.2014, 63(20): 200504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200504>

基于小波 leaders 的海杂波时变奇异谱分布分析

[Time-varying singularity spectrum distribution of sea clutter based on wavelet leaders](#)

物理学报.2014, 63(15): 150503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.150503>

空间交替 Julia 集的反馈控制与线性广义同步

[Feedback control and linear generalized synchronization of spatial-alternated Julia sets](#)

物理学报.2014, 63(6): 060503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.060503>

平行电磁场中里德伯氢原子的自相似结构研究*

李洪云[†] 尹妍妍 王青 王立飞

(山东交通学院理学院, 济南 250357)

(2015年3月31日收到; 2015年5月8日收到修改稿)

利用半经典方法研究了平行电磁场中里德伯氢原子的分形自相似现象. 通过研究平行电磁场中里德伯氢原子的逃逸时间和初始出射角间的关系, 发现了逃逸时间图的分形自相似结构, 并通过研究与图中冰柱对应的逃逸轨道, 得到了自相似结构和逃逸轨道之间的关系, 发现了该类自相似逃逸轨道满足的规律. 进一步研究了标度能量和标度磁场对体系动力学的影响, 表明标度能量和标度磁场均控制体系的分形自相似结构. 当标度能量或标度磁场比较小时, 没有自相似现象, 随着标度能量或标度磁场的增大, 自相似出现, 体系变复杂.

关键词: 分形自相似, 平行电磁场, 里德伯氢原子, 逃逸轨道

PACS: 05.45.Df, 05.45.Pq, 05.45.Ac, 05.45.Mt

DOI: 10.7498/aps.64.180502

1 引言

随着激光技术的快速发展, 外场中里德伯原子体系的动力学行为得到了广泛研究^[1-6]. 1996年, Lankhuijzen 和 Noordam^[7] 通过实验研究发现了铷原子在强外电场中异常的自电离衰变规律. Robicheaux 和 Shaw^[8] 随即用量子方法计算并解释了该自电离现象. 2004年, Mitchell 等^[9,10] 采用半经典方法对里德伯氢原子在平行电磁场中的自电离衰变规律进行了研究. 2007年, Robicheaux 等^[11] 考虑干涉效应, 研究了氢原子在平行电磁场中的电离现象. 2009年, Wang 等^[12] 研究了磁场对平行电磁场中氢原子的电离影响. 迄今为止, 关于平行电磁场中逃逸时间图的分形自相似现象研究未见有报道. 本文应用半经典方法对平行电磁场中里德伯氢原子的逃逸时间和初始出射角间的关系以及逃逸轨道进行了研究, 发现了逃逸时间图的分形自相似现象, 并研究了自相似结构和逃逸轨道间的关系, 进一步研究了标度能量和标度磁场对体系自相似的影响.

2 理论与分析

2.1 里德伯氢原子在平行电磁场中的电离过程

置于平行电磁场中的氢原子受到激光照射跃迁到里德伯态, 电子吸收光子后会散射, 向各个方向发射电子波, 在原子核附近区域, 电子主要受库仑势的影响, 外加电磁场的影响可忽略不计, 电子以近似零能库仑散射波的形式向外传播; 当远离原子核后, 电子受到外加电磁场和库仑力的共同作用, 电子波沿经典轨道传播, 从某些角度出射的电子波可能返回原子核附近, 形成闭合轨道, 而部分电子波可能会逃逸, 远离原子核, 形成逃逸轨道. 逃逸轨道的形成和电子的初始出射角有关, 也和被激发电子的状态、外加电磁场的大小等因素有关.

2.2 哈密顿量及标度变换

假设电场、磁场方向均沿 z 轴, 平行电磁场中的氢原子的哈密顿量在柱坐标下可以写为(原子

* 国家自然科学基金专项基金(批准号: 11347156)和山东交通学院博士基金资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: li5776@163.com

单位)

$$H = \frac{1}{2} \left(P_\rho^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2} P_z^2 - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\gamma}{2} L_z + \frac{1}{8} \gamma^2 \rho^2 + fz, \quad (1)$$

其中 f, γ 分别为原子单位下的电场强度与磁场强度; 式中第一项为 ρ 方向的平动动能和转动动能, 第二项为 z 轴方向的平动动能, 第三项为库仑势能项, 第四项为顺磁项, 第五项为抗磁项, 第六项为电场能. 由于柱对称性, L_z 为常数, 故可取 $L_z = 0$, 则哈密顿量变为

$$H = \frac{1}{2} (P_\rho^2 + P_z^2) - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{1}{8} \gamma^2 \rho^2 + fz. \quad (2)$$

