物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

广义Birkhoff系统与一类组合梯度系统

梅凤翔　吴惠彬

Generalized Birkhoff system and a kind of combined gradient system

Mei Feng-Xiang　Wu Hui-Bin

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 184501 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.184501
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184501
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I18

广义Birkhoff系统与一类组合梯度系统*

梅凤翔[1)] 吴惠彬[2)†]

1) (北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

2) (北京理工大学数学学院, 北京 100081)

(2015 年 2 月 24 日收到; 2015 年 5 月 6 日收到修改稿)

提出一类组合梯度系统, 即将梯度系统与斜梯度系统相加而组成的一个系统, 并研究组合梯度系统的重要性质. 将广义 Birkhoff 系统在一定条件下化成组合梯度系统, 并利用组合梯度系统的性质来研究广义 Birkhoff 系统的积分和稳定性.

关键词: 广义 Birkhoff 系统, 组合梯度系统, 积分, 稳定性

PACS: 45.20.Jj, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.64.184501

1 引 言

Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的一种推广. Birkhoff 力学在强子物理、统计力学、空间力学、工程、生物物理等领域都有重要应用 [1]. Birkhoff 系统动力学的研究已取得重要进展 [1−11]. 文献 [5] 在研究 Pfaff-Birkhoff 原理的广义准对称变换时, 在 Birkhoff 方程的右端出现一附加项, 并称其为广义 Birkhoff 方程. 文献 [12] 提出了广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架. 有关广义 Birkhoff 系统动力学的研究已取得了一些进展 [12−17].

专著 [18] 第 9 章 "大范围的非线性技巧" 中研究了两类重要系统, 一类是梯度系统, 另一类是 Hamilton 系统. 梯度系统是微分方程和动力系统中的重要问题, 特别适合用 Lyapunov 函数来研究. 如果一个力学系统能够成为梯度系统, 那么就可利用梯度系统的性质来研究力学系统的行为, 特别是稳定性问题. 文献 [19] 介绍了梯度系统与力学系统的关联. 文献 [20] 介绍了线梯度系统, 其中斜梯度系统有重要意义. 本文首先将梯度系统和斜梯度系统组合起来, 并称之为组合梯度系统, 研究这类系统的性质. 其次, 将广义 Birkhoff 系统在一定条件下化成组合梯度系统, 并利用组合梯度系统的性质来研究广义 Birkhoff 系统的积分和稳定性.

2 组合梯度系统

梯度系统的微分方程为 [18]

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{1}$$

其中 $V = V(\boldsymbol{x})$ 称为势函数. 斜梯度系统的微分方程为 [20]

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{2}$$

其中

$$a_{ij} = -a_{ji}, \tag{3}$$

而 V 称为能量函数.

现将梯度系统和斜梯度系统组合起来, 得到一类组合梯度系统, 其微分方程为

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{4}$$

按方程 (4) 求函数 V 对时间的导数 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}. \tag{5}$$

---

* 国家自然科学基金 (批准号: 10932002, 11272050) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn

由 (a_{ij}) 的反对称性知, 上式右端第二项为零, 于是有

$$\dot{V}=-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2\leqslant 0. \tag{6}$$

由方程 (4) 和 (6) 式, 可得以下结果.

命题 1　假设方程

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{7}$$

有解

$$x_i=x_{i0},\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{8}$$

则 (8) 式也是方程 (4) 的解.

命题 2　在解 (8) 上, 函数 $\dot{V}$ 为零或为负.

命题 3　在解 (8) 上, 如果函数 $\dot{V}$ 恒为零, 那么 V 是系统 (4) 的积分.

由以上性质, 利用 Lyapunov 定理可得下述结果.

命题 4　如果 V 为 Lyapunov 函数, 它在解 $x_i=x_{i0}$ 上为零, 并在其邻域内正定或负定, 且 $\dot{V}=0$, 那么解 (8) 是稳定的; 如果 V 正定, 且 $\dot{V}$ 负定, 那么解 (8) 是渐近稳定的.

如果函数 V 不能成为 Lyapunov 函数, 在一定条件下, 有可能利用 Rumyantsev 关于部分变量稳定性定理来研究组合梯度系统的部分变量稳定性.

利用上述命题, 可研究化成组合梯度系统的约束力学系统的积分和稳定性问题.

3　广义 Birkhoff 系统与组合梯度系统

广义 Birkhoff 系统的微分方程为 [5]

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right),\quad \mu=1,2,\cdots,2n, \tag{9}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数, $R_{\nu}=R_{\nu}(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数组, $\Lambda_{\nu}=\Lambda_{\nu}(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项, 而

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}, \tag{10}$$

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}. \tag{11}$$

为将广义 Birkhoff 系统化成组合梯度系统, 假设

$$B=B(\boldsymbol{a}),\ R_{\nu}=R_{\nu}(\boldsymbol{a}),\ \Lambda_{\nu}=\Lambda_{\nu}(\boldsymbol{a}),\quad \nu=1,2,\cdots,2n, \tag{12}$$

此时, 方程 (9) 成为

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}-\Lambda_{\nu}\right). \tag{13}$$

方程 (13) 一般不是一个梯度系统, 也不是一个斜梯度系统, 更不是一个组合梯度系统. 对比 (13) 式与 (4) 式, 有如下结果.

