

圆管结构中周向导波非线性效应的模式展开分析

高广健 邓明晰 李明亮

Modal expansion analysis of nonlinear circumferential guided wave propagation in a circular tube

Gao Guang-Jian Deng Ming-Xi Li Ming-Liang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 184303 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.184303

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184303>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

超声造影剂微气泡的包膜黏弹特性的定量表征研究

Quantitative characterization of viscoelasticity of microbubbles in ultrasound contrast agent

物理学报.2015, 64(11): 114301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.114301>

超声增强藻酸钙凝胶支架材料孔隙率的研究

Ultrasonic enhancement of the porosity of alginate scaffold

物理学报.2015, 64(2): 024301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.024301>

基于迟滞应力应变关系的非线性声学检测理论与方法研究

Theory and method for nonlinear acoustics detection based on hysteretic stress-strain relation

物理学报.2014, 63(19): 194302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.194302>

弹性管中泡群内气泡的非线性声响应

Nonlinear acoustical response of multibubbles in elastic tube

物理学报.2014, 63(13): 134301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.134301>

球形集声器在生物组织中形成的组织损伤

Tissue lesion induced by a spherical cavity transducer

物理学报.2014, 63(4): 044301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.044301>

圆管结构中周向导波非线性效应的模式展开分析*

高广健 邓明晰† 李明亮

(后勤工程学院, 重庆 401331)

(2015年5月18日收到; 2015年6月24日收到修改稿)

在二阶微扰近似条件下, 采用导波模式展开分析方法研究了圆管结构中周向导波的非线性效应. 伴随基频周向导波传播所发生的二次谐波, 可视为由一系列二倍频周向导波模式叠加而成. 从动量定理出发, 结合柱坐标系下非线性应力张量及其散度的数学表达式, 针对圆管中某一基频周向导波模式, 推导出相应的二倍频应力张量及二倍频彻体驱动力的数学表达式, 建立了确定二倍频周向导波模式展开系数的控制方程, 得到了伴随基频周向导波传播所发生的二次谐波声场的形式解. 理论分析和数值计算表明, 当构成二次谐波声场的某一二倍频周向导波模式与基频周向导波的相速度匹配时, 该二倍频周向导波模式的位移振幅表现出随传播周向角积累增长的性质; 当两者的相速度失配时, 二倍频周向导波的振幅随传播周向角表现出“拍”效应.

关键词: 周向导波, 非线性效应, 二次谐波发生, 模式展开分析

PACS: 43.25.+y, 43.20.Mv, 43.35.+d

DOI: 10.7498/aps.64.184303

1 引言

圆管结构具有双轴对称、截面形心和剪心重合等特点, 截面惯性矩对各轴相同, 作为受弯和受压构件的优势十分突出, 被广泛应用于实际工程领域. 超声导波作为一种有效的无损检测手段, 在圆管结构的性能评价方面已得到广泛研究和应用^[1-5]. 圆管结构中传播的导波模式分为轴向导波和周向导波两种形式, 而轴向导波又包括轴对称的纵向导波、轴对称的扭转导波及非轴对称的弯曲导波等三种形式^[1]. 采用轴向超声导波对圆管结构进行无损检测已开展了大量的研究工作^[1-5], 用于评价圆管结构的裂纹、孔洞、管壁腐蚀(壁厚变化)程度、管材参数及圆管表面覆层特性等. 相比之下, 沿圆管结构周向(环向)传播的周向导波的研究工作相对较少. 周向导波沿圆周方向传播, 其传播路径闭合, 并在管径方向形成驻波, 尤其适宜于检测较大管径圆管管壁的径向裂纹及轴向裂纹等^[6-10]. Qu等^[6]首先研究了圆管中周向导波的频散特性, 随后Liu和Qu^[7]以及Valle等^[8]进一步研

究了周向导波在圆管结构中的传播特性; Zhang和Yin^[9]系统研究了多层圆管结构中周向导波的传播问题, 并分析了相邻管层之间的界面特性对周向导波所产生的影响.

关于超声导波非线性问题的研究工作, 近年来已取得很大的进展. 邓明晰首先^[11,12]采用界面非线性声反射技术, 得到了固体板中兰姆波和SH板波在共振条件下的具有积累增长效应的二次谐波之解析解; 进一步, 邓明晰^[13,14]以及Lima和Hamilton^[15]各自分别采用导波模式展开分析方法, 在二阶微扰近似下, 分析得出了更为一般的二次谐波声场之解析解. 相关研究结果表明, 在一定条件下超声导波可存在强烈的非线性效应, 其二次谐波振幅随传播距离积累增长^[16-18]; 此外, Srivastava等^[19]从理论上研究了任意横截面结构(含圆管结构)中沿轴向传播导波的二次谐波发生问题.

已开展的关于超声导波非线性效应的理论与实验研究工作, 仅限于固体板状结构中的超声兰姆波和SH板波, 以及管(柱)状结构中的轴向超声导

* 国家自然科学基金(批准号: 11474361, 11274388)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dengmx65@yahoo.com

波^[11-19]. 对于圆管结构中传播的周向导波与轴向导波, 两者在声场及频散特性等方面均存在很大的差异^[5]. 因非线性效应与基波的声场及频散特性等密切相关^[11-19], 这将使得周向导波的非线性效应完全有别于轴向导波的非线性效应. 周向超声导波作为圆管结构中存在的—类重要导波模式, 对其非线性效应开展系统的理论研究, 是对已有非线性超声导波研究工作的进一步深化与拓展. 本文借鉴二阶微扰理论和导波模式展开分析方法^[13-15], 对圆管中周向导波的二次谐波发生问题开展深入的理论分析.