为了便于经典和量子的对应, 将上述各量进行标度变换^[13], $\tilde{P} = P f^{-1/4}$, $\tilde{r} = r f^{1/2}$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon f^{-1/2}$, $\tilde{B} = \gamma f^{-3/4}$, $\tilde{t} = t f^{3/4}$, 变换后的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H f^{-1/2} = \varepsilon \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{P}_\rho^2 + \tilde{P}_z^2) - \frac{1}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{1/2}} + \frac{1}{8} \tilde{\rho}^2 \tilde{B}^2 \\ &\quad + \tilde{z}. \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式进行半抛物坐标变换^[14], $u = (\hat{r} + \hat{z})^{1/2}$, $v = (\hat{r} - \hat{z})^{1/2}$, $\hat{z} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $\hat{\rho} = uv$, $p_u = \hat{p}_\rho v + \hat{p}_z u$, $p_v = \hat{p}_\rho u - \hat{p}_z v$, $\frac{d\hat{t}}{d\tau} = u^2 + v^2$, 并引入有效哈密顿量 $\tilde{h} = 2\tilde{r}(h - \varepsilon)$, 则(3)式哈密顿量变为

$$\begin{aligned} h(u, v, p_u, p_v) &= \frac{1}{2} (p_u^2 + p_v^2) - \varepsilon (u^2 + v^2) + \frac{1}{2} (u^4 - v^4) \\ &\quad + \frac{1}{8} B^2 (u^4 v^2 + u^2 v^4) - 2. \end{aligned} \quad (4)$$

由(4)式可以看出, 经过上述变换后, 库仑奇异性消失, 且体系的动力学性质与标度能量 ε 和标度磁场 B 有关.

3 里德伯氢原子的自相似结构分析

3.1 标度能量 $\varepsilon = -1.3$ 、标度磁场 $B = 4.5$ 时的自相似分析

由于电磁场的方向沿 z 轴, 电子会沿 $-z$ 轴逃逸, 故将探测器置于 $\tilde{z} = -4$ 处^[9], 电子最初被限

制在库仑势阱中, 在势阱内混沌振荡, 最终穿过鞍点, 成为逃逸轨道. 电子出射的初始出射角不同, 逃逸轨道不同, 逃逸时间也不同, 将初始出射角和相应的逃逸时间相对应, 得到逃逸时间关系图, 图像上的每一个点对应着一条逃逸轨道. 图 1(a) 给出了平行电磁场中标度能量 $\varepsilon = -1.3$ 、标度磁场 $B = 4.5$ 时的逃逸时间关系图, 横轴为初始出射角 θ , 纵轴为标度时间 T . 从图 1(a) 中可以看出, 除最右侧曲线外, 图形由一个个“冰柱”组成. 最右侧的曲线对应着直接轨道, 直接轨道是指沿电场的反方向直接撞击探测器的逃逸轨道, 直接轨道的逃逸时

