

一个新的自由能函数对介电高弹薄膜的多组等双轴预拉伸下力电耦合实验的预测

蒋世明

A new free energy model for predicting the qual-biaxial tests of dielectric elastomers

Jiang Shi-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 184601 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.184601

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184601>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I18>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

标准线性固体材料中球面应力波传播特征研究

Characteristics of spherical stress wave propagation in the standard linear solid material

物理学报.2015, 64(10): 108301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.108301>

石墨烯-纳米探针相互作用有限元准静态计算

Quasi-static finite element calculation of interaction between graphene and nanoprobe

物理学报.2014, 63(15): 154601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.154601>

热惯性对热弹性行为影响的渐近分析

Asymptotic analysis for effect of thermal inertia on thermal behaviors

物理学报.2013, 62(21): 214601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.214601>

# 一个新的自由能函数对介电高弹薄膜的多组等双轴预拉伸下电力耦合实验的预测

蒋世明<sup>†</sup>

(同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

(2015年2月15日收到; 2015年5月8日收到修改稿)

当介电高弹聚合物薄膜被施以面内等双轴预拉伸后, 受到厚度方向的电压作用时, 薄膜在力场和电场共同作用下产生大变形. 电场采用 Maxwell 应力分析, 力场采用橡胶弹性模型分析. 拟合这类变形的常用橡胶弹性模型主要有 Neo-Hookean, Arruda-Boyce, Gent 等模型. 这些模型对实验数据的定量拟合存在不同程度的偏差. 通过对实验数据的分析, 结合数学方法, 提出了一个新的自由能函数模型. 通过该模型对 VHB4905 介电高弹聚合物薄膜的多组等双轴预拉伸电力耦合实验进行拟合, 并以 Neo-Hookean, Gent 模型作为对照, 结果与实验数据拟合很好, 比对照模型的偏差明显缩小.

**关键词:** 介电高弹聚合物, 电力耦合, 新自由能函数

**PACS:** 46.05.+b, 83.80.Va

**DOI:** 10.7498/aps.64.184601

## 1 引言

电压作用下, 电介质材料发生变形. 不同的材料电致变形差别非常明显, 压电陶瓷<sup>[1-4]</sup>获得的变形小于1%, 玻璃和半晶聚合物获得的变形小于10%. 介电高弹聚合物材料是20世纪90年代初发展起来的一种新材料, 介电高弹聚合物材料具有大的变形能力(380%). 同时介电高弹性聚合物材料还有能量密度高(3.4 J/g)、重量轻、反应速度快(ms量级)、驱动效率高等特点. 由于这些特点, 介电高弹聚合物材料可被加工成驱动器、传感器及能量采集器<sup>[5-7]</sup>等, 有望在机器人、空天技术、生物医学、能量采集方面发挥重大的作用. 这些驱动器、传感器及能量采集器的核心部分是一层上下表面附有柔性电极的介电高弹聚合物薄膜. Perlin<sup>[8]</sup>通过实验发现预拉伸可以极大地提高介电高弹薄膜的变形能力. 但这些介电高弹聚合物薄膜在工作时失效比率很高, 极大地阻碍了它们的实际应用. 预拉伸如何影响介电高弹聚合物薄膜的变形能力是一个

重要问题.

目前已有一些理论研究对预拉伸后介电高弹聚合物薄膜电致变形实验进行了分析, 哈佛大学 Zhao 和 Suo<sup>[9]</sup>采用 Neo-Hookean 模型, 国内哈工大 Liu 等<sup>[10]</sup>采用 Mooney-Rivlin 模型. Suo 等随后在解释介电高弹聚合物薄膜电致变形和探讨能量俘获时, 又采用 Arruda-Boyce 模型<sup>[11-13]</sup>、Gent 模型<sup>[14-16]</sup>拟合实验数据. 加州大学洛杉矶分校 Pei 等采用 Gent 模型<sup>[17]</sup>对另外的实验数据进行了拟合. Akbaria 等<sup>[18]</sup>采用 Gent 模型对硅橡胶电力失稳进行分析, 并通过实验进行了验证. Arruda-Boyce, Gent 模型可以反映出介电高弹聚合物材料接近极限拉伸时的硬化. Gent 模型是目前普遍采用的自由能函数模型. 据作者所知, 目前有一种模型可以完美地拟合实验. 重新审视介电高弹聚合物材料的本构关系, 仍具有重要意义.

