

复杂网络可控性研究现状综述

侯绿林 老松杨 肖延东 白亮

Recent progress in controllability of complex network

Hou Lü-Lin Lao Song-Yang Xiao Yan-Dong Bai Liang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 188901 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.188901

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.188901>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于扩展度的复杂网络传播影响力评估算法

[Evaluating influential spreaders in complex networks by extension of degree](#)

物理学报.2015, 64(8): 088901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.088901>

面向结构洞的复杂网络关键节点排序

[Ranking key nodes in complex networks by considering structural holes](#)

物理学报.2015, 64(5): 058902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.058902>

度关联无标度网络上的有倾向随机行走

[Biased random walks in the scale-free networks with the disassortative degree correlation](#)

物理学报.2015, 64(2): 028901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.028901>

双复杂网络间的演化博弈

[Evolutionary gambling dynamics for two growing complex networks](#)

物理学报.2015, 64(1): 018902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.018902>

基于复杂网络理论的微博用户关系网络演化模型研究

[An evolution model of microblog user relationship networks based on complex network theory](#)

物理学报.2014, 63(20): 208902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.208902>

复杂网络可控性研究现状综述

侯绿林^{1)2)†} 老松杨¹⁾ 肖延东¹⁾ 白亮¹⁾

1)(国防科技大学, 信息系统工程国家重点实验室, 长沙 410073)

2)(School of Mathematics and Statistics, The University of Western Australia, Crawley, WA 6009, Australia)

(2015年1月18日收到; 2015年5月8日收到修改稿)

控制复杂系统是人们对复杂系统模型结构及相关动力学进行研究的最终目标, 反映人们对复杂系统的认识能力. 近年来, 通过控制理论和复杂性科学相结合, 复杂网络可控性的研究引起了人们的广泛关注. 在过去的几年内, 来自国内外不同领域的研究人员从不同的角度对复杂网络可控性进行了深入的分析研究, 取得了丰硕的成果. 本文重点讨论了复杂网络的结构可控性研究进展, 详细介绍了基于最大匹配方法的复杂网络结构可控性分析框架, 综述了自2011年以来复杂网络可控性的相关研究成果, 具体论述了不同类型的可控性、可控性与网络拓扑结构统计特征的关联、基于可控性的网络及节点度量、控制的鲁棒性和可控性的相关优化方法. 最后, 对网络可控性未来的研究动态进行了展望, 有助于国内同行开展网络可控性的相关研究.

关键词: 可控性, 复杂网络, 鲁棒性, 可控性优化

PACS: 89.75.Hc, 89.75.Fb, 02.30.Yy

DOI: 10.7498/aps.64.188901

1 引言

近年来, 随着信息科学技术的飞速发展, 各学科理论及应用呈现出交叉、渗透和融合的发展趋势, 使得网络科学迎来了蓬勃的发展, 复杂网络的研究吸引了包括物理、社会学、数学、生物、信息、管理等各个领域科学及工程研究人员广泛的关注. 尤其是1998年 Watts 和 Strogatz^[1] 在《Nature》上报道的小世界网络效应和1999年 Barabási 和 Albert^[2] 在《Science》上揭示的复杂网络无标度 (scale-free, SF) 性质, 开创了复杂网络研究的新纪元. 对复杂网络结构特征和功能的深入探索、网络上各种动力学行为的科学理解以及应用, 已成为当前网络科学的前沿课题.

复杂网络的控制是当前复杂网络研究的焦点, 同时也是分析和研究复杂网络的最终目标. 因此, 研究复杂网络的控制研究在近年来越来越受关注^[3-8]. Chen^[7] 关于复杂网络控制的研究现状, 特别是牵制控制和同步, 以及相关的问题和挑战进行

了阐述^[8]. 复杂网络的控制理论和方法源于经典控制理论与复杂系统研究的结合, 由于自身的复杂性特点使其又不同于经典控制论.

牵制控制^[5-13] 是最早应用于复杂网络研究的控制技术, 也是复杂网络控制研究颇具代表性的一个重要方向, Wang 和 Chen^[5] 在2002年首次将该控制技术引入到无标度复杂动态网络中. 牵制控制的思想是通过有选择地对网络中的若干节点施加控制以驱动整个网络达到所期望的行为. 牵制控制的研究核心在解决可行性和有效性两个方面的问题^[9]: 可行性回答网络能不能被控制, 这方面的研究目前主要集中在对部分节点施加线性反馈而使整个动态网络稳定在期望的同步状态; 控制的有效性则是需要对网络中多少个节点输入信号才能控制整个网络. 除了牵制控制, 蜂拥控制也是个重要的研究方向. Wang 和 Su^[9] 综述了近年关于利用分布式控制的方法使得一个动态网络具有期望行为的一些研究进展. 对于具有固定和连通的拓扑结构的复杂动态网络, 牵制控制策略的有效性与网络拓

† 通信作者. E-mail: houlvlin@gmail.com

扑密切相关. 综述了牵制控制的可行性、稳定性分析以及控制策略比较研究. 另一方面, 对于具有时变拓扑结构的动态网络的控制, 着重综述了移动多自主体网络系统的蜂拥控制, 并特别阐述了如何把牵制控制的思想用于蜂拥控制.

2011年, Liu等^[4]在《Nature》上发表了关于复杂网络的结构可控性论文, 引发了研究人员对网络可控性的研究热潮. 可控性的研究源于经典控制论, 是关于能否通过控制部分节点使得整个系统在有限的时间内从任意初始状态达到任意期望的状态. Liu等^[4]从控制论的思想和方法出发, 利用线性系统结构可控性理论^[14-17], 开拓性地研究了网络的结构可控性问题. 通过引入图的匹配理论和方法^[18-23], 建立了复杂网络可控性分析框架, 解决了传统的Kalman可控性矩阵^[22]无法适用于大规模复杂网络的问题. 自该论文发表以来, 在《Nature》、《Science》和《Physical Review Letters》等世界顶级期刊上, 发表了数十篇关于网络可控性的研究论文, 数百篇的SCI期刊论文. 国内多家研究机构也开展了关于复杂网络可控性的研究, 并取得了相当丰硕的成果.

本课题组隶属于国防科技大学信息系统与管理学院复杂网络与复杂系统研究团队, 近年来对复杂网络可控性开展了相关研究, 主要致力于复杂网络可控性的优化方法、边指向与复杂网络可控性的关系, 以及复杂网络可控的鲁棒性等方面的研究.