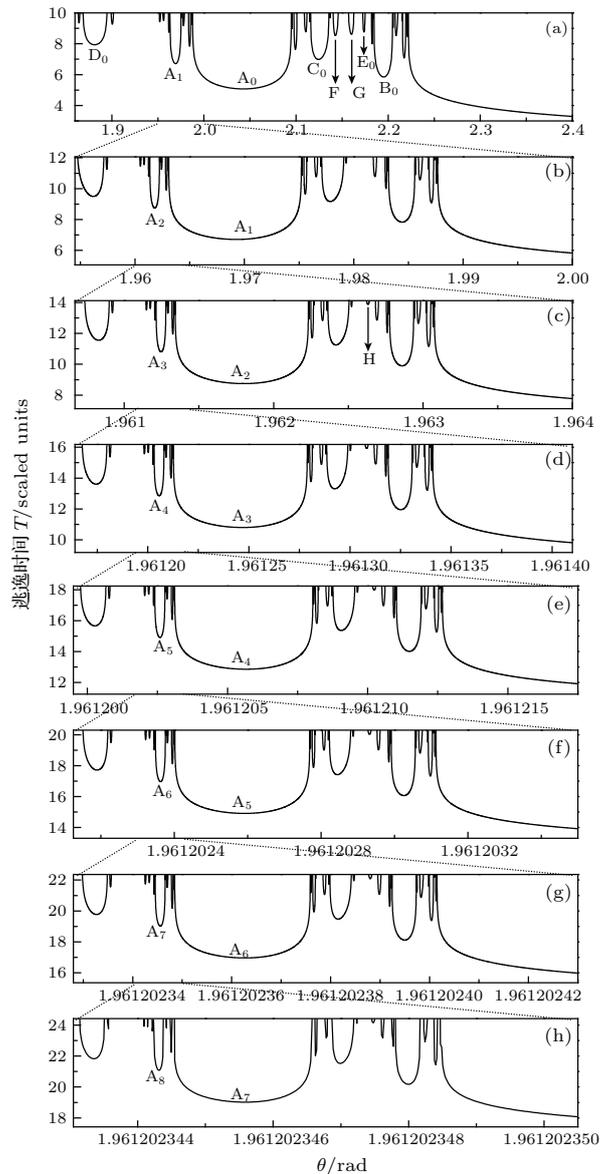


图 1 平行电磁场中里德伯氢原子在标度能量 $\varepsilon = -1.3$ 、标度磁场 $B = 4.5$ 时的自相似结构

Fig. 1. The self-similarity of Rydberg hydrogen atom in the parallel electric and magnetic fields with $\varepsilon = -1.3$, $B = 4.5$.

间在 $\theta = \pi$ rad 时最短, 其直接垂直撞击探测器, 无任何弯曲, 该时间称为最短逃逸时间, 而随着初始出射角的减小逃逸时间增大, 这是因为电子在鞍点附近会发生振荡从而使逃逸时间变长. 对应其他冰柱的逃逸轨道会在电磁场和库仑场的共同作用下发生回旋然后撞击探测器, 故逃逸时间相较于最短逃逸时间变长. 每个冰柱的中间逃逸时间最短, 左右两侧逃逸时间逐渐变大, 直至变为无穷大, 也是因为电子在鞍点附近发生振荡的缘故. 取每一个冰柱逃逸时间最短时对应的逃逸轨道来表示该冰柱的逃逸轨道. 遵循 Mitchell 和 Delos^[15] 的命名方式, 每个冰柱的逃逸轨道可以用 $-o$ 形式来命名.

平行电磁场中的里德伯电子动力学行为具有混沌性质, 混沌动力学的标志为分形结构, 通过分析可得到该体系的自相似结构, 如图 1 所示. 图 1(a) 为体系的整体图, 通过分析将角度放大发现区间内存在自相似现象, 如图 1(b) 所示, 然后依次可寻找下一级的自相似结构. 从图 1(b) 中可以看出, 该体系具有很强的自相似结构, 除整体图 (图 1(a)) 最宽的冰柱比例较小外, 其余部分都非常相似, 各级逃逸图按区域放大后和上一级基本一致, 每一级都是上一级的局部放大, 由于计算精度有限, 图中只列出前七级自相似. 仔细观察每一级自相似, 可发现有少许异常, 如图 1(a) 中标注的 F 和 G 冰柱, 在下面的自相似结构中消失, 而在第二级自相似图 1(c) 中原本出现 G 的地方出现了一个小冰柱 H; 而图 1(a) 中最左侧的冰柱一直没有相对应的自相似冰柱.

3.2 标度能量 $\varepsilon = -1.3$ 、标度磁场 $B = 4.5$ 时的自相似与逃逸轨道间的关系

由图 1 可以看出体系的自相似结构, 下面分析自相似与逃逸轨道间的关系. 取图 1 中各级自相似图最宽的冰柱为该级的“第一冰柱”, 即图 1 中分别标示的 A_0 — A_7 , 分别给出 A_0 — A_7 的逃逸轨道图, 如图 2 所示, 横坐标为 ρ 轴, 纵坐标为 z 轴. 从图中可以看出, A_0 — A_7 形式上非常相似, 轨道图随着自相似等级增大逐渐复杂化, 仔细分析可以看出规律性, 即下一级分别比上一级多回旋一次, 又多穿过负 z 轴一次. 根据 $-o$ 形式的命名方式^[15], 将各轨道分别命名并标示于每个图形的右上方, 发现各轨道之间均为 $-o$ 迭代的关系. 不仅该冰柱具有 $-o$ 迭代的关系, 通过分析其他相对应的冰柱的逃逸

轨道, 发现均有相同的规律, 例如图 1(a) 中的 B_0 , 其轨道命名为 $--o$, 而其相对应的自相似轨道分别为 $--o$ 前面多 $-o$, 即该类的轨道自相似满足 $(-o)^k --o$ 的形式, 其中 k 为整数, 表示第 k 级自相似等级. 同理, 图中的 C_0 类对应的轨道自相似满足 $(-o)^k --oo$ 的形式, D_0 类对应的轨道自相似满足 $(-o)^k -oo-o$ 的形式, E_0 类对应的轨道自相似满足 $(-o)^k --oo-o$ 的形式. 如前所述, 自相似对应的中心轨道也有些许的异常, 例如图 1(a) 中的 $F(--oo-o)$ 冰柱和 $G(--oo-o)$ 冰柱均没有相对应的自相似冰柱, 虽然在第二级相似后 G 冰柱相对应的位置出现了冰柱 H, 但通过分析发现 H 的中心轨道与 G 不相似, 其形式为 $-o--oo--o$, 而其后续各级自相似中出现的冰柱均为 $-o--oo--o$ 形式的自相似. Mitchell 等^[9] 在研究该体系韵律自相似时也发现了该轨道的异常. 总之, 根据自相似中相对应逃逸轨道图可以得到自相似形式, 可进一步研究该体系下其他标度能量、标度磁场时的分形自相似结构.

3.3 不同标度能量时的动力学分析

图 3 给出了标度磁场 $B = 4.5$ 时不同标度能量下的逃逸时间图, 可以看出, 不同标度能量下的逃逸时间图明显不同, 随着标度能量的减小, 体系越来越简单, 可以说标度能量控制着体系的动力学性质. 标度能量越大, 根据 $\varepsilon = Ef^{-2}$ 可知, 要么电子能量越大, 则主量子数越大, 电子越不稳定, 电子越容易被电离; 要么电场越小, 电场力不足以将电子直接电离, 在电磁场共同作用下, 会发生回旋, 故逃逸时间图越复杂. 根据前面得到的轨道和自相似之间的规律, 研究了不同标度能量下标度磁场 $B = 4.5$ 时的自相似现象, 发现并不是所有的情况下都会出现自相似情形. 图 3(a)—(d) 中的 A_0 均为 $-o$ 形式, 而随着标度能量的减小, A_0 轨道不存在, 即图 3(e)—(h) 中没有 $-o$ 形式的轨道, 故图 3(a)—(d) 具有自相似现象, 图中的水平虚线表示该标度能量下的自相似区域; 而图 3(e)—(h) 没有自相似现象, 是因为标度能量变小, 体系越来越规则, 没有分形现象. 从图 3(a)—(d) 可知, 自相似区域随着标度能量的减小, 逐渐向大角度偏离, 从开始时图 3(a) 的 (1.901—1.951) 区间到图 3(d) 的 (2.082—2.142) 区间. 总之, 标度能量 $\varepsilon > -1.6$ 后, 具有自相似结构, 混沌现象出现, $\varepsilon < -1.6$ 时无该类

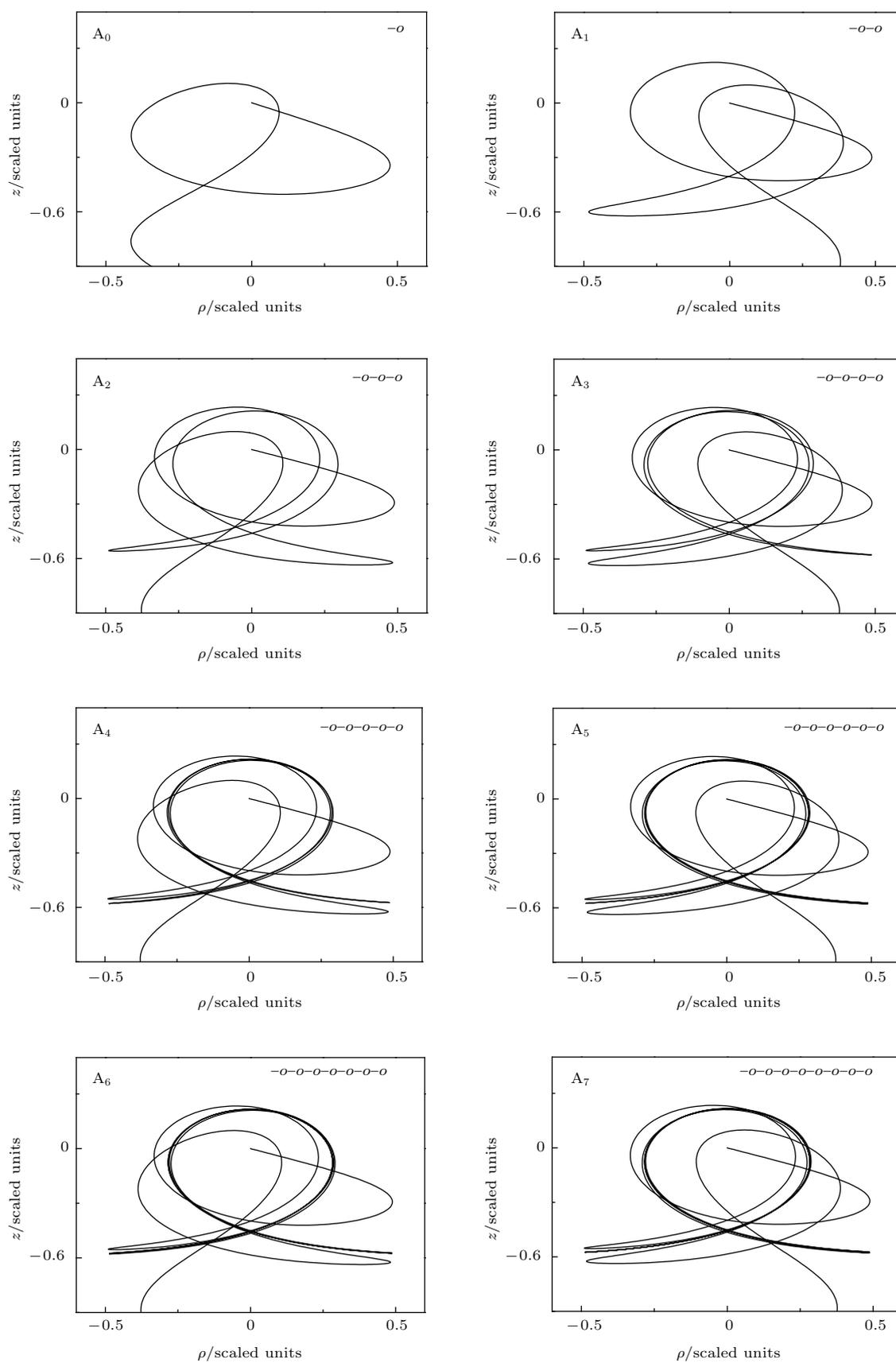


图2 图1中的“第一冰柱”对应的逃逸轨道图

Fig. 2. The escape orbits of every “first icicle” in Fig. 1.

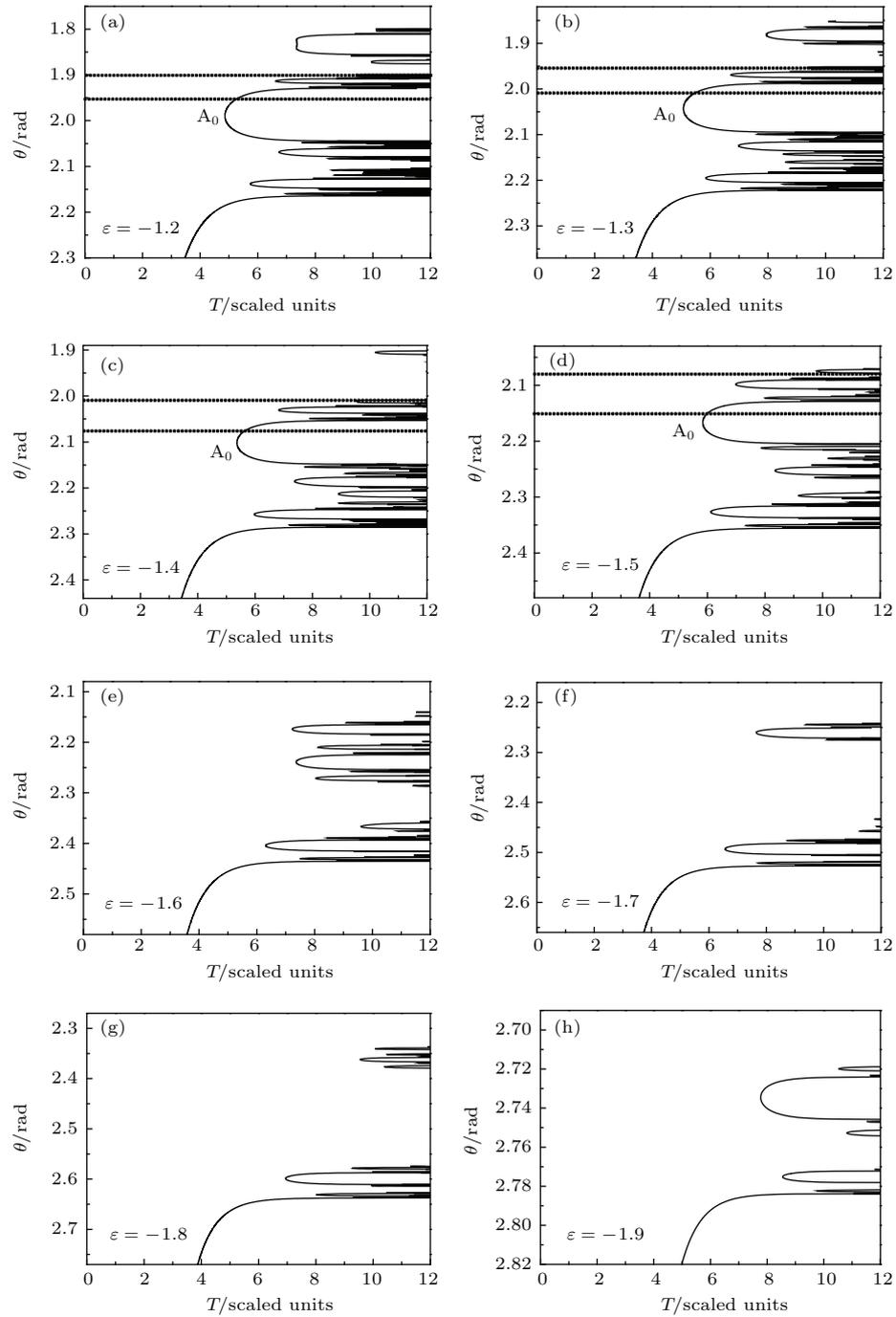


图3 里德伯氢原子在 $B = 4.5$ 、不同标度能量时的逃逸时间图 (a) $\varepsilon = -1.2$; (b) $\varepsilon = -1.3$; (c) $\varepsilon = -1.4$; (d) $\varepsilon = -1.5$; (e) $\varepsilon = -1.6$; (f) $\varepsilon = -1.7$; (g) $\varepsilon = -1.8$; (h) $\varepsilon = -1.9$

Fig. 3. The escape-time plot of Rydberg hydrogen atom with $B = 4.5$ and different scaled energy: (a) $\varepsilon = -1.2$; (b) $\varepsilon = -1.3$; (c) $\varepsilon = -1.4$; (d) $\varepsilon = -1.5$; (e) $\varepsilon = -1.6$; (f) $\varepsilon = -1.7$; (g) $\varepsilon = -1.8$; (h) $\varepsilon = -1.9$.

自相似结构, 说明标度能量控制着体系的混沌性质, 标度能量越大, 体系越混沌, 标度能量越小, 体系越有规律.

3.4 不同标度磁场时的动力学分析

根据哈密顿方程, 固定标度能量, 通过变化磁场可以探究磁场对体系动力学性质的影响. 图4给

出了固定标度能量为 $\varepsilon = -1.5$, 标度磁场分别为 1.5, 3.0, 4.5, 6.0 时的逃逸时间图. 为了便于比较, 图3各图中的坐标区间均一致, 即角度区间均为 1.85—2.70 rad, 标度逃逸时间均为 0—12 之间. 无磁场情况时, 外加只有电场, 此时的体系是可积的, 逃逸时间图单纯地由直接逃逸轨道组成, 为一简单的曲线^[9]. 而外加磁场后, 从图4可以看出, 随着标

度磁场的增大, 简单曲线上部出现了小的冰柱, 逃逸轨道不再直接电离, 而会发生回旋. 随着标度磁场的增大, 冰柱的数量逐渐增多, 而且各个冰柱最短的逃逸时间逐渐减小, 直接轨道的角度范围也逐渐减小. 这是因为电子受到电场、磁场以及库仑场的共同作用, 电子受电场的作用向下运动, 而库仑吸引力和磁场的作用使其向原子核方向运动. 当磁场相对较小时, 电子受到的回旋作用较小, 使得直接轨道在大角度范围内不能再次回到核附近而是直接电离. 当磁场增强时, 电子受到的回旋作用增大, 故最早达到探测器上的直接轨道的逃逸时间逐渐增大, 而且由于回旋运动增加了电子的复杂运

动, 则相应的逃逸时间图也越来越复杂, 体系的混沌现象越来越明显.