本文通过对实验数据的分析, 在主流模型的基础上引入数学分析方法, 建立了一个新的自由能密度函数, 用以更精准地拟合预测工程实际.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [jiangshiming80@163.com](mailto:jiangshiming80@163.com)

## 2 介电高弹聚合物薄膜预应力及电场耦合作用下的平衡方程

介电高弹驱动器由介电高弹聚合物薄膜和附在上面的柔性电极构成. 当介电高弹聚合物薄膜被施以双轴预拉伸后, 受到厚度方向的电压作用时, 薄膜在力和电场共同作用下面内产生非线性大变形(图1). 图1(a)为介电高弹聚合物薄膜的

初始状态, 既无力作用也无电压作用, 其厚度为  $t_0$ , 长度和宽度分别为单位长度1, 1. 图1(b)为介电高弹聚合物薄膜的预拉伸状态, 薄膜受到外力  $P_1, P_2$ , 厚度变为  $t_1$ , 面内两个方向分别扩展  $\lambda_{p1}$  倍和  $\lambda_{p2}$  倍. 图1(c)是电场与力耦合作用下介电高弹聚合物薄膜的最终平衡态, 在面内预拉伸的基础上, 水平方向保持外力  $P_1, P_2$ , 厚度方向加电压  $V$ , 薄膜厚度变为  $t_f$ , 面内两个方向分别扩展  $\lambda_1$  倍和  $\lambda_2$  倍.

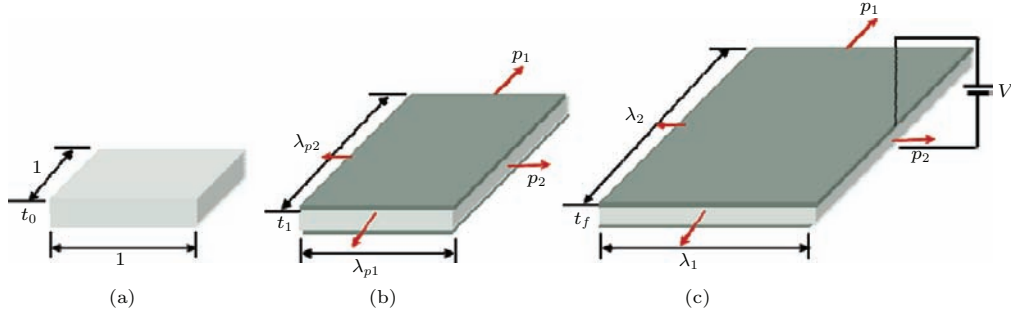


图1 介电驱动器在力和电压作用下的变形示意图

Fig. 1. Dielectric elastomer actuator (DEA) operating principle.

双轴拉力和电场共同作用下, 理想介电高弹聚合物薄膜的面内方向平衡方程为

$$\sigma_{pi} + \epsilon E^2 = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$\sigma_{p1}, \sigma_{p2}$  是外力  $P_1, P_2$  预拉伸作用产生的面内真实应力;  $\epsilon$  是聚合物薄膜的介电常数, 它是不依赖于变形的常数;  $E$  是电压作用下的真实电场,  $E = V/t_f$ ,  $t_f = t_0/(\lambda_1 \lambda_2)$ ;  $W$  是自由能函数. 该平衡方程反映了外力  $P_1, P_2$  预拉伸作用产生的面内真实应力  $\sigma_{p1}, \sigma_{p2}$  和外加电压  $V$  产生的面内等效 Maxwell 应力  $\epsilon E^2$  共同作用下介电高弹聚合物薄膜达到平衡态的情况.

## 3 新自由能函数的建立

### 3.1 真实应力 $\sigma_{p1}(\lambda_1, \lambda_{p1}), \sigma_{p2}(\lambda_2, \lambda_{p2})$

以及  $\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}, \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$  表达式

考虑如图1的均匀变形形式, 初始构型中的参考点坐标为  $X$ , 双轴外力作用下, 当前构型中参考点的坐标为  $x(X)$ , 变形张量  $\mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial X}$ .