2 非线性动量定理

在均质、各向同性的弹性固体中, 无物体驱动力的波动过程可由动量定理予以描述^[15]:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中, ρ_0 为无形变固体的质量密度, \mathbf{P} 为第一 Piola-Kirchoff 应力张量, \mathbf{U} 为质点的位移矢量. 用 $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ 表示未发生形变固体中的一个质点的初始坐标, $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ 表示形变发生之后该质点的当前坐标, 则位移矢量为

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = x_i - a_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

初始坐标和当前坐标之间所存在的联系可通过形变梯度张量得到描述, 形变梯度张量定义为^[20]

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial (\mathbf{U} + \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{U}, \quad (3)$$

其中, \mathbf{I} 是二阶单位对角张量. 为描写形变的大小, 引入拉格朗日应变张量 \mathbf{E} , 使得

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式中, 可得到拉格朗日应变张量 \mathbf{E} 的表达式

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T + \nabla \mathbf{U} (\nabla \mathbf{U})^T]. \quad (5)$$

对于大多数弹性固体材料, 可以假定弹性应变能量仅依赖于介质的弹性形变, 也就是说, 弹性应变能量完全由应变张量 \mathbf{E} 确定, $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{E})$. 对于弹性固体是各向同性情形, 此时应变能量存在如下的展开式^[15,20]:

$$\rho_0 \mathbf{W} = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr} \mathbf{E}^2 + \frac{C}{3} (\text{tr} \mathbf{E})^3$$

$$+ B (\text{tr} \mathbf{E}) \text{tr} \mathbf{E}^2 + \frac{A}{3} \text{tr} \mathbf{E}^3, \quad (6)$$

其中, $\text{tr} \mathbf{E}$ 称为张量 \mathbf{E}_{ij} 的迹, 是张量 \mathbf{E}_{ij} 对角元素之和, 表示应变张量 \mathbf{E} 的第一不变量, \mathbf{E}^2 和 \mathbf{E}^3 也是张量, 其分量形式可表示为 $(\mathbf{E}^2)_{ij} = E_{ik} E_{kj}$, $(\mathbf{E}^3)_{ij} = E_{ik} E_{kl} E_{lj}$; λ 和 μ 是 Lamé 常数; A , B 和 C 是 Landau 和 Lishitz 引入的三阶弹性常数.

由欧拉-朗格朗日方程, 可得到^[20]

$$\mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{E}}. \quad (7)$$

将(6)式代入到(7)式中, 得到第一 Piola-Kirchoff 应力张量 \mathbf{P} 和拉格朗日应变张量 \mathbf{E} 之间的关系式:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{U}) [\lambda (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} + C (\text{tr} \mathbf{E})^2 \mathbf{I} + B (\text{tr} \mathbf{E}^2) \mathbf{I} + 2B (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{E} + A \mathbf{E} \mathbf{E}]. \quad (8)$$

将应变张量(5)式代入(8)式, 即得应力张量 \mathbf{P} 的表达式:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(L)} + \mathbf{P}^{(NL)}, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{P}^{(L)}$ 和 $\mathbf{P}^{(NL)}$ 分别代表 \mathbf{P} 的线性项和非线性项. 柱坐标系下 $\mathbf{P}^{(NL)}$ 的求解过程见附录. 应力张量的线性项 $\mathbf{P}^{(L)}$ 可写为

$$\mathbf{P}^{(L)} = \frac{1}{2} \lambda \text{tr} [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T] \mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T]. \quad (10)$$

将(9)和(10)式代入(1)式, 可得到如下非线性波动方程:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) \\ + \mathbf{F}_V = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \\ \mathbf{F}_V = \nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)}. \end{cases} \quad (11)$$

在弱非线性近似条件下(即有限振幅声波情形), 可采用逐级近似法对相应的非线性声学问题进行求解. 在对高阶声波进行分析时, 一般将低阶声波作为高阶声波的源函数^[20]. (11)式所涉及的非线性问题被认为是线性波动响应的一个二阶微扰, 可采用逐级近似法对其进行求解. 设 $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(1)}$ 和 $\mathbf{U}^{(2)}$ 分别表示基波和二阶声波的质点位移矢量, 据此(11)式可线性化为以下两个方程^[20]:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}^{(1)}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}^{(1)}) \\ & = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{(1)}}{\partial t^2}, \quad (12a) \\ & (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}^{(2)}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}^{(2)}) + \mathbf{F}_V^{(1)} \end{aligned}$$

$$= \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{(2)}}{\partial t^2}, \quad (12b)$$

其中, $\mathbf{F}_V^{(1)} = \nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)}$, 亦即满足 (12a) 式的基波位移场, 因几何及固体的体弹性非线性 [21], 将产生一个二阶彻体驱动力 $\mathbf{F}_V^{(1)}$, 在柱坐标系下其求解过程参见附录.

3 周向导波二次谐波发生效应的模式展开分析

为简化分析过程, 不考虑固体管材的各向异性及损耗, 对内外径分别为 R_1 和 R_2 的圆管建立柱坐标 (r, θ, z) 如图 1 所示 (z 表示轴向), 周向导波沿周向角 θ 方向传播.

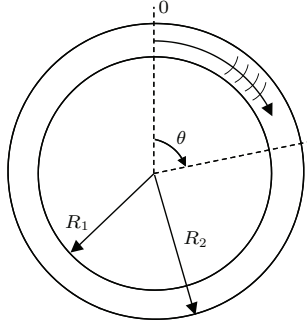


图 1 圆管横截面示意图

Fig. 1. Structure profile of a circular tube.