鉴于对网络可控性的研究热潮及取得一系列的突破性成果, 本文结合作者所在研究团队进行的可控性相关研究成果, 对于当前众多的关于复杂网络可控性的研究工作进行总结, 旨在为国内相关研究人员提供一个了解认识复杂网络可控性的便利窗口. 本文主要分为以下几个部分进行总结: 可控性简介与结构可控性分析框架, 不同类型可控性的研究, 可控性与网络结构属性的关系分析, 基于可控性的网络和节点度量、控制的鲁棒性研究, 可控性的优化方法.

2 可控性简介与结构可控性分析框架

首先从宏观方面介绍可控性的概念. 在每一个 N 维空间中, t 时刻节点的位置信息可以由一组 N 维向量 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ 来描述, 我们期望在 t' 时刻该节点到达位置

$\mathbf{x}(t') = (x'_1(t'), x'_2(t'), \dots, x'_N(t'))^T$, 如果网络中的节点通过节点之间相互耦合就能在有限时间内到达我们任意指定的位置, 就可以看成这个网络中的节点是可控的. 如果 N 维空间中的某些位置是节点永远不能到达的, 只有通过从外部输入控制信号来强制控制它们到达, 这种情况成为不可控. 图1是节点的状态空间示意图.

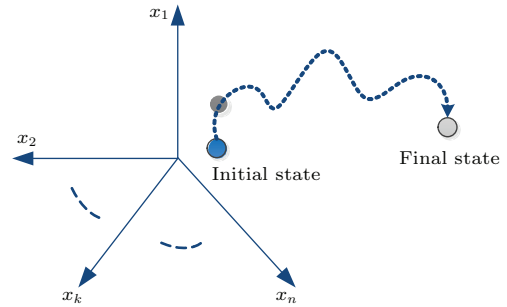


图1 节点状态空间示意图

Fig. 1. An example of state space.

对于线性时不变系统, 其常用的动力学方程为

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ 表示 t 时刻网络中节点的状态, $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{N \times N}$ 为网络节点的邻接关系矩阵, $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{N \times N}$ 为控制信号与节点的关系矩阵, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t))^T$ 表示 t 时刻输入的控制信号的状态. 单个节点的动力学模型如下:

$$x'_i = \sum_{k=1}^N a_{ik}x_k(t) + \sum_{j=1}^M a_{ij}u_j(t). \quad (2)$$

对于这样的线性系统的可控性判定, 最常用的判定方法是Kalman可控性矩阵^[22], 如下:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}]. \quad (3)$$

Kalman可控性矩阵是一个可解析计算的代数标准. 如果说一个网络是可控的, 当且仅当其满足 $\text{rank}(\mathbf{W}) = N$ 条件. 我们将矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 中的非零元素替换为独立的自由参数, 在这种情况下, 网络满足Kalman可控性矩阵条件, 网络则被称为是结构可控的^[14]. 除了个别情况外, 一个具有结构可控性的网络是可控的. 结构可控性有效地解决了现实世界中无法准确度量边权重的问题, 极大地推动了可控性的应用研究. 然而, 通过Kalman可控性矩阵来得到控制网络所需最少的输入信号个数的时

间复杂度是 $2^N - 1$, 对于当前大规模的复杂系统或者复杂网络而言, 这样的计算量是无法承受的. 控制一个网络所需的最少输入信号个数用 N_D 表示. 网络可控性的高低通过 N_D 的大小来度量. 较大的 N_D 值意味着网络需要较多的输入信号才能达到可控状态, 称之为网络的可控性较低; 反之, 较小的 N_D 值表示网络有着较高的可控性.

Liu 等 [4] 通过引入图的匹配理论和方法 [18–21] 并结合结构可控性定理 (Lin's Structural Controllability Theorem) [14], 提出了一个基于最大匹配方法求解最小驱动节点集的复杂网络可控性分析框架, 并给出了最小输入定理 (Minimum Inputs Theorem), 从理论上证明了满足网络结构可控性需要独立控制的节点集合为网络的最大匹配集中的非匹配节点.

我们首先介绍 Lin [14] 的结构可控性定理.

定理 1 结构可控性定理. 下列条件是等价的:

- 1) 一个线性系统 $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是结构可控的;
- 2) i) $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 中不包含不可达 (inaccessibility) 节点; ii) $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 中不包含膨胀 (dilation) 结构;
- 3) $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 由 cacti 结构生成.

不可达节点是指外部输入的信号无法通过有向路径到达的节点. 如果 \mathbf{A} 的一个子集 S , 使得 $|T(S)| < |S|$, 则认为 \mathbf{A} 包含一个膨胀, $T(S)$ 是子集 S 的邻居集合. cacti 是既不含不可达节点又不含膨胀的网络结构, 若去除其中任意一条边将会导致不可达节点或膨胀的出现. 结构可控性定理说明, 如果网络中存在不可达的节点, 由于这些节点不能接收控制信号导致节点状态不能被外部输入的信号所影响, 那么整个网络就不是结构可控的. 此外, 如果一个网络有膨胀结构, 系统也是结构不

可控的. 比如在一个有向星形网络中, 中央父节点指向许多的叶节点构成了一个膨胀结构, 如果仅仅控制中央节点, 由于不能独立地控制任何两个叶节点状态变量的差异, 所以系统是不可控的. 总而言之, 为了充分控制网络中所有节点, 则要删除所有的膨胀结构以及孤立的不可达节点. 如果网络中存在这样的结构, 则要对部分节点输入控制信号.

Lin 的结构可控性定理从图论的角度分析了结构可控性, 在此基础上, Liu 等 [4] 给出了最小输入定理, 将网络的结构可控性问题转化成求解有向图的最大匹配.

定理 2 最小输入定理. 网络的最小输入集 (N_I) 等价于最小驱动节点集 (N_D). 如果网络是完美匹配, 最小输入集是网络中的任意一个节点; 否则, 它等于网络最大匹配后未被匹配的节点集. 定理 2 可用以下公式表示:

$$|N_I| = |N_D| = \max\{1, N - |M^*|\}, \quad (4)$$

$|M^*|$ 为有向网中最大匹配的节点数目.

求解有向图的最大匹配, 首先要将有向图转化成二部图. 考虑一个有向图 $G(\mathbf{A})$, 与它对应的二部图为 $H(\mathbf{A}) = (V_A^+, V_A^-, \Gamma)$, 如图 2 所示. V_A^+ 和 V_A^- 是二部图的两个点集, $V(\mathbf{A})^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\}$, $V(\mathbf{A})^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\}$. Γ 是它的边集, $E(\mathbf{A}) = \{(v_j^+, v_i^-) | a_{ij} \neq 0\}$, 如果在 $G(\mathbf{A})$ 中节点 i 有边指向 j , 则在 $H(\mathbf{A})$ 中对应 x_i^+ 到 x_j^- 的有向边. 根据二部图的最大匹配算法, 可以计算出 $H(\mathbf{A})$ 的最大匹配边, 如图 2(c) 所示. 有最大匹配边指向的节点称为匹配节点, 没有最大匹配边指向的节点称为非匹配节点. 最小输入定理已经证明了网络的最大匹配中非匹配节点就是网络的驱动节点 [4].

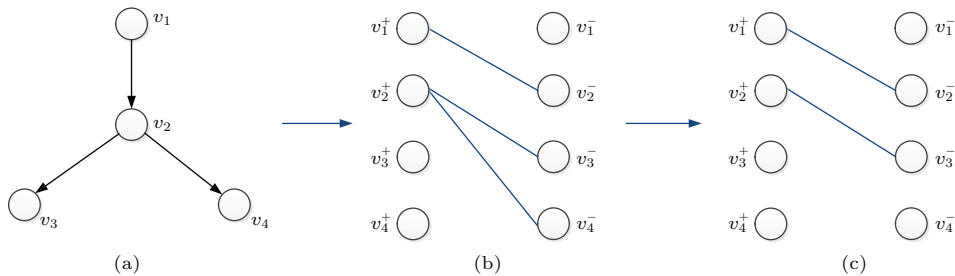


图 2 有向图的二部图及最大匹配 (a) 原始有向图 $G(\mathbf{A})$, (b) $G(\mathbf{A})$ 对应的二部图 $H(\mathbf{A})$; (c) $H(\mathbf{A})$ 中的一个最大匹配

Fig. 2. Maximum matching in directed network and its bipartite representation: (a) A simple digraph $G(\mathbf{A})$; (b) the bipartite representation $H(\mathbf{A})$ of digraph $G(\mathbf{A})$; (c) an maximum matching of $H(\mathbf{A})$.

因为Liu等提出的网络可控性侧重于有向无权网络,并没有对无向加权网络的可控性进行分析.因此,Yuan等^[24]提出了不同的理论和方法来刻画任意无向和有向、加权及无权复杂网络的可控性,称之为严格可控性.作者使用控制理论中的PHB矩阵判据来进行可控性分析,PHB公式如下:

$$\text{rank}(cI_N - \mathbf{A}, \mathbf{B}) = N, \quad (5)$$

满足(3)式的系统是可控的当且仅当对于任意的复数 c ,以上的PHB判据都是成立的.其中 I_N 维度为 N 的单位矩阵.该文证明基于PHB判据的最小驱动节点个数 N_D 等于邻接矩阵 \mathbf{A} 的所有特征根的最大几何介数,即 $N_D = \max_i \{\mu(\lambda_i)\}$.作者进一步提出了一个一般性的框架去获得控制矩阵 \mathbf{B} ,进而识别驱动节点.具体方法是利用如下的公式寻找符合条件的驱动节点,

$$\text{rank}(\lambda^M I_N - \mathbf{A}, \mathbf{B}) = N, \quad (6)$$

其中, λ^M 是对应于最大几何介数的特征根.作者同时对一些现实世界的网络进行了统计分析,并指出由于现实世界中网络边权重很难准确地度量,结构可控性对真实网络具有更广泛的适用性.

Nepusz和Vicsek^[25]提出了一种基于边的线性时变动力学模型,模型中的状态变量对应于有向网络中的边,网络中的节点用于表示入边状态变量到出边状态变量的线性关系.现以图3为例来说明边动力学与一般节点动力学的关系.图3(a)是原始的有向网络 G ,有6条边;图3(b)是对应于 G 的转化图 $L(G)$,有6个节点. $L(G)$ 中的每一个节点对应于图 G 的一条边,每一条边代表图 G 中一个长度为2的路径.这样图 G 边上的线性时变动力过程就等同于图 $L(G)$ 节点上的线性时变动力过程.文献^[25]证实了边动力学的可控性与网络的拓扑结构密切相关,通过对现实世界网络的统计分析,作者发现现实世界中的网络比同样规模的随机网络更加易控.另外,作者指出对真实世界中网络可控性的分析结果很大程度上取决于所建立的网络动力学模型.

Cowan等^[26]分析了有限时间常量下节点自身可以调节状态的动力学网络的可控性,对应到网络拓扑中,即每一个节点都带有一条自环边.节点自身的动力学模型公式为:

$$x'_i = F_i(x_i) + \sum_{k=1}^N a_{ik}x_k(t) + \sum_{j=1}^M a_{ij}u_j(t), \quad (7)$$

其中, x_i 代表节点 i 的一个状态, u_j 代表第 j 个时间独立的输入信号, $F_i = -p_i x_i$ 代表节点 i 的本身内在的动力学(线形), $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{N \times N}$ 代表网络的邻接矩阵, $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{N \times N}$ 代表控制矩阵.如图4所示,在这样的网络动力学模型中,一个驱动节点就能控制整个的连通网络.

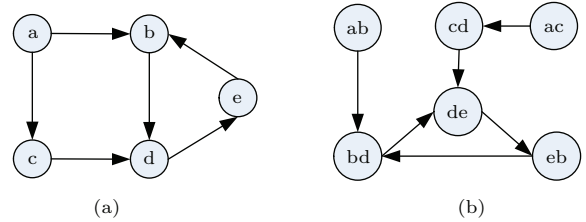


图3 边动力学网络转换示例 (a) 一个有5个节点6条边的网络 G ; (b) 图(a)中网络的转换图 $L(G)$
Fig. 3. (a) An example network G with five vertices and six edges, the dynamics takes place on the edges of the network; (b) the line graph $L(G)$ corresponds to G .

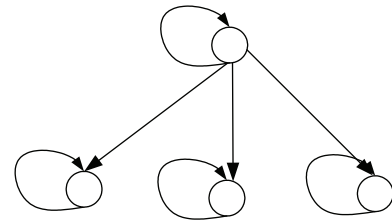


图4 节点自身内含动力学的网络示例
Fig. 4. an example network with nodal dynamics.