三向拉伸时, 变形张量为

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  分别是介电高弹聚合物薄膜三个方向的伸长比.

右 Cauchy-Green 变形张量为

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

三个不变量为

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2},$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (\text{不可压条件}). \quad (2)$$

Cauchy 应力  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T + p \mathbf{I}$ ; 本文中所有模型自由能函数  $W$  仅仅是第一不变量  $I_1$  的函数;  $p$  是静水压力, 由边界条件确定;  $\mathbf{I}$  是单位矩阵.

Cauchy 应力写成分量形式

$$\sigma_i = \lambda_i \left[ \frac{\partial W(I_1)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} \right] + p, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

为消去静水压力  $p$ , (3) 式第一项第二项分别减去第三项得

$$\sigma_i - \sigma_3 = \left(2 \frac{\partial W(I_1)}{\partial I_1}\right) (\lambda_i^2 - \lambda_3^2), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

在如图 1 的 1, 2 方向的外力预拉伸作用下, 面内两个方向的真实应力

$$\sigma_{pi} = \left(2 \frac{\partial W(I_1)}{\partial I_1}\right) (\lambda_{pi}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \frac{\lambda_i}{\lambda_{pi}}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

真实应力  $\sigma_{p1}, \sigma_{p2}$  是外力  $P_1, P_2$  预拉伸产生的应力, 开始是预拉伸状态的伸长比  $\lambda_{p1}, \lambda_{p2}$  的函数, 施加电场后  $P_1, P_2$  继续作用,  $\sigma_{p1}, \sigma_{p2}$  又是伸长比  $\lambda_1, \lambda_2$  的函数.

自由能函数采用 Neo-Hookean 模型时

$$W(I_1) = \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3), \quad (6)$$

则

$$\begin{aligned} & \sigma_{pi}(\lambda_i, \lambda_{p1}, \lambda_{p2}) \\ &= \mu (\lambda_{pi}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \frac{\lambda_i}{\lambda_{pi}}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i \frac{\partial W(I_1)}{\partial \lambda_i} = \lambda_i \frac{\partial W(I_1)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} \\ &= \mu (\lambda_i^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

自由能函数采用 Arruda-Boyce 模型时

$$W = nkTN \left( \frac{r_{\text{chain}}}{Nl} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right), \quad (9)$$

则

$$\begin{aligned} & \sigma_{pi}(\lambda_i, \lambda_{p1}, \lambda_{p2}) \\ &= \frac{nkT}{3} N \phi^{-1} \left[ \frac{\lambda_{\text{chain}}}{\sqrt{N}} \right] \frac{(\lambda_{pi}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \lambda_i}{\lambda_{\text{chain}} \lambda_{pi}}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i \frac{\partial W(I_1)}{\partial \lambda_i} \\ &= \frac{nkT}{3} N \phi^{-1} \left[ \frac{\lambda_{\text{chain}}}{\sqrt{N}} \right] \frac{\lambda_i^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}}{\lambda_{\text{chain}}}, \end{aligned} \quad (11)$$

具体推导参见 Arruda 和 Boyce, 1993<sup>[19]</sup>.

目前, 自由能函数最常采用 Gent 模型<sup>[14-18]</sup>

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} Ln(1 - (I_1 - 3)/J_m), \quad (12)$$

则

$$\sigma_{pi}(\lambda_i, \lambda_{p1}, \lambda_{p2})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu}{1 - (I_1 - 3)/J_m} (\lambda_{pi}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \frac{\lambda_i}{\lambda_{pi}}, \\ & \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i \frac{\partial W(I_1)}{\partial \lambda_i} \\ &= \frac{\mu}{1 - (I_1 - 3)/J_m} (\lambda_i^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}), \\ & \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

### 3.2 新自由能函数的建立

在 3.1 节中的各种自由能函数模型与实验结果相比较, 都存在不同程度的偏差, 没有哪一种模型能完美地拟合实验数据.

本文在上述模型的基础上引入待定参数  $C(\lambda_1, \lambda_2)$ , 重新构建  $\sigma_p(\lambda, \lambda_p)$ ,  $\lambda \frac{\partial W(I_1)}{\partial \lambda}$ , 来缩小实验数据与上述模型之间的偏差.