通过分析冰柱的逃逸轨道, 研究了体系的自相似规律, 发现刚开始磁场较小时, 图 4(a) 和图 4(b) 中没有 $-o$ 形式的逃逸轨道, 故没有自相似行为. 随着标度磁场的增大, 图 4(c) 和图 4(d) 中出现 $-o$ 形式的逃逸轨道, 即标示的 A_0 , 说明混沌现象产生, 分形自相似结构出现; 图 4(c) 和图 4(d) 中的虚线部分为自相似区域, 可以看出, 随着标度磁场的增大, 自相似区域位置发生变化, 区域逐渐向大角度偏移.

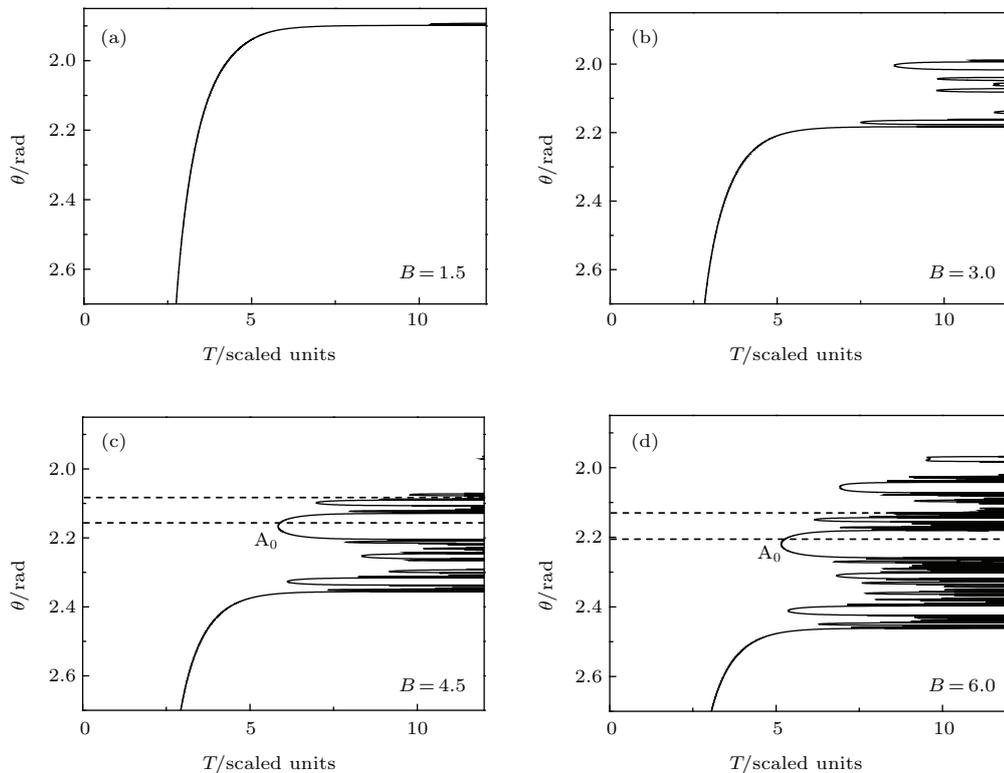


图 4 里德伯氢原子在标度能量 $\epsilon = -1.5$ 、不同标度磁场时的逃逸时间图 (a) $B = 1.5$; (b) $B = 3.0$; (c) $B = 4.5$; (d) $B = 6.0$

Fig. 4. The escape-time plot of Rydberg hydrogen atom with $\epsilon = -1.5$ and different scaled magnetic field strength: (a) $B = 1.5$; (b) $B = 3.0$; (c) $B = 4.5$; (d) $B = 6.0$.