3 可控性与网络结构属性的关系研究

Pósfai等^[27]研究了不同的网络结构特征对可控性的影响,调查了聚集系数^[28]、社区结构^[29]和度关联系数^[30]常用的三个网络统计特征对可控性的影响.仿真结果表明聚集系数和社区结构的改变对网络可控性没有明显的效果.在有向网络中,每一个节点都有入度和出度.因此,Pósfai等利用皮尔逊系数定义了四个独立的度关联系数:入度-入度关联系数,入度-出度关联系数,出度-入度关联系数和出度-出度关联系数.度关联系数公式如下:

$$r^{\alpha-\beta} = \frac{1}{E} \frac{\sum_e (k_e^\alpha - \bar{k}^\alpha)(j_e^\beta - \bar{j}^\beta)}{\sigma^\alpha \sigma^\beta}, \quad (8)$$

其中, \sum_e 表示对每一条边求和; $\alpha, \beta \in \{\text{in}, \text{out}\}$ 为出度或者入度; k^α 是源节点的度, j^β 是目标节点的度, $\bar{k}^\alpha = \frac{1}{E} \sum_e k_e^\alpha$ 是源节点的平均度, $\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{E} \sum_e (k_e^\alpha - \bar{k}^\alpha)^2$ 是方差; j^β, σ_β^2 类似.结

果显示可控性与出度-入度关联系数呈现出稳定的单调关系, 负の出度-入度关联系数增加了 N_D 的数量, 正の出度-入度关联系数减少了 N_D 的数量; 入度-入度关联系数和出度-出度关联系数的出现增加了 N_D 的数量; 可控性与入度-出度关联系数没有关联. 然后, 作者利用空穴方法对可控性与关联系数的关系进行了理论解析, 证实了仿真结果.

Menichetti 等 [31] 利用网络结构可控性分析框架, 研究了最小入度节点和出度节点对可控性的影响. 作者通过理论解析和仿真实验发现网络可控性密切依赖于最小入度节点和出度节点的比例. 当随机有向网络中的节点的最小入度和出度都大于 2 时, 网络是始终可控的. 最后, 该文指出可以利用增加边以提高网络节点的最小入度和出度的方法来增强网络的可控性.

Hou 等 [32] 对比分析了最大熵网络和 BA 网络的可控性, 发现在同等条件下最大熵网络相较 BA 网络拥有更高的可控性. 该文通过对驱动节点及其邻居节点的拓扑结构分析, 指出一个节点邻居节点的属性很大程度上影响着该节点是否可控.

4 基于可控性的网络和节点度量

文献 [33—35] 根据网络中驱动节点的功能起源定义了网络的控制谱, 用以刻画网络的控制特性. 文中首先定义了网络中的两类节点: 源节点和末节点. 源节点是指没有入边的节点, 末节点则是只有入边没有出边的节点. 将网络中的驱动节点分为三类: 源节点、内部膨胀点和外部膨胀点. 然后根据这三类节点的比例来绘制网络的控制谱. 当一个简单有向路径 (如图 5(a) 所示) 发生分叉时, 就会产生膨胀. 如果简单有向路径发生分叉后又重新结合, 则为内部膨胀 (如图 5(b) 所示), 否则为外部膨胀 (如图 5(c) 所示). 该文通过对现有网络模型与现实世界网络的控制谱的对比分析, 发现现有网络模型的控制谱与现实世界网络的控制谱存在较大的差异, 建议在设计网络模型中考虑控制谱的因素. 另外, 该文对现实世界网络中大量不同类型网络的控制谱进行了分析, 展现了不同类型网络的控制谱特征, 并指出现实世界网络与其随机化后的网络控制谱不同.

为了衡量单一节点在网络结构控制中的重要

程度, 2012 年 Liu 等 [36] 在 PLoS One 发表了关于节点控制中心度的论文. 类似于节点控制范围但又有所不同, 控制中心度表示的是该节点在其所控制的受控子系统中的维度, 或者说只控制单一节点所能控制的子系统的规模. 该文进一步分析了节点控制中心度与网路层次结构的关系, 特别地, 他们发现对于有向无圈图 (directed acyclic graph, DAG), 节点的控制中心度等于从该节点起始的最小生成树的最大层数 (由于是 DAG, 保证了每个点所在层被惟一确定). 基于对节点控制中心度和网络层次关系的研究, 作者提出了一种随机上溯攻击方法, 相较于先前的攻击研究, 该方法的优势在于只需节点的局部结构信息, 具有更强的实用性.

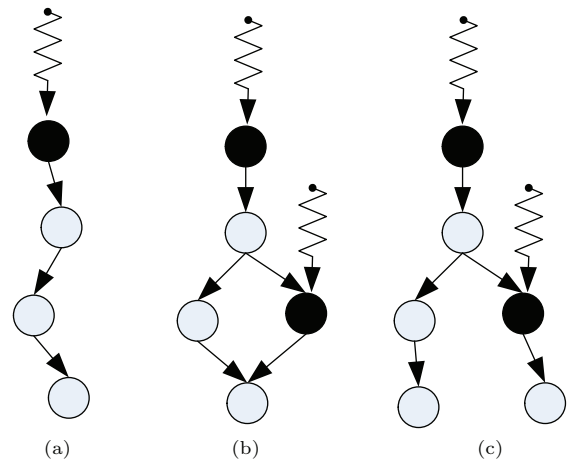


图 5 网络中的控制结构 (a) 简单有向路径; (b) 简单有向路径和内部膨胀; (c) 简单有向路径和外部膨胀

Fig. 5. Control-inducing structures in networks: (a) Simple directed path or stem; (b) directed path with an internal dilation; (c) directed path with an external dilation.

Wang 等 [35] 研究了节点的控制范围问题. 他们将节点的控制范围 (control range, CR) 定义为在所有最大匹配构成的控制子图 (CF) 中从该节点出发的最大可达节点数 (包含该节点). 大量理论计算表明节点的控制范围不依赖于节点连接度, 并且可以充分说明 $CR = 0$ 的节点为出度为 0 的节点.

Jia 和 Barabási [37] 研究了单一节点在所有最小匹配集 (MDS) 中出现的频率, 提出了节点控制容量 (control capacity) 的概念. 作者采用计算机随机抽样的方法来获得所有的最小匹配集, 进而计算节点的控制容量. 该文进一步分析了理论模型网络 and 现实网络中节点控制容量与节点度之间的关系.