假设

$$\begin{aligned} \sigma_{p1}(\lambda_1, \lambda_{p1}) &= C(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_{p1}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right), \\ \sigma_{p2}(\lambda_2, \lambda_{p2}) &= C(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_{p2}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_{p2}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial W(I_1)}{\partial \lambda_1} &= C(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}), \\ \lambda_2 \frac{\partial W(I_2)}{\partial \lambda_2} &= C(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}). \end{aligned} \quad (16)$$

当

$$\begin{aligned} C(\lambda_1, \lambda_2) &= \mu, \\ C(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{nkT}{3} N \phi^{-1} \left[ \frac{\lambda_{\text{chain}}}{\sqrt{N}} \right] \frac{1}{\lambda_{\text{chain}}}, \\ C(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\mu}{1 - (I_1 - 3)/J_m} \end{aligned}$$

时, 关系式 (15) 和 (16) 分别变为 Neo-Hookean 模型推导出的关系式 (7) 和 (8)、Arruda-Boyce 模型推导出的关系式 (10) 和 (11)、Gent 模型推导出的关系式 (13) 和 (14).

真实电场

$$E = \lambda_1 \lambda_2 \frac{V}{t_0}, \quad (17)$$

将 (15), (16) 和 (17) 式代入平衡方程 (1), 得

$$\begin{aligned} & C(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}) \\ &= C(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_{p1}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right) \\ & \quad + \varepsilon \left( \lambda_1 \lambda_2 \frac{V}{t_0} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & C(\lambda_1, \lambda_2)(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}) \\
 &= C(\lambda_1, \lambda_2)(\lambda_{p2}^2 - \lambda_{p1}^{-2}\lambda_{p2}^{-2})\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{p2}}\right) \\
 &+ \varepsilon\left(\lambda_1\lambda_2\frac{V}{t_0}\right)^2, \tag{18}
 \end{aligned}$$

$V, t_0$  分别是外加厚度方向的电压和介电薄膜的初始厚度.

等双轴预拉伸条件下, 外力  $P_1 = P_2 = P$ , 预拉伸伸长比  $\lambda_{p1} = \lambda_{p2} = \lambda_p$ , 伸长比  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = \lambda^{-2}$ .  $C(\lambda_1, \lambda_2)$  是  $\lambda$  的函数, 记为  $C(\lambda)$ .

(18) 式变为

$$\begin{aligned}
 & C(\lambda)(\lambda^2 - \lambda^{-4}) \\
 &= C(\lambda)(\lambda_p^2 - \lambda_p^{-4})\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right) + \varepsilon\left(\lambda^2\frac{V}{t_0}\right)^2. \tag{19}
 \end{aligned}$$

从 (19) 式中可解出

$$C(\lambda) = \frac{\varepsilon\left(\frac{V\lambda^2}{t_0}\right)^2}{\lambda^2 - \lambda^{-4} - (\lambda_p - \lambda_p^{-4})\frac{\lambda}{\lambda_p}}. \tag{20}$$

待定参数  $C(\lambda_1, \lambda_2)$  通过 Suo 等<sup>[14]</sup>2012 年的 VHB4905 介电高弹聚合物薄膜力电耦合实验 (图 2) 来确定. 薄膜厚度  $t_0 = 0.5 \text{ mm}$ , 介电常数  $\varepsilon = 3.98 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ . 该实验包含六组等双轴预拉伸条件下的力电耦合实验, 预拉伸值分别为  $\lambda_p = 1.22, 1.56, 1.75, 2.08, 2.504, 2.87$ .

将图 2 的六组预拉伸实验点  $(\lambda, V)$  数值代入关系 (20) 式, 可得图 3 的实心散点  $(\lambda, C(\lambda))$  数值.