4 结 论

由于平行电磁场以及氢原子核对里德伯电子的影响, 电子在一定条件下会发生逃逸, 本文主要研究了平行电磁场中里德伯氢原子自电离的自相似行为. 通过分析逃逸时间图, 得到分形自相似现象. 通过分析自相似图形中相对应的逃逸轨道之间

的关系, 得到了自相似对应轨道之间满足 $(-o)^k$ 的规律, 由该规律可以得到不同磁场、标度能量时的类似自相似结构. 通过研究不同标度能量和不同标度磁场时的逃逸时间图, 分析了标度磁场、标度能量对体系动力学性质的影响, 发现标度磁场和标度能量控制着体系的混沌性质、分形自相似行为. 根据逃逸轨道图寻找自相似的方法可以应用到其他体系, 进而研究其他体系的分形行为.

参考文献

- [1] Paradis E, Zigo S, Raithel G 2013 *Phys. Rev. A* **87** 012505
- [2] Wang D H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 13403
- [3] Wang L, Quan W, Shen L, Yang H F, Shi T Y, Liu X J, Liu H P, Zhan M S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4791
- [4] Wang D H, Lin S L 2004 *Chin. Phys.* **13** 464
- [5] Liu X J, Cao J W, Zhan M S, Connerade J P 2002 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 2069
- [6] Dando P A, Monteiro T S, Owen S M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2797
- [7] Lankhuijzen G M, Noordam L D 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1784
- [8] Robicieux F, Shaw J 1997 *Phys. Rev. A* **56** 278
- [9] Mitchell K A, Handley J P, Tighe B, Flower A, Delos J B 2004 *Phys. Rev. A* **70** 043407
- [10] Mitchell K A, Handley J P, Tighe B, Flower A, Delos J B 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 073001
- [11] Topçu T, Robicieux F 2007 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** 1925
- [12] Wang D H, Huang K Y, Zhou H, Lin S L 2009 *J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom.* **169** 86
- [13] Haggerty M R, Delos J B 2000 *Phys. Rev. A* **61** 053406
- [14] Mao J M, Rapelje K A, Blodgett-Ford S J, Delos J B, König A, Rinneberg H 1993 *Phys. Rev. A* **48** 2117
- [15] Mitchell K A, Delos J B 2007 *Physica D* **229** 9

Self-similarity of Rydberg hydrogen atom in parallel electric and magnetic fields*

Li Hong-Yun[†] Yin Yan-Yan Wang Qing Wang Li-Fei

(School of Science, Shandong Jiaotong University, Jinan 250357, China)

(Received 31 March 2015; revised manuscript received 8 May 2015)

Abstract

Using the semi-classical methods, the self-similarity structure of Rydberg hydrogen atom in parallel electric and magnetic fields is analysed in this paper. Based on the Hamiltonian canonical equations, all the escape orbits are found, and the escape time and the initial launch angle of every escape orbit can be derived. The self-similarity structure of escape time plot is found by studying the relationship between the escape time and the initial launch angle of electron in parallel electric and magnetic fields. The relationship between the self-similarity structure and escape orbits is also established through the study of the escape orbits in the escape time plot. The regularity of escape orbits in self-similarity structure is found and the corresponding escape orbits in self-similarity structure plots meet the law of $(-o)^k$. According to this rule, the self-similarity structure can be easily found, and the rule is applicable to other research system. Moreover, the influences of scaled energy and scaled magnetic field are analyzed in detail. It is presented that the dynamic behavior of the Rydberg hydrogen atom is sensitively controlled by scaled energy and scaled magnetic field. Different scaled energies or scaled magnetic fields can lead to different escape behaviors of electron. It is also found that the self-similarity structure is present not in all cases. When scaled energy or scaled magnetic field is small, the escape time plot is simple, and no self-similarity structure is observed. When scaled energy or scaled magnetic field increases, self-similarity structure appears accordingly and the system becomes complicated. When scaled energy or scaled magnetic field changes, the self-similarity region also changes. For a given scaled magnetic field, with the increase of scaled energy, self-similarity region shifts toward the bigger initial launch angle, while self-similarity region shifts toward the smaller initial launch angle with the increase of scaled magnetic field for a given scaled energy.

Keywords: fractal self-similarity, parallel electric and magnetic fields, Rydberg hydrogen atom, escape orbit

PACS: 05.45.Df, 05.45.Pq, 05.45.Ac, 05.45.Mt

DOI: 10.7498/aps.64.180502

* Project supported by the Special Funds of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11347156) and the Doctor Foundation of Shandong Jiaotong University, China

[†] Corresponding author. E-mail: li5776@163.com