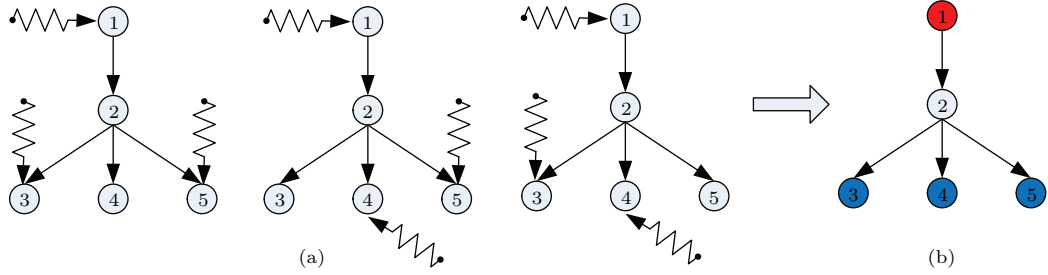


图6 驱动节点的分类 (a) 一个含有5个节点的网络, 最小驱动节点数 N_D 为3, 有三个不同的MDS; (b) 在每一个MDS中都是驱动节点的节点1称为关键节点, 没有出现在任何一个MDS中出现的节点2为冗余节点, 节点3, 4和5为普通节点, 出现在部分MDS中.

Fig. 6. Categories of driver nodes in a given network: (a) A network with five nodes that can be control via three driver nodes, there are three distinct MDSs in the network; (b) node 1 is critical as it is in all MDSs, node 2 is redundant as it does not participate in any MDS and nodes 3, 4, 5 are intermittent, participating in some but not all MDSs.

为了度量节点在驱动节点组中的控制地位, Jia等^[38]研究了基于复杂网络结构可控性的驱动节点分类问题. 如图6所示, 基于节点在MDS中的出现情况, 将其分为: 关键节点, 出现在每个MDS中的节点; 中间节点, 出现在部分MDS中的节点; 冗余节点, 从不出现在任何MDS中的节点. 并且从理论上证明了节点为关键节点的充分必要条件为其入度为0. 通过数值仿真和空穴理论分析, 作者发现冗余节点数量随平均度的增加呈现双模(Bimodality)现象, 表明网络中存在两种控制方式: 网络中冗余节点占大多数的集中控制模式和中间节点较多的分散控制模式. 同时, 作者提出可以根据网络的度分布判断网络呈现何种模态, 并探讨了通过改变部分边的指向来实现控制模态的转变. 通过Liu等^[39]提出核渗流的分析框架, Jia等^[40]还讨论了核渗流与控制模态的关系, 证实网络中核渗流决定着控制模态及控制模态的稳定性.

5 网络可控的鲁棒性

复杂网络鲁棒性的研究^[41-46]一直以来都是一个热点问题. 先前的研究工作主要是以网络拓扑结构的连通性等统计特征作为评价标准, 即网络节点发生故障或遭到恶意攻击后, 观察与网络拓扑结构相关的网络属性的变化情况, 来评价网络的容错性和抗毁性. 常用的评价指标有连通系数、最大强连通子图、自然连通度和平均最短路径等. 随着近年来网络可控性研究的兴起, 在网络鲁棒性研究的焦点从关注网络节点发生故障和网络受到攻击时网络拓扑结构的变化, 研究人员开始转向为对网络

可控性的鲁棒性研究^[47-53].

Pu等^[47]调查了单一节点攻击和级联失效两种攻击模式下网络可控性的行为. 该文以ER随机网络和SF无标度网络为实验对象, 以最小驱动节点的个数为衡量指标, 研究了具有多种不同特征的网络模型的控制鲁棒性. 仿真结果表明无论对于何种网络, 基于度的攻击方式都比随机攻击更有效. 级联失效策略的效果依赖于网络的容错参数. 一般来说, 平均度高的同质网络具有更强的控制鲁棒性. 类似地, Nie等^[48]研究了边攻击情况下网络可控性的级联失效, 结果表明随着边攻击比例的增加, 随机性攻击和蓄意攻击策略呈现出不同的行为. 对于最高负荷边攻击策略, ER网络较相同条件下的SF网络具有更强的控制鲁棒性.

在不同的攻击策略下, 如何增强网络的控制鲁棒性也引起了人们的关注. Wang等^[49]研究了在蓄意攻击策略下如何保持网络具有更高的可控性. 首先, 作者提出了一个基于最大弱连通子图的控制鲁棒性指数来度量网络的控制鲁棒性和全局连通性, 公式如下:

$$CR = \frac{1}{N} \sum_{q=1/N}^1 \frac{s(q)}{N_D(q)}, \quad (9)$$

其中, N 是网络中节点的个数, $s(q)$ 表示移除 $q \times N$ 个节点后最大弱连通子图中节点所占的比例, $N_D(q)$ 表示移除 $q \times N$ 个节点后控制网络所需的最小驱动节点个数. 然后, 对网络进行简单的随机边交换, 通过保留有益的边交换和撤销无益的边交换来提高网络的控制鲁棒指数和全局连通性. 可是, 该方法具有很大的计算复杂度, 无法适用于大规模的网络, 因此又研究了网络拓扑结构对可控性

的影响. 基于节点的控制地位和边的分类(关键边、普通边和冗余边), 作者给出了可转移节点的定义, 并提出通过重连冗余边来最大化控制路径的转移能力的方法实现控制鲁棒性的增强.

Xiao等^[50,51]研究了最大度攻击策略下的网络可控性的鲁棒性问题, 针对现实网络中存在的节点因负荷过载而失效的问题, 提出了基于节点负荷失效的网络可控性模型. 研究表明: 维持无标度网络可控性的难度要明显大于随机网络; 在目标节点失效机理下, 即使对网络输入极少的失效信号, 也能极大地破坏网络的可控性; 使高介数节点失效要比使度高节点失效更能破坏网络的可控性, 说明高介数节点在维持网络可控性上发挥着重要作用. 最后, 作者指出对不同的负荷失效模型, 要合理采取措施, 防止网络发生阶跃全不可控现象.

6 网络可控性优化

复杂网络可控性的优化是可控性研究的一个热点方向^[54-58], 也有着重要的现实意义. 可控性

优化的目标是减少需要输入的控制信号, 即最小节点驱动集MDS中节点的个数. 当前可控性优化的方法可以分为两类: 基于改变拓扑结构的方法和基于边指向的方法.

Wang等^[54]提出了通过添加边的方法来优化网络的可控性, 该方法可以使得任何网络都能达到最优的可控性. 首先, 将网络中的最大匹配集分为三类: 简单有向路径、闭环和孤点. 然后, 将所有简单有向路径和孤点依次首尾相连, 形成一条新的简单有向路径. 由于闭环不需要另外的控制信息单独控制, 因此不予考虑. 如图7所示, 图7(a)中有40个节点, 绿色的控制路径将这些节点分成了6个部分. 显而易见, 将这些控制路径首尾相连就生成了一个包含了所有节点的大的控制路径, 如图7(b). 可以证明这是通过添加最少的连边就可以达到最优的控制状态($N_D = 1$). 仿真实验和理论解析证明了该方法的有效性. 作者又进一步调查了真实网络可控性优化的结果, 指出大多数的真实网络只需增加5%的边即可实现最优的可控性.

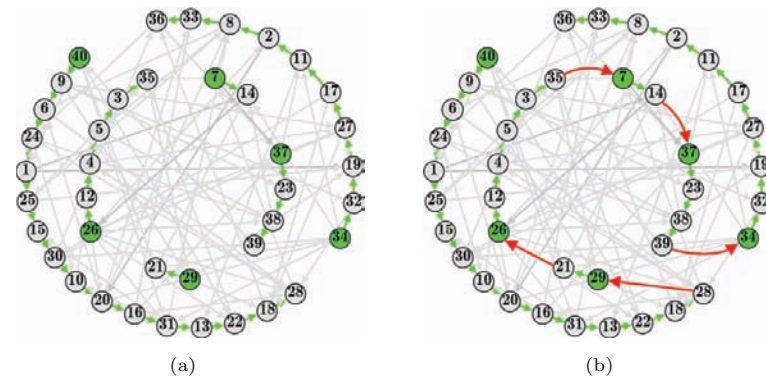


图7 (网刊彩色) 通过添加最少的边来优化可控性 (a) 网络中的控制路径; (b) 通过加边优化后的路径
 Fig. 7. (color online) An example network optimized by adding links: (a) Control path in network; (b) control path in the optimized network.

Hou等^[55]提出了另一种基于改变拓扑结构的优化方法, 通过重连冗余边优化网络可控性. 网络可控性理论将所有的边分成了三类^[4]: 关键边, 删掉它会增加驱动节点的数目; 普通边, 删掉它不会增加驱动节点的数量, 但是会改变网络的驱动节点的配置; 冗余边, 删掉它对网络可控性没有任何影响. 从上述边分类的定义来看, 冗余边在维持网络可控的过程没有发挥任何作用, 因此可以通过重连冗余边的方式优化网络可控性. 作者提出了一个随机重连冗余边的方法去增强网络的可控性, 同时保持网络中边的总数不变. 该文通过对两种常用的网

络模型ER随机网络和SF无标度网络的仿真分析验证了方法的有效性, 实验结果表明网络优化后的可控性取决于网络的平均度而不依赖于初始的度分布. 当网络的平均度大于2.5时, 优化后的网络可以到达最优的可控性.

上述两种方法都是基于改变网络拓扑结构的优化方法, 然而部分现实世界中的网络很难改变已有的拓扑结构, 或者要花费很大的代价. 因此, 在不改变网络拓扑结构的前提下, 通过重新安排边指向的方法来达到优化可控性的目的显得尤为重要. 由于现有的有向网络模型中边的指向是随机产

生的, Hou 等 [56] 提出了一个基于节点剩余度 (node residual degree, NRD) 的网络边指向方法 (图 8), 对无向边赋予指向使得网络的可控性得到优化. 节点的初始剩余度为节点的度值, 即 $\tilde{k} = k$. 我们定义了网络中节点的度差, $k_{oi} = k_{out} - k_{in}$ 即节点的出度与入度的差值. 具体步骤如下:

- 1) 找到网络中剩余度最大的节点 $d1$, 如果 $d1$ 的剩余度为空, 则结束;
- 2) 找到 $d1$ 的邻居中剩余度最大的节点 $d2$;
- 3) 将这两个节点间的边指向度差大的点; 如果节点的度差相同, 则将边指向 $d2$; 将两个节点的剩余度值都减 1, 即 $\tilde{k}(d1) = \tilde{k}(d1) - 1$, $\tilde{k}(d2)$

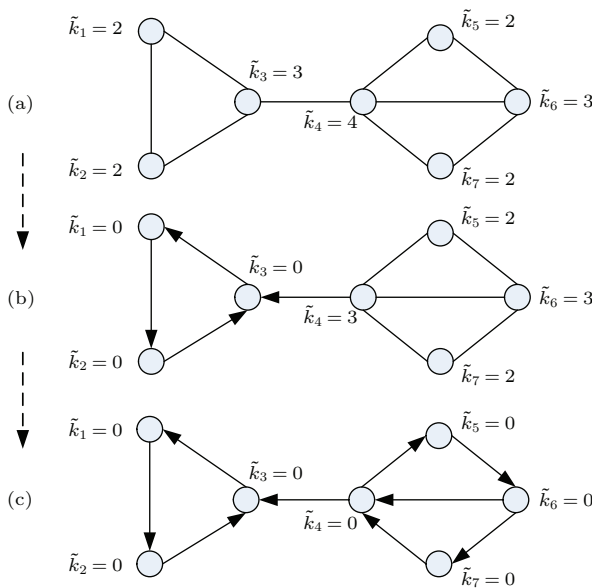


图 8 NRD 边指向算法示例 (a) 初始的无向网络及节点剩余度; (b) 中间过程; (c) 最终的有向网络
 Fig. 8. An example network with NRD algorithm: (a) The initial undirected network; (b) a intermit network; (c) the directed network assigned link direction.

$$= \tilde{k}(d2) - 1;$$

- 4) 令 $d1 = d2$, 将 $d2$ 设为空, 转向步骤 3.

基于节点剩余度的边指向方法是一种启发式算法, 目的是生成更长的控制路径会包含更多的节点. 由于它是启发式算法, 在选择节点进行边指向时, 如果存在多个满足条件的节点, 那么随机选择一个节点. 这种随机性就决定了基于节点剩余度的边指向算法在不改变网络骨架的基础上不会使网络达到最优的可控性. 为了解决这个问题, Xiao 等 [57] 提出了一个利用转换网络求解最大独立集的方法来优化可控性. 该方法首先根据原始网络构造一个相应的边转换网络, 然后将这个求解网络最优可控性的边指向集合转换成求解转换网络的最大独立集. 任何一个有向或无向网络, 都可以看成是一个对称的有向图. 对于一个无向网络, 对称有向图表示任何一个无向边都是由两个对称的有向边构成的. 对于有向网络, 对称有向图是在原有基础上添加方向相反的有向边. 作者给出了构造转换网络的定义:

- 1) 对于给定的任意一个网络 $G = (V, E)$ 和它对应的有向对称网络 (如图 9 (a) 所示);
- 2) 构造一个无向的转换网络 H , H 中的每一个节点代表有向对称网络中的一条有向边;
- (3) 转换网络 H 的连边规则. Rule I: H 中的两个对应中两条对称的有向边的节点需要连接起来 (图 9 (b) 中的绿色边). Rule II: 将所有指向同一个尾节点的有向边在转换网络 H 中所对应的节点连接起来 (图 9 (b) 中的紫色边). Rule III: 将所有从同一个头节点出发的有向边在转换网络 H 中所对应的节点连接起来 (图 9 (b) 中的橙色边).

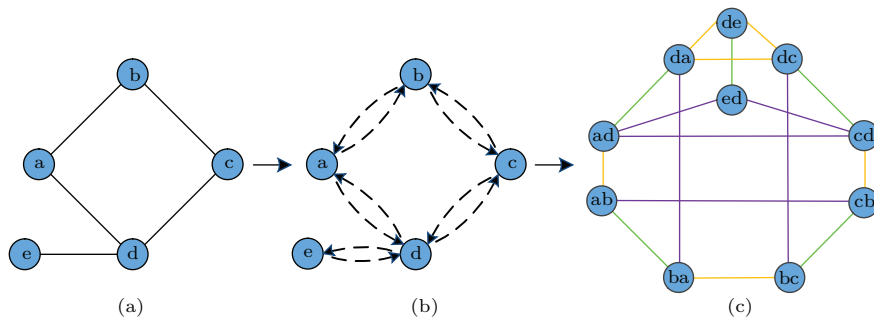


图 9 (网刊彩色) 基于转换图的边指向算法示例图 (a) 初始的无向网络 G ; (b) 对称的有向网络 G' ; (c) 构造的转换网络 $H(G')$
 Fig. 9. (color online) An example network based on switching network: (a) An initial undirected network G ; (b) the symmetric directed network G' ; (c) The switching network $H(G')$.

7 总结与展望

近年来复杂网络可控性的研究涌现出了各种不同的新理念、新思想, 从不同角度对网络可控性进行了深入研究, 取得了令人瞩目的丰硕成果. 除了本文上面介绍的几个方面, 还有很多其他与可控性相关的研究, 例如 Yan 等^[59]研究了在网络结构可控意义下的控制能量问题, 揭示了网络控制消耗与网络结构的关系.

然而, 目前复杂网络可控性方面的相关研究主要集中在结构可控性的理论方面, 用于实际问题的研究较少. 实际应用方面的障碍可以归结为以下三个方面: 1) 结构可控性的研究是基于线性动力学, 然而真实的网络或者系统大多都是非线性动力学, 或者存在非线性因素, 其动力学模型本身就很难准确建模, 使得现有理论无法直接运用; 2) 结构可控性忽略了网络中边的权重, 从研究的角度给我们提供了很大的便利, 使我们不用耗费精力去度量真实网络边的权重, 更专注于网络结构与可控性关系的研究; 但是将之用于实际网络中解决实际问题时却不得不考虑这些因素; 3) 可控性研究关注的是理论上的可控, 并不是研究具体的控制方法和手段, 也忽略了控制能量的问题, 这也增加了在应用方面的困难. 相关的研究人员也针对这些问题开展了研究, 并提出了可能的解决方案, 例如严格可控性等, 在很大程度上丰富和发展了复杂网络可控性的理论研究.

在复杂网络理论不断发展的同时, 必须加强对其的应用研究. 网络可控性理论已经应用到金融^[60]、生物网络^[61]中. 但这还远远不够, 我们应尽快将现有的理论研究成果应用于解决真实网络的一些实际问题, 找到结合点, 推动复杂网络可控性的应用研究, 进一步完善复杂网络可控性相关理论. 网络可控性理论在指控网络中就有着重要的应用价值, 当把指控组织中的指控单元和指控关系抽象成复杂网络后, 就面临着如何给最少的指控单元输入指控信息就可以完成任务; 或者当使命任务发生变化后, 如何重构指控关系以维持整个网络的控制.

复杂网络可控性是当今学术界的一个令人瞩目的交叉研究方向, 已经引起越来越多来自不同领域的研究人员的关注和重视. 本文对复杂网络结构

可控性等方面的研究进展进行了较为全面的综述, 总结归纳了可控性领域的研究热点和难点问题, 并指出了目前可控性相关研究在实际应用中存在的障碍以及今后可能的实际应用中的研究问题. 虽然目前复杂网络可控性的应用研究存在诸多困难, 但是功夫不负有心人, 相信随着研究的深入, 定能为复杂网络可控性的研究开辟一片新天地.

参考文献

- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [3] Lombardi A, Hörnquist M 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056110
- [4] Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L 2011 *Nature* **473** 167
- [5] Wang X F, Chen G R 2002 *Physica A* **310** 521
- [6] Li X, Wang X F, Chen G R 2004 *IEEE Trans. Circ. I* **51** 2074
- [7] Chen G R 2013 *Acta Autom. Sin.* **39** 4
- [8] Chen G R 2014 *Int. J. Control Autom.* **12** 221
- [9] Wang X F, Su H S 2005 *Adv. Mech.* **38** 6 (in Chinese) [汪小帆, 苏厚胜 2005 力学进展 **38** 6]
- [10] Chen T P, Liu X W, Lu W L 2007 *IEEE Trans. Circ. I* **54** 1317
- [11] Zhou J, Lu J A, Lü J H 2008 *Automatica* **44** 996
- [12] Chen G R, Duan Z S 2008 *Chaos* **18** 037102
- [13] Guo W L, Austin F, Chen S H, Sun W 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1565
- [14] Lin C T 1974 *IEEE Trans. Automat. Control* **19** 201
- [15] Shields R W, Pearson J B 1976 *IEEE Trans. Automat. Control* **21** 203
- [16] Reinschke K J, Wiedemann G 1997 *Linear Algebra Appl.* **266** 199
- [17] Sontag E D 1998 *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems* (New York: Springer) p12
- [18] Lovász L, Plummer M D 1986 *Matching Theory* (North Holland: Elsevier Science Publishing Company) p113
- [19] Mulmuley K, Vazirani U V, Vazirani V V 1987 *Proceedings of the Nineteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* p345
- [20] Umeyama S 1988 *IEEE Trans. Pattern Anal.* **10** 695
- [21] Hopcroft J E, Karp R M 1973 *Siam J. Comput.* **2** 225
- [22] Kalman R E 1963 *J. Soc. Indus. Appl. Math. Ser. A* **1** 152
- [23] Poljak S 1990 *IEEE Trans. Automat. Control* **35** 367
- [24] Yuan Z Z, Zhao C, Di Z R, Wang W X, Lai Y C 2013 *Nat. Comm.* **4** 3447
- [25] Nepusz T, Vicsek T 2012 *Nat. Phys.* **8** 568
- [26] Cowan N J, Chastain E J, Vilhena D A, Freudenberg J S, Bergstrom C T 2012 *PloS One* **7** e38398
- [27] Pósfai M, Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L 2013 *Sci. Rep.* **3** 1065
- [28] Barrat A, Weigt M 2000 *Eur. Phys. J. B* **13** 547
- [29] Leicht E A, Newman M E J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 118703

- [30] Foster J G, Foster D V, Grassberger P, Paczuski M 2010 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **107** 10815
- [31] Menichetti G, Dall'Asta L, Bianconi G 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 078701
- [32] Hou L L, Small M, Lao S Y 2014 *Phys. Lett. A* **378** 3426
- [33] Ruths J, Ruths D 2014 *Science* **343** 1373
- [34] Onnela J P 2014 *Science* **21** 1325
- [35] Wang B B, Gao L, Gao Y 2012 *J. Stat. Mech.* **2012** P04011
- [36] Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L 2012 *PLoS One* **7** e44459
- [37] Jia T, Barabási A L 2013 *Sci. Rep.* **3** 2354
- [38] Jia T, Liu Y Y, Csoka E, Posfai M, Slotine J J, Barabási A L 2013 *Nat. Comm.* **4** 2002
- [39] Liu Y Y, Csoka E, Zhou H J, Posfai M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 205703
- [40] Jia T, Posfai M 2014 *Sci. Rep.* **4** 5379
- [41] Albert R, Jeong H, Barabási A L 2000 *Nature* **406** 378
- [42] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E 2010 *Nature* **464** 1025
- [43] Holme P, Kim B J, Yoon C N, Han S K 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056109
- [44] Callaway D S, Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5468
- [45] Schwarte N, Cohen R, Ben-Avraham D, Barabási A L, Havlin S 2002 *Phys. Rev. E* **66** 015104
- [46] Shargel B, Sayama H, Epstein I R, Bar-Yam Y 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 068701
- [47] Pu C L, Pei W J, Michaelson A 2012 *Physica A* **391** 4420
- [48] Nie S, Wang X, Zhang H, Li Q, Wang B 2014 *PLoS One* **9** e89066
- [49] Wang B, Gao L, Gao Y, Deng Y 2013 *EPL* **101** 58003
- [50] Xiao Y D, Lao S Y, Hou L L, Bai L 2014 *Chin. Phys. B* **23** 118902
- [51] Xiao Y D, Lao S Y, Hou L L, Bai L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 180201 (in Chinese) [肖延东, 老松杨, 侯绿林, 白亮 2013 物理学报 **62** 180201]
- [52] Lü T Y, Piao X F, Xie W Y, Huang S B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170512 (in Chinese) [吕天阳, 朴秀峰, 谢文艳, 黄少滨 2012 物理学报 **61** 170512]
- [53] Ruths J, Ruths D 2013 *Complex Networks IV* (New York: Springer) **476** 185
- [54] Wang W X, Ni X, Lai Y C, Grebogi C 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026115
- [55] Hou L L, Lao S Y, Bu J, Bai L 2013 *International Conference on Intelligent System Design and Engineering Applications* 709
- [56] Hou L L, Lao S Y, Liu G, Bai L 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 108901
- [57] Xiao Y D, Lao SY, Hou L L, Bai L 2014 *Phys. Rev. E* **90** 042804
- [58] Ding J, Lu Y Z, Chu J 2013 *Physica A* **392** 6603
- [59] Yan G, Ren J, Lai Y C, Lai C H, Li B W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 218703
- [60] Delpini D, Battiston S, Riccaboni M, Gabbi G, Pammolli F, Caldarelli G 2013 *Sci. Rep.* **3** 1626
- [61] Wuchty S 2014 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **111** 7156

Recent progress in controllability of complex network

Hou Lü-Lin^{1)2)†} Lao Song-Yang¹⁾ Xiao Yan-Dong¹⁾ Bai Liang¹⁾

1) (*Science and Technology on Information Systems Engineering Laboratory, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

2) (*School of Mathematics and Statistics, The University of Western Australia, Crawley, WA 6009, Australia*)

(Received 18 January 2015; revised manuscript received 8 May 2015)

Abstract

The model, structure and dynamics of complex systems and networks are studied to control complex systems, which reflects the ability to understanding complex systems. Recently, the research on controllability of complex networks by using control theory and complexity science has attracted much attention. It has been investigated extensively by many scientists from various fields, and many meaningful achievements have been obtained in the past few years. In this paper, the process of controllability of complex networks is discussed, the framework of structural controllability based on maximum matching is introduced in detail, and the relevant research status since 2011 is summarized. Controllabilities of complex networks are introduced in the following aspects: different types of controllabilities, relationship between controllability and network statistical characteristics, classification and measures based on controllability, robustness of controllability, and optimization methods of controllability. Finally, the questions urgent to solve in controllability are discussed, so as to give a help to the the study in this respect.

There are five sections in this paper, which involve with different aspects of controllability. In the introduction section, the research work of controllability since 2011 is briefly mentioned, and the difference between controllability and previous pinning controllability is clarified. In the second section, the concept of controllability and different types of controllabilities are discussed in detail, including structural controllability, exact controllability, controllability with edge dynamics and controllability with nodal dynamics. In the third section, the relationship between controllability and network structure is investigated, especially the effects of common statistical characteristics and low-degree nodes on controllability. In the fourth section, the measures based on controllability are introduced, which includes control profiles, control range, control centrality, control capacity and control modality. In the fifth section, the research work about control robustness is discussed from robustness measures to optimization methods. In the fifth section, the optimization methods of controllability are introduced, which are classified into two different strategies: topology and edge direction.

Keywords: controllability, complex networks, robustness, controllability optimization

PACS: 89.75.Hc, 89.75.Fb, 02.30.Yy

DOI: 10.7498/aps.64.188901

† Corresponding author. E-mail: houlvlin@gmail.com