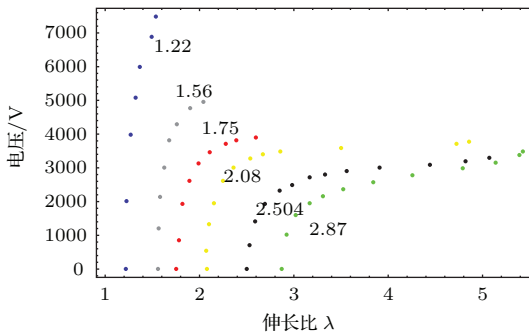


图 2 (网刊彩色) 六组 VHB4905 介电高弹聚合物薄膜等双轴力电耦合实验 (预拉伸值  $\lambda_p$  是试验点与横坐标的交点, 实验数据选自 Suo<sup>[14]</sup>)

Fig. 2. (color online) 6 Group of equal-biaxial electromechanical couple experiment of VHB4905, experimental point adapted from Suo et al.<sup>[14]</sup>.

从图 3 中可以看出, 在  $\lambda \leq 3$  时,  $C(\lambda)$  可以用一常数来拟合, 可以解释 Neo-Hookean 模型在小变形阶段能较好地拟合数据、而在大变形阶段偏差很

大的现象. 图 3 实心散点呈比较规律的分布, 可用指数函数来拟合. 假设

$$C(\lambda) = a + be^{\sqrt{I_1-3}}. \tag{21}$$

用商用软件 Mathematica 拟合图 3, 获得参数  $a = 56239, b = 33.8$ , 得到确定的函数关系  $C(\lambda) = 56239 + 33.8e^{\sqrt{I_1-3}}$ , 该函数与图 3 实心点拟合较好. 积分关系式  $\lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = (a + be^{\sqrt{I_1-3}})(\lambda_i^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}), i = 1, 2$ , 可得新的自由能函数

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{a}{2}(I_1 - 3) \\
 &+ b[e^{\sqrt{I_1-3}}(\sqrt{I_1 - 3} - 1) + 1]. \tag{22}
 \end{aligned}$$

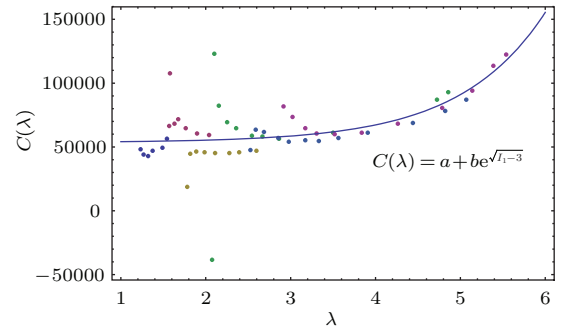


图 3 (网刊彩色) VHB4905 实验  $C(\lambda)$  与  $\lambda$  的数值 (实心点为六组预拉伸下  $\lambda, C(\lambda)$  实验数值, 实线为函数  $C(\lambda) = 56239 + 33.8e^{\sqrt{I_1-3}}$ )

Fig. 3. (color online) The relationship between  $C(\lambda)$  and  $\lambda$  from VHB4905 test result.

#### 4 新自由能函数模型与 Neo-Hookean 模型、Gent 模型拟合 VHB4905 实验对比

采用 3.2 节中的新自由能函数即关系 (22) 式, 推导得

$$\begin{aligned}
 \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} &= (a + be^{\sqrt{I_1-3}})(\lambda_i^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}), \\
 & i = 1, 2, \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_p = (a + be^{\sqrt{I_1-3}})(\lambda_p^2 - \lambda_p^{-4})\frac{\lambda}{\lambda_p}. \tag{24}$$

与 Neo-Hookean 模型、Gent 模型推导出来的关系式 (7) 和 (8), (13) 和 (14) 形成对照组. 上述三组关系式分别代入平衡方程 (1), 求得电压  $V$  与伸长比的关系, 与 VHB4905 介电高弹聚合物薄膜的六组等双轴预拉伸力电耦合实验数据 (图 2) 进行拟合对照 (图 5).

图 4 是用新自由能函数拟合图 2 VHB4905 实验的对比情况, 理论曲线与实验曲线符合得很好.

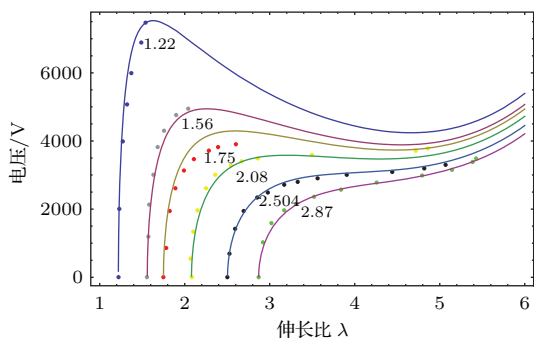


图4 (网刊彩色) 新自由能函数对VHB4905实验的拟合 (实心散点来自图2, 六条曲线是新自由能函数对实验数据的拟合)

Fig. 4. (color online) VHB4905 experimental data is fitted by new free energy model.

图5(a)–(f)分别反映VHB4905介电高弹聚合物薄膜在等双轴预拉伸 $\lambda_p = 1.22, 1.56, 1.75,$

2.08, 2.504, 2.87时电压与面内伸长的关系, 以及三组模型对实验数据的拟合.

从图5(a)可以看出, 三种模型在小变形区域对实验都能较好地拟合, 可以认为三种模型在小变形时是等效的. 在图5(b)中Neo-Hookean模型已经有明显偏差, 新的自由能函数与Gent模型都能较好地拟合实验数据. 图5(d)中Neo-Hookean模型已经偏差很大, 新的自由能函数与Gent模型都能较好地拟合实验数据. 图5(e)和图5(f)中可以看出Neo-Hookean模型的预测严重偏离实验点, 已无法拟合变形趋势; Gent模型的预测虽比Neo-Hookean模型好许多, 但在 $3.5 < \lambda < 5.5$ 阶段与实验点偏差明显; 而新的自由能函数的预测能很好地拟合实验点.