角频率为 ω 、阶数为 l 的基频周向导波沿圆管的周向传播时, 其无量纲角波数为 $k^{(\omega, l)}$ 、满足 (12a) 式的位移场为 $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(\omega, l)} = \mathbf{U}^{(\omega, l)}(r) \exp[jk^{(\omega, l)}\theta - j\omega t]$ [6]. 因几何非线性及管材的体弹性非线性 [21], 伴随基频周向导波的传播, 在圆管的内外表面及管壁内部, 将存在二倍频的面驱动应力张量 $\mathbf{P}^{(NL)} = \mathbf{P}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}]$ 和二倍频的彻体驱动力 $\mathbf{F}_V^{(1)} = \mathbf{F}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}]$. 根据导波模式展开分析方法, $\mathbf{P}^{(NL)}$ 和 $\mathbf{F}_V^{(1)}$ 的作用就是在圆管中激发出一系列角波数取分离值 (以 $k^{(2\omega, m)}$ 表示) 的二倍频周向导波模式, 这些二倍频周向导波模式相叠加, 即构成了伴随 l 阶基频周向导波传播所发生的二次谐波声场, $\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(2\omega)} = \mathbf{U}^{(2\omega)}(r, \theta)$, 即有 (略去因子 $\exp[-j\omega t]$) [22]

$$\mathbf{U}^{(2\omega)} = \sum_m A_m(\theta) \times \mathbf{U}^{(2\omega, m)}(r), \quad (13)$$

其中, $\mathbf{U}^{(2\omega, m)}(r)$ 是 m 阶二倍频周向导波模式的位移场函数, 其径向和周向分量分别以 $U_r^{(2\omega, m)}(r)$ 和 $U_\theta^{(2\omega, m)}(r)$ 表示, $A_m(\theta)$ 是 m 阶二倍频周向导波的

模式展开系数. 与二次谐波位移场 $\mathbf{U}^{(2\omega)}$ 有关的二次谐波质点速度场 (以 $\mathbf{V}^{(2\omega)}$ 表示) 和二次谐波应力场 (以 $\mathbf{P}^{(2\omega)}$ 表示), 同样可以展开为一系列二倍频周向导波模式所对应的质点速度场 $\mathbf{V}^{(2\omega, m)}(r)$ 和应力张量场 $\mathbf{P}^{(2\omega, m)}(r)$ 的叠加:

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{(2\omega)} = \sum_m A_m(\theta) \mathbf{V}^{(2\omega, m)}(r), \\ \mathbf{P}^{(2\omega)} \cdot \hat{\theta} = \sum_m A_m(\theta) \mathbf{P}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \hat{\theta}, \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\hat{\theta}$ 表示沿周向的单位矢量, $\mathbf{V}^{(2\omega, m)}(r)$ 和 $\mathbf{P}^{(2\omega, m)}(r)$ 分别是对应于 $\mathbf{U}^{(2\omega, m)}(r)$ 的速度场和应力场函数, 且存在以下关系:

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{(2\omega)} = \frac{\partial \mathbf{U}^{(2\omega)}}{\partial t} = -2j\omega \mathbf{U}^{(2\omega)}, \\ \mathbf{V}^{(2\omega, m)}(r) = -2j\omega \mathbf{U}^{(2\omega, m)}(r). \end{cases} \quad (15)$$

在圆管声波导中存在以下互易关系 [20]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(-\tilde{\mathbf{V}}_2 \cdot \mathbf{P}_1 - \mathbf{V}_1 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_2 \right) \\ = \tilde{\mathbf{V}}_2 \cdot \mathbf{F}_{V1} + \mathbf{V}_1 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{V2}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中符号 “ \sim ” 表示对相应的物理量进行复共轭操作, \mathbf{V}_i ($i = 1, 2$) 表示质点速度, \mathbf{F}_{Vi} ($i = 1, 2$) 表示彻体驱动力, \mathbf{P}_i ($i = 1, 2$) 表示应力张量. 在采用 (16) 式分析 l 阶周向导波的二次谐波声场时, 令 [22]:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_1 = \sum_n A_n(\theta) \mathbf{V}^{(2\omega, n)}(r), \\ \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\theta} = \sum_n A_n(\theta) \mathbf{P}^{(2\omega, n)}(r) \cdot \hat{\theta}, \\ \mathbf{V}_2 = \exp[jk^{(2\omega, m)}\theta] \mathbf{V}^{(2\omega, m)}(r), \\ \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\theta} = \exp[jk^{(2\omega, m)}\theta] \mathbf{P}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \hat{\theta}, \end{cases} \quad (17)$$

其中, \mathbf{V}_2 和 $\mathbf{P}_2 \cdot \hat{\theta}$ 分别表示 m 阶二倍频周向导波模式的质点速度场和应力张量, \mathbf{V}_1 和 $\mathbf{P}_1 \cdot \hat{\theta}$ 分别为与二次谐波声场 $\mathbf{U}^{(2\omega)}$ 有关的质点速度场和应力场 (见 (14) 式), 故有 $\mathbf{F}_{V2} = 0$ 和 $\mathbf{F}_{V1} \neq 0$. (17) 式中的 $\mathbf{P}_1 = \sum_n A_n(\theta) \mathbf{P}^{(2\omega, n)}(r)$ 即为圆管表面的面驱动应力张量 $\mathbf{P}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}]$, (16) 式中的 \mathbf{F}_{V1} 就是圆管内部的彻体驱动力 $\mathbf{F}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}]$. 对于柱坐标系下的周向和径向单位矢量 (即 $\hat{\theta}$ 和 \hat{r}), 其方向不再始终保持不变, 在柱坐标求导运算过程中必须对此加以考虑 (见附录). 对于周向导波来说, (16) 式可表示为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [*] &= \frac{\partial}{\partial r} ([*]\hat{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial [*]}{\partial \theta} \hat{\theta} \\ &= \tilde{\mathbf{V}}_2 \cdot \mathbf{F}_{V1} + \mathbf{V}_1 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{V2}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $[*] = (-\tilde{\mathbf{V}}_2 \cdot \mathbf{P}_1 - \mathbf{V}_1 \cdot \tilde{\mathbf{P}}_2)$. 将 (17) 式代入 (18) 式, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - j\tilde{k}^{(2\omega, m)} \right] A_n(\theta) \left\{ \frac{1}{r} \left[-\tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \right. \right. \\ & \times \mathbf{P}^{(2\omega, n)}(r) - \mathbf{V}^{(2\omega, n)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(2\omega, m)}(r) \left. \right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{V}_1 \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(2\omega, m)}(r) \right] \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \\ & + \tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{F}_{V1}. \end{aligned} \quad (19)$$

将 (19) 式沿圆管径向做积分运算, 得

$$\begin{aligned} & 4 \sum_n \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - j\tilde{k}^{(2\omega, m)} \right] A_n(\theta) P_{nm} \\ & = \left[\tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{V}_1 \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(2\omega, m)}(r) \right] \cdot \hat{\mathbf{r}} \Big|_{R_1}^{R_2} \\ & + \int_{R_1}^{R_2} \left[\tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{F}_{V1} \right] dr, \end{aligned} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} P_{nm} & = \frac{1}{4} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{1}{r} \left[-\tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{P}^{(2\omega, n)}(r) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathbf{V}^{(2\omega, n)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(2\omega, m)}(r) \right] \right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} dr. \end{aligned} \quad (21)$$

因导波模式的正交性, 当 $n \neq m$ 时有 $P_{nm} = 0$, 且有 $\tilde{k}^{(2\omega, m)} = k^{(2\omega, m)}$ (仅考虑传播模式) [20], 据此 (20) 式进一步可表为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - jk^{(2\omega, m)} \right] A_m(\theta) \\ & = \frac{1}{4P_{mm}} \left[f_m^{\text{surf}}(\theta) + f_m^{\text{vol}}(\theta) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

其中, P_{mm} 是 m 阶二倍频周向导波模式沿周向传播的平均功率流 (沿轴向 z 方向取单位长度); $f_m^{\text{surf}}(\theta)$ 和 $f_m^{\text{vol}}(\theta)$ 分别是由二阶表面应力张量 $\mathbf{P}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}]$ 和二阶彻体驱动力 $\mathbf{F}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}]$ 所提供的面驱动源和彻体驱动源, 其具体表达式如下:

$$\begin{aligned} f_m^{\text{surf}}(\theta) & = \left[\tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{P}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}] \right. \\ & \left. + \mathbf{V}_1 \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(2\omega, m)}(r) \right] \cdot \hat{\mathbf{r}} \Big|_{R_1}^{R_2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$f_m^{\text{vol}}(\theta) = \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{F}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}] \right\} dr. \quad (24)$$

考虑到圆管内外表面应满足自由边界条件, 即有 $\tilde{\mathbf{P}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \hat{\mathbf{r}} \Big|_{r=R_1, R_2} = 0$, 据此, (23) 式可进一步表示为

$$f_m^{\text{surf}}(\theta) = \tilde{\mathbf{V}}^{(2\omega, m)}(r) \cdot \mathbf{P}[\mathbf{U}^{(\omega, l)}] \cdot \hat{\mathbf{r}} \Big|_{r=R_1}^{r=R_2}. \quad (25)$$

因彻体驱动源 $f_m^{\text{vol}}(\theta)$ 和面驱动源 $f_m^{\text{surf}}(\theta)$ 均包含有因子 $\exp[2jk^{(\omega, l)}\theta]$, (22) 式可表为如下形式:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - jk^{(2\omega, m)} \right] A_m(\theta) \\ & = \frac{(f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}})}{4P_{mm}} \exp[2jk^{(\omega, l)}\theta], \end{aligned} \quad (26)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_m^{\text{surf}} & = f_m^{\text{surf}}(\theta) \times \exp[-2jk^{(\omega, l)}\theta], \\ f_m^{\text{vol}} & = f_m^{\text{vol}}(\theta) \times \exp[-2jk^{(\omega, l)}\theta]. \end{aligned}$$

设 l 阶基频周向导波模式的激发源位于图 1 中的 $\theta = 0$ 处, 考虑到二次谐波的初始条件, 即在 $\theta = 0$ 时应有 $A_m(\theta) = 0$. 据此及 (26) 式, 容易得到 $A_m(\theta)$ 的如下形式解 [20]:

$$\begin{aligned} A_m(\theta) & = \frac{(f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}})}{4P_{mm}} \\ & \times \left\{ \int_0^\theta \exp[j2k^{(\omega, l)}\xi - jk^{(2\omega, m)}\xi] d\xi \right\} \\ & \times \exp[2jk^{(\omega, l)}\theta]. \end{aligned} \quad (27)$$

上式进一步可表示为

$$\begin{aligned} A_m(\theta) & = \left[\frac{\sin(\Delta k \theta)}{\Delta k} \exp(j\Delta k \theta) \right] \frac{(f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}})}{4P_{mm}} \\ & \times \exp[jk^{(2\omega, m)}\theta], \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\Delta k = (k^{(\omega, l)} - k^{(2\omega, m)})/2$ 用于描述 l 阶基频周向导波与 m 阶二倍频周向导波模式之间的频散程度. 当 $\Delta k = 0$ 时, 即基频与二倍频周向导波模式的相速度相匹配, 对 (28) 式取极限运算可得

$$A_m(\theta) = \frac{(f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}})}{4P_{mm}} \theta \times \exp[jk^{(2\omega, m)}\theta]. \quad (29)$$

上式表明, 当 l 阶基频周向导波模式与 m 阶二倍频周向导波模式的相速度严格匹配时 (即 $\Delta k = 0$), m 阶二倍频周向导波模式的展开系数 $A_m(\theta)$ 与周向角 θ 呈线性关系. 将 (28) 式代入 (13) 式, 即得到 l 阶周向导波模式的二次谐波声场:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(2\omega)} & = \sum_m \frac{(f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}})}{4P_{mm}} \frac{\sin(\Delta k \theta)}{\Delta k} \mathbf{U}^{(2\omega, m)}(r) \\ & \times \exp[jk^{(2\omega, m)}\theta + j\Delta k \theta]. \end{aligned} \quad (30)$$

至此, 采用二阶微扰近似和导波模式展开分析方法, 推得了伴随 l 阶周向导波传播所发生的二次谐波声场的数学表达式. 在二阶微扰近似 (即弱非线性近似) 条件下, 上述分析过程及所得结果是准确的. 换句话说, (28) 和 (29) 式成立是有条件的, 要

求伴随基频周向导波传播所发生的二次谐波的振幅远小于基频波的振幅(视基频波振幅为恒定值),并忽略三次以上的高次谐波. 对于 $\Delta k = 0$ 情形, 考虑到具有积累增长性质的 m 阶二倍频周向导波模式的非线性畸变程度随周向角累积增强, 在传播一定的周向角度之后, 可导致锯齿波的形成. 在临近锯齿波形成的周向角附近, (29) 式给出的解不再成立, 因为此时二阶微扰近似的前提条件已不满足. 通常关注的是锯齿波形成之前的有限振幅声波的传播问题, 尽管 (29) 式存在一定的局限性, 但从应用角度考虑, 该解仍具有实际意义 [13-21].

据 (30) 式可知, l 阶周向导波模式的二次谐波声场由一系列二倍频周向导波模式叠加而成, m 阶二倍频周向导波模式对二次谐波声场 $U^{(2\omega)}$ 的贡献取决于两方面: 一是以 Δk 表示的频散程度(或基频与二倍频周向导波相速度的匹配程度); 二是圆管中由基波产生的 $P[U^{(\omega,l)}]$ 及 $F[U^{(\omega,l)}]$ 与二倍频周向导波模式之间的耦合程度(通过 $(f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}})/4P_{mm}$ 的数值大小予以体现). 相速度匹配程度对周向导波二次谐波的发生效率至关重要, 决定了 m 阶二倍频周向导波模式的振幅随周向角 θ 的积累增长程度. 鉴于耦合程度的表达式 $(f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}})/4P_{mm}$ 及其计算过程异常复杂[见 (23), (24) 式和 (A6)–(A13)], 且当所选模式确定之后应为一常数, 本文将主要关注频散程度对周向导波二次谐波声场的影响. 关于耦合程度对周向导波二次谐波发生效应所产生的影响, 将另文讨论.

据 (28) 式可知, 对于 m 阶二倍频周向导波模式, 当 $\Delta k \neq 0$ 时, $A_m(\theta)$ 随周向角 θ 以正弦函数形式变化. 类似于固体板中兰姆波的二次谐波发生效应, 当相速度失配时(即 $k^{(\omega,l)} \neq k^{(2\omega,m)}/2$), 在一定周向角范围内, $A_m(\theta)$ 仍表现出积累增长性质; 在 $\theta_{\text{max}} = \pi/(2\Delta k)$ 处, $A_m(\theta)$ 取极大值 [22].

需注意的是, 当 $\Delta k = 0$ 时, m 阶二倍频周向导波随周向角累积增长; 对于某一确定的周向角 θ , 周向导波绕行一周之后周向角将增加 2π . 若不计衰减, 据 (29) 式可知, 在绕行 N 周之后, 较最初 m 阶二倍频周向导波的振幅将增大 $(2N\pi + \theta)/\theta$ 倍, 这一效应完全不同于兰姆波和 SH 板波, 以及管(柱)状结构中轴向导波的非线性效应 [14,15,19].

4 数值分析

设管材为钢, 其物理及几何参数如表 1 所列,

表中 ρ_0 , λ 和 μ 分别表示圆管结构的密度和二阶弹性常数.

表 1 圆管几何及材质参数
Table 1. Some parameters for the circular tube.

材料	R_1/mm	R_2/mm	$\rho_0/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	λ/GPa	μ/GPa
钢	50.0	56.0	7.93 [23]	105.5 [23]	80.2 [23]

对于图 1 所示圆管中传播的角频率为 ω 、阶数为 l 的基频周向导波模式, 满足 (12a) 式的位移场在形式上可表示为: $U^{(\omega,l)}(r) \exp[jk^{(\omega,l)}\theta - j\omega t]$. 根据圆管内、外表面 ($r = R_1, R_2$) 应力为零的力学边界条件 [9], 基频周向导波的频散关系在形式上可表示为

$$|M_{4 \times 4}(\omega, k^{(\omega,l)})| = 0, \quad (31)$$

其中, $M_{4 \times 4}(\omega, k^{(\omega,l)})$ 是边界条件方程所对应的 4×4 系数矩阵, 其矩阵元的具体数学形式见文献 [9]. 类似于 l 阶基频周向导波频散关系的求解过程, m 阶二倍频周向导波的频散关系在形式上可表示为

$$|M_{4 \times 4}(2\omega, k^{(2\omega,m)})| = 0. \quad (32)$$

事实上, 只需将 (31) 式中的 ω 和 $k^{(\omega,l)}$ 分别用 2ω 和 $k^{(2\omega,m)}$ 代替, 即可得到 (32) 式. 通过 (31) 和 (32) 式, 数值计算得到的基频及二倍频周向导波的频散曲线如图 2 所示.

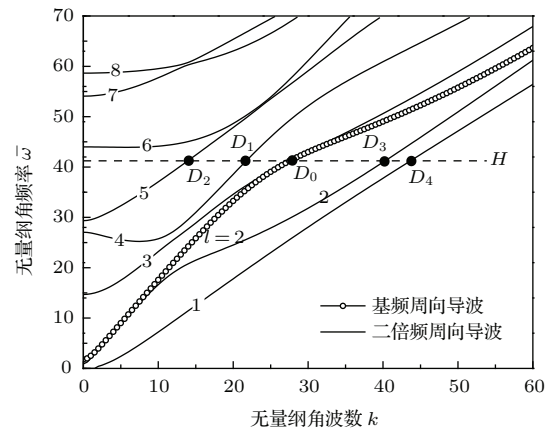


图 2 基频和二倍频周向导波模式的频散曲线
Fig. 2. Dispersion curves for primary and double-frequency circumferential guided waves in a circular tube.

在图 2 中, 无量纲角频率 $\bar{\omega} = \omega R_2/c_T$, c_T 为管材的横波声速. 为方便比较, 二倍频与基频周向导波频散曲线的横轴同为无量纲化的角波数 k .

图2中的水平虚线 H 与二倍频周向导波频散曲线存在一系列交点 (D_0, D_1, D_2, D_3, D_4), 这些交点对应一系列二倍频的周向导波模式. 阶数 $l = 2$ 的基频周向导波频散曲线与阶数 $m = 3$ 的二倍频周向导波频散曲线相交于点 D_0 . 据第3部分的分析可知, 阶数 $l = 2$ 的基频周向导波在圆管结构中传播时, 所发生的二次谐波声场可视为一系列二倍频周向导波模式 (由交点 D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 确定) 叠加而成, 因此二次谐波声场的计算就归结为计算展开系数 $A_m(\theta)$. 表2给出了构成二次谐波声场的二倍频周向导波模式的有关参数. 水平虚线 H 所对应的无量纲角频率为 $\bar{\omega} = 41.64$.

表2 图2中交点所对应的二倍频周向导波模式的有关参数
Table 2. Some parameters of the double-frequency circumferential guided waves determined by the intersections in Fig. 2.

交点	D_4	D_3	D_0	D_1	D_2
模式阶数	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$k^{(\omega, l)}$	28.0	28.0	28.0	28.0	28.0
$K^{(2\omega, m)}/2$	44.0	40.5	28.0	22.0	14.25
$ \Delta k $	16.0	11.5	0	6.0	13.8
θ_{\max}	$\pi/32$	$\pi/23$	∞	$\pi/12$	$\pi/27.6$

从实际测量角度出发, 分析圆管外表面的二次谐波位移场随周向角的分布关系甚有必要 [22]. 阶数 $l = 2$ 的基频周向导波在圆管中传播时所产生的二次谐波声场, 由图2中水平虚线 H 与二倍频周向导波频散曲线交点所确定的二倍频周向导波模式叠加而成. 根据 (30) 式进行计算, 图3给出了伴随基频周向导波模式 ($l = 2$) 传播所发生的若干个二倍频周向导波模式, 在圆管外表面的振幅随传播周向角的变化关系曲线.

显而易见, 因基频与二倍频周向导波模式满足相速度匹配条件 ($k^{(\omega, l)} = k^{(2\omega, m)}/2$), 阶数 $m = 3$ 的二倍频周向导波模式 (由点 D_0 确定) 的振幅随传播周向角呈线性积累增长关系. 相比之下, 由其他交点 (D_1, D_2, D_3 和 D_4) 所确定的二倍频周向导波模式, 因 $k^{(\omega, l)} \neq k^{(2\omega, m)}/2$, 其振幅随传播周向角以正弦形式振荡变化, 表现出“拍”效应. 频散程度 Δk 越大 (即相速度失配越严重), θ_{\max} 越小, 二倍频周向导波振幅随周向角的振荡愈加明显, 其对 $U^{(2\omega)}$ 的贡献与点 D_0 所确定的二倍频周向导波模式相比, 处于次要地位. 因此, 当基频与二倍频周

向导波满足相速度匹配条件时, 二次谐波声场主要取决于点 D_0 所确定的二倍频周向导波模式, 其他二倍频周向导波模式的贡献可忽略不计. 在实际应用中, 可选择性地激发适当的基频周向导波模式, 使其相速度与某一二倍频周向导波模式的相速度相匹配, 如此便可有效地检测到周向导波的二次谐波信号 [20].

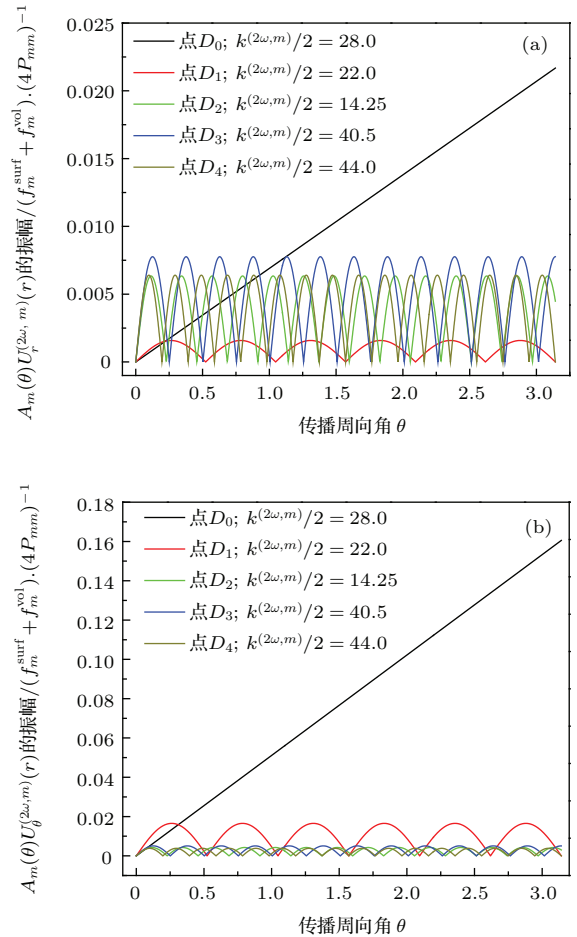


图3 (网刊彩色) 在圆管外表面, 二倍频周向导波模式的振幅随传播周向角的关系曲线 (a) 径向位移分量; (b) 周向位移分量

Fig. 3. (color online) Amplitudes of some double-frequency circumferential guided wave modes on the outer surface of the circular tube: (a) Radial and (b) circumferential components of particle displacement.

5 结 论

在二阶微扰近似条件下, 采用导波模式展开分析方法研究了圆管中周向导波的非线性效应. 伴随基频周向导波传播所发生的二次谐波, 可视为由一系列二倍频周向导波模式叠加而成. 针对圆管中的某一基频周向导波模式, 推导出了相应的二倍频应力张量及二倍频彻体驱动力的数学表达式, 建立

为了确定二倍频周向导波模式展开系数的控制方程, 得到了伴随基频周向导波传播所发生的二次谐波声场的解析表达式. 理论分析和数值计算表明, 基频与二倍频周向导波模式的相速度匹配程度可显著地影响二倍频周向导波模式随传播周向角的积累增长程度; 满足相速度匹配的二倍频周向导波模式, 在二次谐波声场中占主导地位, 其他二倍频周向导波模式对二次谐波声场的贡献可忽略不计. 本文对周向导波非线性效应所开展的研究工作, 对于非线性超声导波理论的进一步完善和发展具有重要的科学意义.

附录 A

对于柱坐标系中的径向、周向和轴向单位矢量 \hat{r} , $\hat{\theta}$ 和 \hat{z} , 可证明存在以下微商关系^[21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \hat{\theta} &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \hat{z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{r} &= \hat{\theta}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} &= -\hat{r}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \hat{r} &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} \hat{\theta} &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

在柱坐标系中, 考虑单位矢量的微小增量, 周向导波的形变梯度张量 \mathbf{F} 可以用矩阵形式表示为

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) & 0 \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & 1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_\theta \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2})$$

当频率为 ω 、阶数为 l 的基频周向导波沿圆管的周向传播时, 在 (A2) 式及以下的各式中, U_r 和 U_θ 分别为基波位移场 $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(\omega, l)} = \mathbf{U}^{(\omega, l)}(r) \exp[jk^{(\omega, l)}\theta - j\omega t]$ 的径向分量和周向分量. 拉格朗日应变张量其形式表示如下:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial a_j} + \frac{\partial U_j}{\partial a_i} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \frac{\partial U_k}{\partial a_j} \right), \quad (\text{A3})$$

其中, $i, j, k = r, \theta, z$. 设 $\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{E}}$, 将其称为第二 Piola-Kirchoff 应力张量, 则第一 Piola-Kirchoff 张量 \mathbf{P} 可写为

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \quad (\text{A4})$$

其中,

$$\begin{aligned} (\mathbf{S})_{ij} &= \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \mathbf{E}_{ij} + \delta_{ij} C E_{kk} E_{ll} + \delta_{ij} B E_{kl} E_{lk} \\ &\quad + 2B E_{kk} \mathbf{E}_{ij} + A E_{jk} E_{ki}, \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

式中 λ 和 μ 为二阶弹性常数; A, B, C 为三阶弹性常数. 将 (A5) 和 (A2) 式代入到 (A4) 式中, 可得第一 Piola-Kirchoff 张量 \mathbf{P} 的各分量 (保留到二阶项):

$$\begin{cases} P_{rr} = P_{rr}^{(L)} + P_{rr}^{(NL)}, \\ P_{rr}^{(L)} = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r}, \\ P_{rr}^{(NL)} = a \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right)^2 \right] \\ \quad + 2d \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \frac{\partial U_r}{\partial r} + b \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 \\ \quad + d \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right)^2 + e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right) \frac{\partial U_\theta}{\partial r}; \end{cases} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{cases} P_{\theta\theta} = P_{\theta\theta}^{(L)} + P_{\theta\theta}^{(NL)}, \\ P_{\theta\theta}^{(L)} = \lambda \frac{\partial U_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right), \\ P_{\theta\theta}^{(NL)} = a \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right)^2 \right] \\ \quad + b \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right)^2 + 2d \frac{\partial U_r}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \\ \quad + d \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right) \frac{\partial U_\theta}{\partial r}; \end{cases} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{cases} P_{r\theta} = P_{r\theta}^{(L)} + P_{r\theta}^{(NL)}, \\ P_{r\theta}^{(L)} = \mu \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right), \\ P_{r\theta}^{(NL)} = 2a \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \right] \\ \quad + e \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \right]; \end{cases} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{cases} P_{\theta r} = P_{\theta r}^{(L)} + P_{\theta r}^{(NL)}, \\ P_{\theta r}^{(L)} = \mu \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right), \\ P_{\theta r}^{(NL)} = 2a \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \right] \\ \quad + e \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \right]. \end{cases} \quad (\text{A9})$$

在 (A6)–(A9) 式中, 相关常数定义如下:

$$\begin{cases} a = \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2} + \frac{\lambda}{2} + \mu \right), \\ b = \left(A + 3B + \frac{3}{2}\lambda + 3\mu + C \right), \\ d = \left(B + C + \frac{\lambda}{2} \right), \\ e = \left(\frac{A}{2} + B + \mu \right). \end{cases} \quad (\text{A10})$$

在柱坐标系中, 单位矢量的方向随不同场点位置而改变, 在做相应微商运算时必须加以考虑, 据此得到柱坐标系

下的应力散度关系式:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} &= \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{P}_r) + \frac{1}{r} \mathbf{P}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{P}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{P}_z \\ &= \hat{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_{rr}) - \frac{1}{r} P_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} P_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{r\theta} \right] \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_{\theta r}) + \frac{1}{r} P_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z} P_{\theta z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\theta\theta} \right] \\ &\quad + \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_{zr}) + \frac{\partial}{\partial z} P_{zz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{z\theta} \right]. \end{aligned} \tag{A11}$$

根据 $\mathbf{F}_V^{(1)} = \nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)}$, 可推得二阶彻体驱动力的径向和周向分量 F_r 和 F_θ :

$$\begin{aligned} F_r &= (\nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_{rr}^{(NL)}) + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{r\theta}^{(NL)}}{\partial \theta} - \frac{P_{\theta\theta}^{(NL)}}{r} \\ &= \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta \partial \theta} \left(\frac{e}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{2a}{r^3} U_\theta + \frac{2a}{r^3} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta \partial \theta} \left(\frac{2a}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2a}{r^3} U_r + \frac{2a}{r^3} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r \partial r} \left(2a \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{e}{r} U_\theta + \frac{e}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial r} \left(2b \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2d}{r} U_r + \frac{2d}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{2d+e}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2d+e}{r^2} U_r + \frac{2d+e}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{2e}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{4a}{r^2} U_\theta + \frac{4a}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \frac{2a+e}{r^2} U_\theta + \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \frac{2a}{r^3} U_\theta - \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \frac{2a+2b+2d}{r^3} U_r \\ &\quad + \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 \frac{b+d}{r} - \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right)^2 \frac{e}{r} - \frac{2a+b+d}{r^3} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\quad - \frac{2a}{r^3} U_\theta^2 - \frac{b+d}{r^3} U_r^2 - \frac{2a}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{2a}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{A12}$$

$$\begin{aligned} F_\theta &= (\nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_{\theta r}^{(NL)}) + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{\theta\theta}^{(NL)}}{\partial \theta} + \frac{P_{r\theta}^{(NL)}}{r} \\ &= \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta \partial \theta} \left(\frac{2d}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2b}{r^3} U_r + \frac{2b}{r^3} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta \partial \theta} \left(\frac{e}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{2a}{r^3} U_\theta + \frac{2a}{r^3} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r \partial r} \left(2a \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2a}{r} U_r + \frac{2a}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial r} \left(2a \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{e}{r} U_\theta + \frac{e}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{4a}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{2e}{r^2} U_\theta + \frac{2e}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{2d+e}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2d+e}{r^2} U_r + \frac{2d+e}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \frac{e}{r^3} U_\theta - \frac{\partial U_r}{\partial r} \frac{2a+e}{r^2} U_\theta + \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \frac{2a+2b-e}{r^3} U_r \\ &+ \frac{4a}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2b-e}{r^3} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{e}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \\ &- \frac{2a+2d+e}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{2a}{r^3} U_\theta U_r + \frac{e}{r^3} U_\theta U_r. \end{aligned} \tag{A13}$$

参考文献

- [1] Gazis D C 1959 *J. Acoust. Soc. Am.* **31** 568
- [2] Sun H J, Lin Z, Zhao D Y 2009 *Nondestruct. Test.* **31** 68 (in Chinese) [孙海蛟, 林哲, 赵德有 2009 无损检测 **31** 68]
- [3] Xu H, Wang B, Jiang X J 2009 *J. Power Eng.* **29** 1018 (in Chinese) [徐鸿, 王冰, 姜秀娟 2009 动力工程 **29** 1018]
- [4] Ta D A, Wang W Q, Wang Y Y 2009 *Ultrasound Med. Biol.* **35** 641
- [5] Liu Y, Lissenden C J, Rose J L 2013 *Proc. SPIE* **8695** 86950S-1
- [6] Qu J M, Berthelot Y, Li Z 1996 *Rev. Prog. Quant. Nondestr. Eval.* **15A** 169
- [7] Liu G, Qu J M 1998 *ASME J. Appl. Mech.* **65** 424
- [8] Valle C, Qu J M, Jacobs L J 1997 *Int. J. Eng. Sci.* **37** 1369
- [9] Zhang H L, Yin X C 2007 *Acta Mech. Solida Sin.* **20** 110
- [10] Liu Y, Li Z, Gong K 2012 *Mech. Syst. Signal Pr.* **20** 157
- [11] Deng M X 1998 *J. Appl. Phys.* **84** 3500
- [12] Deng M X 1999 *J. Appl. Phys.* **85** 3051
- [13] Deng M X, Liu Z Q 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 1916
- [14] Deng M X 2003 *J. Appl. Phys.* **94** 4152
- [15] Lima W J, Hamilton M F 2003 *J. Sound Vib.* **265** 819
- [16] Deng M X, Xiang Y X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 114302
- [17] Xiang Y X, Deng M X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4232
- [18] Deng M X, Xiang Y X, Liu L B 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 074301
- [19] Srivastava A, Bartoli I, Salamone S, di Lanza S F 2010 *J. Acoust. Soc. Am.* **127** 2790
- [20] Deng M X 2006 *Nonlinear Lamb Waves in Solid Plates* (Beijing: Science Press) pp12-43 (in Chinese) [邓明晰 2006 固体板中的非线性兰姆波 (北京: 科学出版社) 第 12-43 页]
- [21] Chillara V K, Lissenden C L 2013 *Ultrasonics* **53** 862
- [22] Deng M X 2005 *Acta Acust.* **30** 132 (in Chinese) [邓明晰 2005 声学学报 **30** 132]
- [23] Rose J L 1999 *Ultrasonic Waves in Solid Media* (Cambridge: Cambridge University Press) pp35-41

Modal expansion analysis of nonlinear circumferential guided wave propagation in a circular tube*

Gao Guang-Jian Deng Ming-Xi[†] Li Ming-Liang

(Logistics Engineering University, Chongqing 401331, China)

(Received 18 May 2015; revised manuscript received 24 June 2015)

Abstract

Within the second-order perturbation approximation, the nonlinear effect of primary circumferential guided wave propagation in a circular tube is investigated using modal expansion analysis for waveguide excitation. The nonlinearity of the wave equation governing the wave propagation ensures the second-harmonic generation accompanying primary circumferential guided wave propagation. This nonlinearity may be treated as a second-order perturbation of the linear elastic response. The fields of the second harmonics of primary circumferential guided wave propagation are considered as superpositions of the fields of a series of double frequency circumferential guided wave (DFCGW) modes. Based on the momentum theorem and mathematical formulae of nonlinear stress tensor and its divergence under the cylindrical coordinate system, the mathematical expressions of the corresponding double frequency traction stress tensors and bulk driving forces are deduced for a certain primary circumferential guided wave mode. Subsequently, the equation governing the DFCGW mode expansion coefficient is established. Finally, the mathematical expression of second-harmonic field of the primary circumferential guided wave mode in a tube is derived. The results of the theoretical analyses and numerical calculations indicate that the degree of cumulative growth of the DFCGW mode with circumferential angle is obviously influenced by that of phase velocity matching between the primary and double frequency wave modes. It is found that the amplitude of the DFCGW mode can grow with circumferential angle when its phase velocity matches with that of the primary circumferential guided wave, and that the amplitude of the DFCGW mode will show a beat effect with circumferential angle when its phase velocity is not equal to that of the primary wave mode. The DFCGW mode, whose phase velocity matches with that of the primary wave mode, plays a dominant role in the field of second harmonic generated by the primary wave mode propagation, and the contribution of the other DFCGW modes to the said second-harmonic field is negligible after the primary wave mode has propagated some circumferential angle.

Keywords: circumferential guided wave, nonlinear effect, second-harmonic generation, modal expansion analysis

PACS: 43.25.+y, 43.20.Mv, 43.35.+d

DOI: 10.7498/aps.64.184303

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11474361, 11274388).

[†] Corresponding author. E-mail: dengmx65@yahoo.com