命题 5　若存在函数 $V=V(\boldsymbol{a})$ 和反对称矩阵 $(a_{\mu\nu})$, 使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}-\Lambda_{\nu}\right)=-\frac{\partial V}{\partial a^{\mu}}+\sum_{\nu=1}^{2n}\boldsymbol{a}_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^{\nu}},\quad \mu=1,2,\cdots,2n, \tag{14}$$

则广义 Birkhoff 系统成为一个组合梯度系统.

Birkhoff 系统是广义 Birkhoff 系统的特例, 因此有如下结果.

推论　若存在函数 $V=V(\boldsymbol{a})$ 和反对称矩阵 $(a_{\mu\nu})$, 使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}=-\frac{\partial V}{\partial a^{\mu}}+\sum_{\nu=1}^{2n}\boldsymbol{a}_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^{\nu}},\quad \mu=1,2,\cdots,2n, \tag{15}$$

则 Birkhoff 系统成为一个组合梯度系统.

命题 6　若存在函数 $V=V(\boldsymbol{a})$, 使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}-\Lambda_{\nu}\right)=-\frac{\partial V}{\partial a^{\mu}},\quad \mu=1,2,\cdots,2n, \tag{16}$$

则广义 Birkhoff 系统成为一个梯度系统.

推论　若存在函数 $V=V(\boldsymbol{a})$, 使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}=-\frac{\partial V}{\partial a^{\mu}},\quad \mu=1,2,\cdots,2n, \tag{17}$$

则 Birkhoff 系统成为一个梯度系统.

命题 7　若存在函数 $V=V(\boldsymbol{a})$ 和反对称矩阵 $(a_{\mu\nu})$, 使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}-\Lambda_{\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{2n}a_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^{\nu}},\quad \mu=1,2,\cdots,2n, \tag{18}$$

则广义 Birkhoff 系统成为一个斜梯度系统, 此时 V 为系统的积分.

推论 1　若存在函数 $V=V(\boldsymbol{a})$, 使得

$$\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\Lambda_{\mu}=\frac{\partial V}{\partial a^{\mu}},\quad \mu=1,2,\cdots,2n, \tag{19}$$

可取

$$\Omega^{\mu\nu} = a_{\mu\nu}, \tag{20}$$

则广义Birkhoff系统成为一个斜梯度系统, 此时V为系统的积分.

推论2 Birkhoff系统必是一个斜梯度系统.

4 算 例

例1 广义Birkhoff系统为

$$\begin{aligned}
&R_1 = 0, \quad R_2 = a^1, \quad R_3 = 0, \quad R_4 = a^3,\\
&B = \frac{1}{2}\left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2 + \left(a^4\right)^2\right],\\
&\Lambda_1 = a^1 + a^2 - a^2a^4,\\
&\Lambda_2 = a^2 - a^1 + a^1a^3,\\
&\Lambda_3 = a^3 + a^4 + \left(a^2\right)^2,\\
&\Lambda_4 = a^4 - a^3 - \left(a^1\right)^2.
\end{aligned} \tag{21}$$

试将其化为组合梯度系统, 并研究其零解的稳定性.

方程(13)给出

$$\begin{aligned}
&\dot{a}^1 = -a^1 + a^1a^3, \quad \dot{a}^2 = -a^2 + a^2a^4,\\
&\dot{a}^3 = -a^3 - \left(a^1\right)^2, \quad \dot{a}^4 = -a^4 - \left(a^2\right)^2.
\end{aligned}$$

取$V = B$, 则上式可表示为

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\\ \dot{a}^3\\ \dot{a}^4\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & a^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a^2\\ -a^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^3}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^4}\end{pmatrix},$$

这就是一个组合梯度系统了. 按方程计算$\dot{V}$, 得

$$\dot{V} = -\left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 - \left(a^3\right)^2 - \left(a^4\right)^2,$$

它在零解$a^1 = a^2 = a^3 = a^4 = 0$邻域内是负定的, 而$V$是正定的, 由命题4知, 零解是渐近稳定的.

例2 广义Birkhoff系统为

$$\begin{aligned}
&R_1 = a^2, \quad R_2 = 0, \quad B = \frac{1}{2}\left(a^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a^2\right)^2,\\
&\Lambda_1 = \left(a^1\right)^2, \quad \Lambda_2 = \left(a^2\right)^2.
\end{aligned} \tag{22}$$

试研究其零解的稳定性.