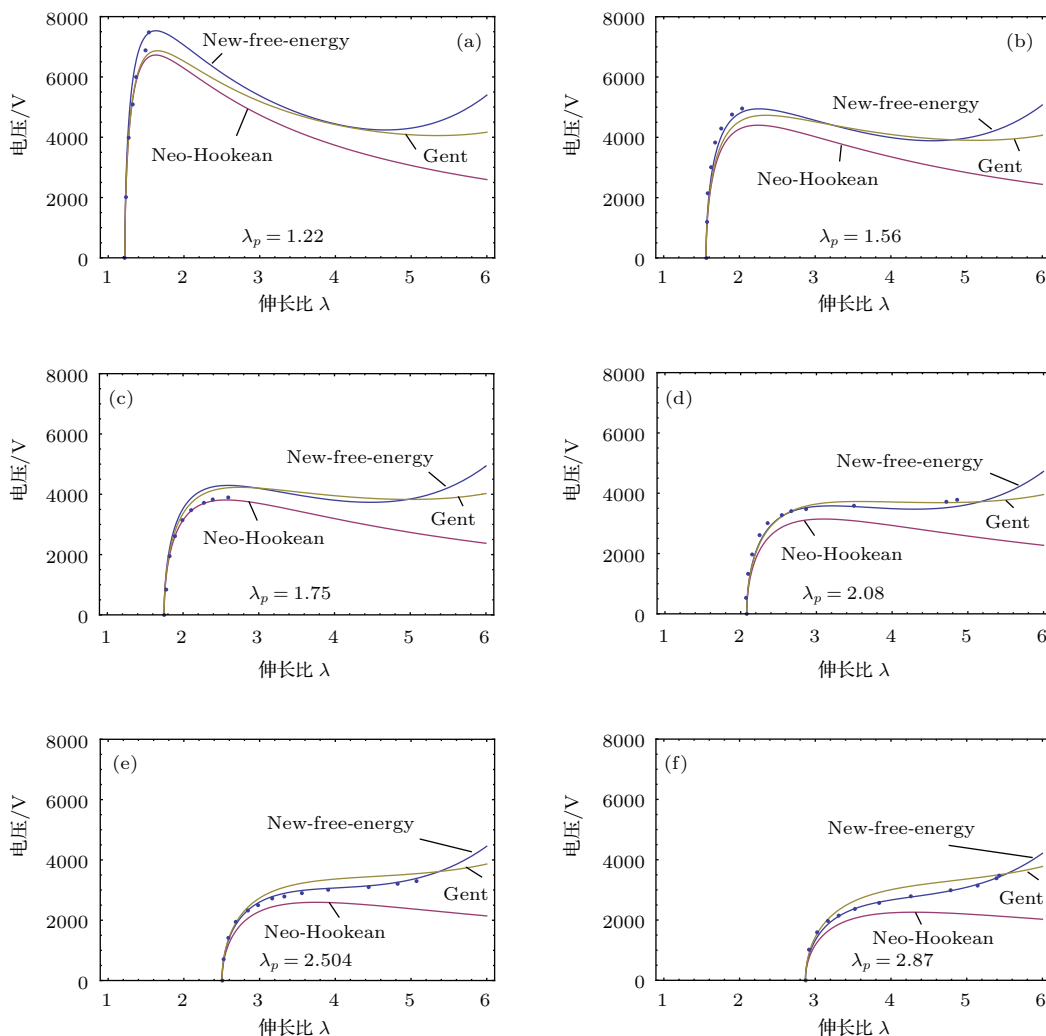


图5 (网刊彩色) 三组自由能函数对VHB4905实验的拟合比较

Fig. 5. (color online) VHB4905 experimental data is fitted by Neo-Hookean, Gent model and New Free Energy Function (formula 22).

## 5 结 论

当介电高弹聚合物薄膜受到等双轴力和电场耦合作用时, 已有的自由能函数模型不能完美地预测其变形. 本文在VHB4905介电高弹聚合物薄膜实验数据分析的基础上, 结合主流自由能函数模型, 借助数学分析方法, 提出一个新的自由能函数

$$W = \frac{a}{2}(I_1 - 3) + b[e^{\sqrt{I_1 - 3}}(\sqrt{I_1 - 3} - 1) + 1].$$

将该自由能函数模型与Neo-Hookean模型、Gent模型形成对照组, 对VHB4905实验结果进行拟合. 结果显示: Neo-Hookean模型仅适合小预拉伸小变形预测; Gent模型适合小、中预拉伸和小、中变形预测, 以及定性分析, 但对 $\lambda$ 大于3.5以上的变形拟合有明显偏差; 新的自由能函数模型在小变形、中变形和大变形均拟合较好. 新的自由能函数模型优于Neo-Hookean模型和Gent模型, 可以为介电高弹聚合物材料和结构的性能研究提供重要支持, 并更好地应用于工程实际.

## 参考文献

- [1] Park S, Shrout T R 1997 *J. Appl. Phys.* **82** 1804
- [2] Sun S, Cao S Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210505 (in Chinese) [孙舒, 曹树谦 2012 物理学报 **61** 210505]
- [3] Li H T, Qin W Y, Zhou Z Y, Lan C B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 220504 (in Chinese) [李海涛, 秦卫阳, 周至勇, 蓝春波 2014 物理学报 **63** 220504]
- [4] Qiang L, Zhang R, Tian Q L, Zheng L M 2015 *Chin. Phys. B* **24** 053101
- [5] McKay T, O'Brien B M, Calius E, Anderson I A 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 062911
- [6] Kaltseis R, Keplinger C, Baumgartner R, Kaltenbrunner M, Li T F, Mcachler P, Schwödauer R, Suo Z G, Bauer S 2011 *Appl. Phys. Lett.* **99** 162904
- [7] An P, Guo H, Chen M, Zhao M M, Yang J T, Liu J, Xue C Y, Tang J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 237306 (in Chinese) [安萍, 郭浩, 陈萌, 赵苗苗, 杨江涛, 刘俊, 薛晨阳, 唐军 2014 物理学报 **63** 237306]
- [8] Pelrine R, Kornbluh R, Pei Q, Joseph J 2000 *Science* **287** 836
- [9] Zhao X H, Suo Z G 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 061921
- [10] Liu Y J, Liu L W, Zhang Z, Shi L, Leng J S 2008 *Appl. Phys. Lett.* **93** 106101
- [11] Zhao X H, Suo Z G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 178302
- [12] Koh S J A, Keplinger C, Li T, Siegfried B, Suo Z 2011 *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on* **16** 33
- [13] Suo Z, Zhu J 2009 *Appl. Phys. Lett.* **95** 232909
- [14] Lu T, Huang J, Jordi C, Gabor K, Huang R, David R, Suo Z 2012 *Soft Matter* **8** 6167
- [15] Zhu J, Kollosche M, Lu T, Kofod G, Suo Z 2012 *Soft Matter* **8** 8840
- [16] Kollosche M, Zhu J, Suo Z, Kofod G 2012 *Phys. Rev. E* **85** 051801
- [17] Stoyanov H, Brochu P, Niu X, Lai C, Yun S, Pei Q 2013 *RSC Advances* **3** 2272
- [18] Akbari S, Rosset S, Shea H R 2013 *EAPAD* **8** 687
- [19] Arruda E M, Boyce M C 1993 *J Mech Phys. Solids* **41** 389

# A new free energy model for predicting the equal-biaxial tests of dielectric elastomers

Jiang Shi-Ming<sup>†</sup>

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics of Tongji University, Shanghai 200092, China)

( Received 15 February 2015; revised manuscript received 8 May 2015 )

## Abstract

Dielectric elastomeric actuators (DEAs) have been intensely studied in the recent decades. Their attractive features include large deformation(380%), large energy density(3.4 J/g), light weight, fast response(<1 ms), and high efficiency (80%–90%). They can be used in medical devices, space robotics and energy harvesters. The core part of DEAs is a dielectric elastomeric film with two electordes. When pre-stretched forces are exerted on the film in plane direction and voltage is applied across its thickness, the film achieves a large deformation. Usually the effect of electric field is described by Maxwell stress  $\varepsilon E^2$ , and the effect of mechanical field is described by free energy function models (such as Neo-Hookean model, Arruda-Boyce model and Gent model). There are deviations in varying degree between every models and tests of dielectric elastomer. No model works perfectly.

In the present paper, a new free energy function model is given to reduce the deviation. According to the main models above, an undetermined parameter  $C(\lambda_1, \lambda_2)$  is introduced. and  $\lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = C(\lambda_1, \lambda_2)(\lambda_i^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2})$ ,  $\sigma_{pi} = C(\lambda_1, \lambda_2)(\lambda_{pi}^2 - \lambda_{p1}^{-2} \lambda_{p2}^{-2}) \frac{\lambda_i}{\lambda_{pi}}$ ,  $i = 1, 2$ , are assumed. The new  $\lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$  and  $\sigma_{pi}$  are substituted into the equation of equilibrium of dielectric elastomer film  $\sigma_{pi} + \varepsilon E^2 = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Under equal-biaxial pre-stretched condition,

$P_1 = P_2 = P$ ,  $\lambda_{p1} = \lambda_{p2} = \lambda_p$ ,  $C(\lambda_1, \lambda_2) = C(\lambda)$ . The parameter  $C(\lambda) = \frac{\varepsilon \left( \frac{V \lambda^2}{t_0} \right)^2}{\lambda^2 - \lambda^{-4} - (\lambda_p - \lambda_p^{-4}) \frac{\lambda}{\lambda_p}}$  is obtained.

Through analysing the test results of VHB4905 which contains a series of equal-biaxial pre-stretched tests, the data  $(\lambda, C(\lambda))$  are obtained from the test data  $(\lambda, V)$ .  $C(\lambda) = a + b e^{\sqrt{I_1 - 3}}$ ,  $(I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$  can be determined by data points  $(\lambda, C(\lambda))$ . By computing the integral of  $\lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = (a + b e^{\sqrt{I_1 - 3}})(\lambda_i^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2})$ ,  $i = 1, 2$ , a new free energy function  $W = \frac{a}{2}(I_1 - 3) + b[e^{\sqrt{I_1 - 3}}(\sqrt{I_1 - 3} - 1) + 1]$  (the new model) is achieved.

The test results of VHB4905 are fitted by Neo-Hookean, Gent model and the new model. Neo-Hookean model fits well only in small deformation. Gent model fits well only in small-middle deformation, and does not work well when stretch  $\lambda > 3.5$ . The new model fits well in small, middle and large deformation. It is better than Neo-Hookean and Gent model. The new model can give big support in the study of dielectric elastomer materials and structure property, and can be used in engineering practice effectively.

**Keywords:** dielectric elastomer polymer, electric-mechanical couple, new free energy function

**PACS:** 46.05.+b, 83.80.Va

**DOI:** 10.7498/aps.64.184601

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [jiangshiming80@163.com](mailto:jiangshiming80@163.com)