方程(13)给出

$$\dot{a}^1 = a^2 - \left(a^2\right)^2, \quad \dot{a}^2 = -a^1 + \left(a^1\right)^2,$$

它可化成一个斜梯度系统, 其中

$$\begin{aligned}
&V = \frac{1}{2}\left(a^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a^2\right)^2 - \frac{1}{3}\left(a^1\right)^3 - \frac{1}{3}\left(a^2\right)^3,\\
&\left(a_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因V是系统的一个积分, 且它在$a^1 = a^2 = 0$的邻域内是正定的, 因此零解是稳定的.

例3 广义Birkhoff系统为

$$\begin{aligned}
&R_1 = 0, \quad R_2 = a^1, \quad B = \frac{1}{2}\left(a^1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(a^2\right)^2,\\
&\Lambda_1 = a^1 - a^2, \quad \Lambda_2 = -a^1 - a^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

方程(13)给出

$$\dot{a}^1 = -a^1, \quad \dot{a}^2 = a^2.$$

上式可表示为

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix},$$

其中

$$V = B = \frac{1}{2}\left(a^1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(a^2\right)^2,$$

这是一个梯度系统. 按方程求$\dot{V}$, 得

$$\dot{V} = -\left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2,$$

由V和$\dot{V}$, 按Rumyantsev部分变量稳定性定理知, 零解$a^1 = a^2 = 0$相对变量a^1是稳定的, 并且是渐近稳定的; 零解$a^1 = a^2 = 0$相对变量a^2是不稳定的.

方程还可表示为

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix},$$

其中

$$V = -a^1a^2,$$

这是一个斜梯度系统, 而V是系统的一个积分.

5 结　论

梯度系统和斜梯度系统对研究系统的积分和稳定性问题都有重要意义, 梯度系统和斜梯度系统组合起来的系统对研究系统的积分和稳定性问题也有重要意义. 广义Birkhoff系统是一类比Lagrange系统、Hamilton系统、Birkhoff系统更为广泛的一类约束力学系统. 本文的命题1—命题4给出组合梯度系统的主要性质, 命题5—命题7给出广义Birkhoff系统成为组合梯度系统的条件. 广义Birkhoff系统成为组合梯度系统之后, 便可利用组合梯度系统的性质来研究广义Birkhoff系统的积分和稳定性问题.

参考文献

[1] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II* (New York: Springer-Verlag)

[2] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬 1996 Birkhoff系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[3] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff, Nambu Systems* (Moskow: UFN) (in Russian)

[4] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇, 梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京: 科学出版社)]

[5] Mei F X 1993 *Sci. China Ser. A* **36** 1456

[6] Zhang Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 437

[7] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

[8] Chen X W, Zhang R C, Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **16** 282

[9] Zhang H B, Gu S L 2002 *Chin. Phys.* **11** 765

[10] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[11] Fu J L, Chen X W, Luo Y 2003 *Chin. Phys.* **12** 351

[12] Mei F X, Zhang Y F, He G, Gang T Q, Xie J F 2007 *Trans. Beijing Inst. Tech.* **27** 1035 (in Chinese) [梅凤翔, 张永发, 何光, 江铁强, 解加芳 2007 北京理工大学学报 **27** 1035]

[13] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Mech. Sin.* **24** 583

[14] Shang M, Mei F X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3155

[15] Mei F X, Wu H B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050301

[16] Li Y M, Mei F X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5219 (in Chinese) [李彦敏, 梅凤翔 2010 物理学报 **59** 5219]

[17] Li Y M, Mei F X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080302

[18] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L 2008 *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos* (Singapore: Elsevier)

[19] Mei F X 2012 *Mech. Eng.* **34** 89 (in Chinese) [梅凤翔 2012 力学与实践 **34** 89]

[20] McLachlan R I, Quispel G R W, Robidoux N 1999 *Phil. Tran. R. Soc. Lond. A* **357** 1021

Generalized Birkhoff system and a kind of combined gradient system*

Mei Feng-Xiang[1)] Wu Hui-Bin[2)†]

1) (*School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

2) (*School of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

(Received 24 February 2015; revised manuscript received 6 May 2015)

Abstract

A combined gradient system which is obtained by adding a gradient system to a skew-gradient system is proposed. The property of the system is studied. Three results on its solution are obtained. Moreover, a criterion on the stability of the system is presented. The generalized Birkhoff system is a more extensive constrained mechanical system than Lagrange system, Hamilton system and Birkhoff system. The conditions under which a generalized Birkhoff system can be considered as a combined gradient system are given. When a generalized Birkhoff system is transformed into a combined gradient system, its integration and stability can be discussed by using the property. Finally, some examples are given to illustrate the application of our results.

Keywords: generalized Birkhoff system, combined gradient system, integration, stability

PACS: 45.20.Jj, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.64.184501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 11272050).

† Corresponding author. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn